FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XVII.

Kolozsvár, 2012. március 22–23.

EGY ÚJ BELSŐPONTOS ALGORITMUS LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

DARVAY Zsolt, FELMÉRI Ágnes, FORRÓ Nóra, PAPP Ingrid, TAKÁCS Petra

Abstract

In this paper we deal with interior-point algorithms for solving linear optimization problems. We introduce a new primal-dual algorithm that is based on an algebraically equivalent transformation of the system of equations which defines the central-path. For this system we apply Newton's method to obtain the new search directions.

Key words:

interior-point algorithm, linear optimization, primal-dual, search direction, Newton's method

Mathematics Subject Classification (2010): 90C05, 90C51.

Összefoglalás

Ebben a cikkben a lineáris optimalizálási feladatok belsőpontos algoritmusával foglalkozunk. Egy olyan új primál-duál algoritmust mutatunk be, amely a centrális utat meghatározó egyenletrendszer algebrai átalakításán alapszik. A kapott rendszerre a Newton módszert alkalmazva határozzuk meg az elmozdulásvektorokat.

Kulcsszavak:

belsőpontos algoritmus, lineáris optimalizálás, primál-duál, elmozdulásvektor, Newton módszer

1. Bevezetés

A mérnöki feladatok megoldása gyakran vezet különböző lineáris vagy nemlineáris optimalizálási problémákhoz. A lineáris programozási feladatok megoldására Karmarkar [2] egy projektív belsőpontos algoritmust vezetett be. Ezt követően a témában számos algoritmus jelent meg, amelyek általában polinom időben határoznak meg egy közelítő megoldást [3, 5, 6]. A belsőpontos algoritmusok esetén fontos szerepe van az elmozdulásvektoroknak. A továbbiakban egy olyan új algoritmust adunk meg, amely egy sajátos elmozdulásvektor meghatározásán alapszik.

2. A lineáris optimalizálási feladat

Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned} \min c^T x, \\ Ax = b, \quad (\text{P}) \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max b^T y, \\ A^T y + s = c, \quad (\text{D}) \\ s \geq 0, \end{aligned}$$

ahol A egy m soros és n oszlopos mátrix, b és c pedig m illetve n dimenziós oszlopvektorok. Feltételezzük, hogy $\text{rang}(A) = m$ és a belső pont feltétel fennáll mindkét feladat esetén.

1. Feltétel (belső pont feltétel). Létezik (x^0, y^0, s^0) úgy, hogy

$$\begin{aligned} Ax^0 &= b, & x^0 &> 0, \\ A^T y^0 + s^0 &= c, & s^0 &> 0. \end{aligned} \quad (\text{BPF})$$

Tudjuk, hogy az önduális beágyazás technikáját felhasználva mindig szerkeszthetünk egy lineáris optimalizálási feladatot úgy, hogy a belső pont feltétel fennálljon. Továbbá, az önduális beágyazásból adódóan $x^0 = s^0 = e$, ahol e a következő n -dimenziós vektor: $e = [1, \dots, 1]^T$. Ennek alapján $\mu^0 = (x^0)^T s^0 / n = 1$.

A primál-duál feladat optimális megoldását az alábbi rendszerrel jellemezhetjük:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol xs a komponensenkénti szorzata az x és s vektoroknak, vagyis $xs = [x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n]^T$.

Használhatjuk az $\frac{x}{s} = \left[\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right]^T$ jelölést is minden x és s vektorra feltételezve, hogy $s_i \neq 0$,

bármely $1 \leq i \leq n$ indexre. Az (1) rendszer első és második egyenletét *megengedettségi feltételnek*, az utolsó egyenletét pedig *komplementaritási feltételnek* nevezzük. A belsőpontos módszerek általában a komplementaritási feltételt egy paraméteres egyenlettel helyettesítik. Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e, & \mu &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ha a belső pont feltétel fennáll, akkor egy rögzített $\mu > 0$ esetén a (2) rendszernek egy egyértelmű megoldása van, melyet μ -centrumnak nevezünk (Sonnevend [4]). A $\mu > 0$ értékekre kapjuk a centrális trajektóriát, amely a feladat optimális megoldásához konvergál. A trajektóriakövető algoritmusok általában a centrális utat használják annak érdekében, hogy olyan elmozdulásvektorokat határozzanak meg, melyekkel az optimális megoldás felé tudnak tartani.

3. Egy új primál-duál algoritmus

A továbbiakban új elmozdulásvektorokat határozunk meg az [1] cikkben bevezetett módszerrel. Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett φ folytonosan differenciálható és invertálható függvényt. A centrális utat meghatározó (2) rendszer felírható a következő módon:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ \varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), & \forall i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

A Newton módszert alkalmazva erre a rendszerre meghatározhatjuk az elmozdulásvektorokat.

