XIV. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2009. március 26-27.

A TÉRMECHANIZMUSOK OPTIMÁLIS KIEGYENSÚLYOZÁSA A GÉPRE HATÓ TEHETETLENÉGI ERŐK SZERINT

Dr. Papp István

Abstract

The following paper presents a dynamical balancing method of the spatial mechanisms.

In the first part there are defined the functions of the inertial forces, the moments of the inertial forces, obtained through the Fourier serial development. According to the kinetic-static principle, these components must be equal and counter-current with the components caused by counterbalance.

If the balance can only be partial, the components of the forces and the moments of unbalanced force, the force of the residual disturbance causing noise and slight oscillations of the entire system. The objective of optimization is the minimization of the forces and the moment of the residual disturbance forces.

Keywords:

Force, moment, optimal

Összefoglalás

A dolgozat a térmechanizmusok dinamikus kiegyensúlyozásának egyik módszerét mutatja be. Kezdetben, a mechanizmusokban ható tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékai a Fourier sor egyik harmonikájának megfelelő függvényei vannak meghatározva. A kinetikai elvnek megfelelően ezek az alkotók értékben egyenlők, de iránya ellentétes az ellensúly által bevitt erők és nyomatékok alkotóival szemben.

Abban az esetben, ha a kiegyensúlyozás csak részleges lehet, a kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok változó moduluszai zajt és az egész rendszerben rezgést okoznak. Az optimalizálás célja a gép törzsére ható kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok minimalizálására.

Kulcsszavak:

erő, nyomaték, zaj, optimális.

1. Bevezetés

Az [1] dolgozatában E. N. Stevensen, JR. bemutat egy általánosan megfogalmazott módszert amely szerint, három ortogonális tengelyre helyezett hat ellensúllyal bármely mechanizmus kiegyensúlyozható ha az ellensúlyokat tartó tengelyek a gép törzsének súlypontjába helyezett koordináta rendszer tengelyeivel párhuzamos, amely szerint a gép törzsére ható erőket és ezek nyomatékait meghatározták. Azoknak a helyzeteknek megfelelően amikor a tengelyek közül valamelyik hiányzik, röviden bemutatja hogyan lehet a géptörzs egyik pontjának rezgését a minimálisra csökkenteni. A dolgozatban bemutatott módszer csak egy csomópont rezgésének minizálását tartalmazza amely szerint a gép többi pontjai rezgésamplitúdóinak növekedését okozza.

Annak ellenére, hogy nem ad megoldást a géptörzs összes pontjai rezgésamplitúdóinak minimalizására, egyetlen a szakirodalomban megjelent dolgozatok közül, amely referenciapontként szolgál és tovább fejlesztve, gyakorlatban alkalmazható.

1.1. A teljes kiegyensúlyozás

Az 1. ábrán felvett OXYZ koordinátarendszer origója egybeesik a géptörzs súlypontjával. Az OX koordinátával párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OYZ síkot az $y = a_z$ és $z = a_y$ koordinátapontokban metszi. Erre a kiegyensúlyozó tengelyre elhelyezett ellensúlyok OX tengely szerint szabadon választott koordinátái $x = a_1$ és $x = a_2$. Hasonlóképpen az OY koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OXZ síkot az $x = b_z$ és $z = b_x$ pontokban metszi, az ellensúlyok pedig az $y = b_1$ és $y = b_2$ koordináta pontokban lesznek elhelyezve. Az OZ koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OXY síkot $x = c_y$ és $y = c_x$ pontokban metszi, a tengelyhez tartozó ellensúlyok helyzetei a $z = c_1$ és $z = c_2$ koordinátákkal vannak jelölve.

1 ábra. A teljes kiegyensúlyozás három tengely szerint

A kiegyensúlyozó tömegek által létrehozott centrifugális erőket a következő kifejezés adja:

$$F = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (1.1)$$

Ahol:- m a tömeg, r a tömeg súlypontja és a forgástengely közötti távolság.
A kiegyensúlyozó erők kettős indexei a tömegek hovatartozását és helyét mutatja, így az F_{x1} és F_{x2} az OX tengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyre helyezett kiegyensúlyozó tömegek centrifugális erőket, az F_{y1} és F_{y2} az OY tengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyhez

tartozó centrifugális erőket, az F_{z1} és F_{z2} erők pedig az OZ tengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyre szerelt tömegek által bevitt centrifugális erőket jelentik. Kiegyensúlyozás megvalósításához, a tömegek szabadon választott elhelyezésének függvényében, szükséges minden kiegyensúlyozó tömegnek az OXYZ koordinátarendszerhez viszonyított fázisszögének és a kiegyensúlyozó tengelyhez viszonyított statikus nyomatékának meghatározása.

Az 1. ábra szerint, minden egyes tömeg pillanatnyi helyzete $\omega t + \phi$ ahol, a ϕ szög, a kiegyensúlyozó tömegnek a rögzített rendszerhez mért fázisszöge.

Továbbá a Fourier sor első harmonikusa szerinti teljes kiegyensúlyozást tárgyaljuk. A rezgést okozó első harmonikus kiegyensúlyozatlan erőket és nyomatékokat $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ alakot kapnak, amelyek irányokat, erőket és nyomatékokat megkülönböztető indexel, vannak ellátva.

A kinetikai egyensúly elvének megfelelően, ezek az alkotók egyenlőnek és ellentétes irányúnak kell lenni a kiegyensúlyozó tömegek által okozott erők és nyomatékok alkotóival szemben, vagyis:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x = 0 &= A_{FX} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{FX} \cdot \sin \omega \cdot t + F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) \\
 &\quad + F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) \\
 \Sigma F_y = 0 &= A_{FY} \cos \omega \cdot t + B_{FY} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \cos(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + F_{X2} \cos(\omega \cdot t + \phi_{X2}) \\
 &\quad + F_{Z1} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + F_{Z2} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) \\
 \Sigma F_z = 0 &= A_{FZ} \cos \omega \cdot t + B_{FZ} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \sin(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + F_{X2} \sin(\omega \cdot t + \phi_{X2}) \\
 &\quad + F_{Y1} \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + F_{Y2} \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) \quad (1.2) \\
 \Sigma M_x = 0 &= A_{MX} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MX} \cdot \sin \omega \cdot t + b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + \\
 &\quad + b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) - c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) - c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) - \\
 &\quad - a_y \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X1}) - a_y \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X2}) + \\
 &\quad + a_z \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + a_z \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X2}) \\
 \Sigma M_y = 0 &= A_{MY} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MY} \cdot \sin \omega \cdot t + c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + \\
 &\quad + c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) - a_1 \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X1}) - a_2 \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X2}) - \\
 &\quad - b_z \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) - b_z \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) + \\
 &\quad + b_x F_{Y1} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + b_x F_{Y2} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) \\
 \Sigma M_z = 0 &= A_{MZ} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MZ} \cdot \sin \omega \cdot t + a_1 \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + \\
 &\quad + a_2 \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X2}) - b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) - b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) + \\
 &\quad + c_y \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + c_y \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) - \\
 &\quad - c_x \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) - c_x \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Bevezetve a jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= F_{X1} \cdot \cos \phi_{X1}; & Q_2 &= F_{X2} \cdot \cos \phi_{X2} \\
 R_1 &= F_{X1} \cdot \sin \phi_{X1}; & R_2 &= F_{X2} \cdot \sin \phi_{X2} \\
 S_1 &= F_{Y1} \cdot \cos \phi_{Y1}; & S_2 &= F_{Y2} \cdot \cos \phi_{Y2} \\
 T_1 &= F_{Y1} \cdot \sin \phi_{Y1}; & T_2 &= F_{Y2} \cdot \sin \phi_{Y2} \\
 U_1 &= F_{Z1} \cdot \cos \phi_{Z1}; & U_2 &= F_{Z2} \cdot \cos \phi_{Z2} \\
 V_1 &= F_{Z1} \cdot \sin \phi_{Z1}; & V_2 &= F_{Z2} \cdot \sin \phi_{Z2}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

az (1.2) és (1.3) egyenletekre felírható:

$$\sum F_x = 0 = (A_{FX} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2) \cdot \cos \omega t + (B_{FX} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2) \cdot \sin \omega t$$

$$\sum F_y = 0 = (A_{FY} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2) \cdot \cos \omega t + (B_{FY} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2) \cdot \sin \omega t$$

$$\sum F_z = 0 = (A_{FZ} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2) \cdot \cos \omega t + (B_{FZ} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2) \cdot \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 = & (A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot Q_1 - a_y \cdot Q_2 + a_z \cdot R_1 + a_z \cdot R_2) \cdot \cos \omega t + \\ & + (B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot Q_1 + a_z \cdot Q_2 + a_y \cdot R_1 + a_y \cdot R_2) \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 = & (A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot S_1 - b_z \cdot S_2 + b_x \cdot T_1 + b_x \cdot T_2) \cdot \cos \omega t + \\ & + (B_{MY} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot T_1 + b_z \cdot T_2 + b_x \cdot S_1 + b_x \cdot S_2) \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 = & (A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_y \cdot V_1 + c_y \cdot V_2 - c_x \cdot U_1 - c_x \cdot U_2) \cdot \cos \omega t + \\ & + (B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot U_1 + c_y \cdot U_2 + c_x \cdot V_1 + c_x \cdot V_2) \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