A továbbiakban a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esettel foglalkozunk. Legyen a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$ vektor, melyet a Newton módszer alkalmazásakor a lineáris rendszer skálázására fogunk használni.

Feltételezzük, hogy létezik (x, y, s) úgy, hogy $Ax = b$ és $A^T y + s = c$. Továbbá $x > 0$ és $s > 0$, vagyis x és (y, s) szigorúan megengedett. Newton módszerét alkalmazva a (3) nemlineáris rendszerre az alábbi rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0, \\ A^T \Delta y + \Delta s &= 0, \\ \left(s - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right) \Delta x + \left(x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right) \Delta s &= \sqrt{\mu x s} - xs. \end{aligned} \quad (4)$$

Bevezetve a $d_x = \frac{v\Delta x}{x}$ és $d_s = \frac{v\Delta s}{s}$ jelöléseket következik, hogy $\mu v(d_x + d_s) = s\Delta x + x\Delta s$. Ezek alapján a (4) lineáris rendszer a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \hat{A}d_x &= 0, \\ \hat{A}^T \Delta y + d_s &= 0, \\ d_x + d_s &= p_v, \end{aligned} \quad (5)$$

ahol $p_v = \frac{2(v-v^2)}{2v-e}$ és $\hat{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag}\left(\frac{x}{v}\right)$. Itt egy tetszőleges ξ vektor esetén jelölje $\text{diag}(\xi)$ azt a diagonálmátrixot, melynek főátlóján a vektor elemei találhatók, az eredeti sorrendben. A centrális úttól való távolságot a következőképpen mérhetjük: $\delta(xs, \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \left\| \frac{v-v^2}{2v-e} \right\|$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma (vagy l_2 norma). Ez lehetővé teszi számunkra, hogy meghatározzuk az algoritmust.

1. Algoritmus Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter (alapértelmezett értéke $\frac{1}{27\sqrt{n}}$), és $0 < \tau < 1$ a centralitási paraméter (alapértelmezett értéke $\frac{1}{2}$).

Feltételezzük, hogy (x^0, y^0, s^0) teljesíti a belső pont feltételt, $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$ és $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}} > \frac{e}{2}$.

Továbbá feltételezzük, hogy $\delta(x^0 s^0, \mu^0) < \tau$.

begin

$x = x^0; \quad y = y^0; \quad s = s^0;$

$\mu = \mu^0;$

while $x^T s > \varepsilon$ **do begin**

$\mu = (1 - \theta)\mu;$

meghatározzuk a $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ elmozdulásvektorokat a (4) összefüggés alapján

$x = x + \Delta x;$

$y = y + \Delta y;$

$s = s + \Delta s;$

end

end.

4. Alkalmazás

A bemutatott algoritmust egy Java programozási nyelvben készült programmal teszteltük. A lépés nagyságát úgy választottuk meg, hogy a nemnegativitási feltételek teljesüljenek.

A Netlib könyvtár szabványos MPS formátumban biztosít lineáris optimalizálási feladatokat. Ezeknek egy részére az alábbi eredményeket kaptuk.

1. táblázat. Gyakorlati feladatokra kapott eredmények

MPS állomány neve	Sorok száma	Oszlopok száma	Iterációszám	Optimális érték
adlittle	56	138	16	225495.171638
afiro	27	51	11	-464.752843
blend	74	114	15	-30.812142
kb2	43	68	24	-1749.862046
sc105	105	163	14	-52.201917
sc50a	50	78	13	-64.574827
sc50b	50	78	12	-69.999875
share1b	117	253	33	-76589.225802
share2b	96	162	17	-415.731894

5. Következtetések

Egy új algoritmust határoztunk meg a centrális útnak megfelelő egyenletrendszer algebrai átalakítása segítségével. A nemlineáris egyenletekre a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt alkalmaztuk, ezt követően pedig a Newton módszert használtuk fel. A módszer hatékonyságát a Javában készített alkalmazás is igazolta.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az Erdélyi Múzeum-Egyesületnek a kutatási munkához nyújtott támogatásért (574.9.1 / P.2/ WEK 2011).

Irodalom

- [1] Darvay, Zs.: New Interior Point Algorithms in Linear Programming, *Advanced Modeling and Optimization*, 2003, 5(1):51-92.
- [2] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 1984, 4:373-395.
- [3] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P.: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [4] Sonnevend, Gy.: An “analytic center” for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa and J. Szelecsán and B. Strazicky (eds.), *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1986, 84:866-876.
- [5] Wright, S.J.: *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, 1997.
- [6] Ye, Y.: *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*, John Wiley & Sons, 1997.

dr. Darvay Zsolt, egyetemi adjunktus,

Felméri Ágnes, Forró Nóra, Papp Ingrid, Takács Petra egyetemi hallgatók

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

E-mail: darvay@cs.ubbcluj.ro