(1.5)

Ahhoz hogy a mechanizmus kiegyensúlyozása az egész kinematikai ciklusra megvalósuljon, az (1.5) egyenlet egyenlő kell legyen zéróval, a (t) bármely értékére. Ez a feltétel csak akkor valósulhat meg, ha a rendszer minden egyenlete $\cos \omega t$ és $\sin \omega t$ tagjainak együtthatóit egyenlővé tesszük zéróval. Ezzel a feltétellel egy 12 egyenletből álló és 12 ismeretlent, tartalmazó rendszert kapunk.

A rendszernek megfelelő mátrixegyenlet a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_z & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{FX} \\ -B_{FX} \\ -A_{FY} \\ -B_{FY} \\ -A_{FZ} \\ -B_{FZ} \\ -A_{MX} \\ -B_{MX} \\ -A_{MY} \\ -B_{MY} \\ -A_{MZ} \\ -B_{MZ} \end{bmatrix}$$

(1.6)

Felhasználva az (1.4) kifejezéseket az (1.6) egyenletrendszer megoldása után az (1.7) egyenlőségekkel meghatározhatók a kiegyensúlyozó erők moduljai:

$$\begin{aligned}
F_{X1} &= \sqrt{Q_1^2 + R_1^2} = (m \cdot r)_{X1} \cdot \omega^2 & F_{Y2} &= \sqrt{S_2^2 + T_2^2} = (m \cdot r)_{Y2} \cdot \omega^2 \\
F_{X2} &= \sqrt{Q_2^2 + R_2^2} = (m \cdot r)_{X2} \cdot \omega^2 & F_{Z1} &= \sqrt{U_1^2 + V_1^2} = (m \cdot r)_{Z1} \cdot \omega^2 \\
F_{Y1} &= \sqrt{S_1^2 + T_1^2} = (m \cdot r)_{Y1} \cdot \omega^2 & F_{Z2} &= \sqrt{U_2^2 + V_2^2} = (m \cdot r)_{Z2} \cdot \omega^2
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Hasonlóképpen az (1.4) egyenletekből kifejezhető a kiegyensúlyozó erők fázisszögei is, azaz:

$$\begin{aligned}
\phi_{X1} &= \tan^{-1}\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) & \phi_{X2} &= \tan^{-1}\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) \\
\phi_{Y1} &= \tan^{-1}\left(\frac{T_1}{S_1}\right) & \phi_{Y2} &= \tan^{-1}\left(\frac{T_2}{S_2}\right) \\
\phi_{Z1} &= \tan^{-1}\left(\frac{V_1}{U_1}\right) & \phi_{Z2} &= \tan^{-1}\left(\frac{V_2}{U_2}\right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Az (1.8) egyenletben lényeges a számláló és a nevező előjelének megtartása a fázisszöget tartalmazó trigonometriai negyed helyes meghatározásához.

1.2 Optimális kiegyensúlyozás a géptörzsre ható kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok minimalálása szerint.

Abban az esetben, ha a kiegyensúlyozás csak részleges lehet, a kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok változó moduluszai zajt és az egész rendszerben rezgést okoznak. Az optimalás célja a gép törzsére ható kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok minimalálása.

A kiegyensúlyozatlanul maradt erőket és nyomatékokat jelöljük, $\sum F_x, \sum F_y, \dots, \sum M_z$. Feltételezzük, hogy a kiegyensúlyozatlanul maradt vektorkettős moduluszai állandók maradnak az egész kinematikai ciklus alatt akkor felírható harmonikus alakban, illetve:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= A_{\sum Fx} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum Fx} \cdot \sin \omega \cdot t & \sum M_x &= A_{\sum Mx} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum Mx} \cdot \sin \omega \cdot t \\
\sum F_y &= A_{\sum Fy} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum Fy} \cdot \sin \omega \cdot t & \sum M_y &= A_{\sum My} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum My} \cdot \sin \omega \cdot t \\
\sum F_z &= A_{\sum Fz} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum Fz} \cdot \sin \omega \cdot t & \sum M_z &= A_{\sum Mz} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\sum Mz} \cdot \sin \omega \cdot t
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Összehasonlítva az (1.5) és (1.9) egyenlőségeket felírható a két egyenlet Fourier együtthatói között az egyenlőség:

$$\begin{aligned}
A_{\sum Fx} &= A_{Fx} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2 & B_{\sum Fy} &= B_{Fy} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2 \\
B_{\sum Fx} &= B_{Fx} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2 & A_{\sum Fz} &= A_{Fz} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2 \\
A_{\sum Fy} &= A_{Fy} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2 & B_{\sum Fz} &= B_{Fz} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\Sigma Mx} &= A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot (Q_1 + Q_2) + a_z \cdot (R_1 + R_2) \\
B_{\Sigma Mx} &= B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot (Q_1 + Q_2) + a_y \cdot (R_1 + R_2) \\
A_{\Sigma My} &= A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot (S_1 + S_2) + b_x \cdot (T_1 + T_2) \\
B_{\Sigma My} &= B_{MY} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot (T_1 + T_2) + b_x \cdot (S_1 + S_2) \\
A_{\Sigma Mz} &= A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_y \cdot (V_1 + V_2) - c_x \cdot (U_1 + U_2) \\
B_{\Sigma Mz} &= B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot (U_1 + U_2) + c_x \cdot (V_1 + V_2)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

A gép törzsén rezgést okozó tehetetlenségi és ezeket részben kiegyensúlyozó erők és nyomatékok kiegyensúlyozatlanul maradt erőinek és nyomatékainak Fourier együtthatóit a következő mátrixegyenlet fejezi ki:

$$[R_i] = [P_{ij}] \cdot [Q_j] + [F_i] \tag{1.11}.$$

Ahol,

$[R_i]$ - a Fourier sorral kifejezett, optimalizálás utáni kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok együtthatóinak oszlop mátrixa

$[P_{ij}]$ - a kiegyensúlyozó erők és tengelyek helyzetét meghatározó mátrix

$[Q_j]$ - az optimális kiegyensúlyozó erők oszlop mátrixa

$[F_i]$ - a Fourier sorral kifejezett tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékai együtthatóinak oszlop mátrixa

Az (1.12) egyenletben kéttengelyes kiegyensúlyozás esetén $i=1,2...12$ és $j=1,2...8$ egytengelyes kiegyensúlyozás esetén pedig $i=1,2...10$ és $j=1,2...4$

A kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok minimalizálására az együtthatókat meghatározó függvény kvadratikus alakját használjuk, azaz:

$$U = [R_i]^T \cdot [R_i] \quad i=1,2...6 \tag{1.12}$$

Az (1.12) függvény optimális értéke meghatározható, ha a függvényt a „j” alkotóból álló kiegyensúlyozó Q_k erők szerint deriváljuk, azaz:

$$\left[\frac{dU}{dQ} \right] = \sum_{k=1}^j \frac{\partial U}{\partial Q_k} = \sum_{k=1}^j \left(\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [R_i] + [R_i]^T \cdot \left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right] \right) \tag{1.13}$$

Mivel, hogy az R_i oszlop mátrix felírható:

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [R_i] = [R_i]^T \cdot \left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right] \tag{1.14}$$

Amellyel, a (1.13) kifejezés a következő alakra hozható:

$$\left[\frac{dU}{dQ} \right] = \sum_{k=1}^j \frac{\partial U}{\partial Q_k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left(\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [R_i] \right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left([R_i]^T \cdot \left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right] \right) \tag{1.15}$$

Ha az (1.13) egyenletben a kiegyensúlyozatlanul maradt erők Fourier együtthatóit a Q_k általános erő szerint deriváljuk, akkor felírható:

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right] = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([P_{ij}] \cdot [Q_j] + [F_i]) \quad (1.16)$$

Mivel a $[P_{ij}]$ és a $[F_i]$ nem függ a kiegyensúlyozó erőktől, következik:

$$\left[\frac{\partial P_{ij}}{\partial Q_k} \right] = 0 \quad \text{és} \quad \left[\frac{\partial F_i}{\partial Q_k} \right] = 0 \quad (1.17)$$

Amely szerint az (1.16)

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right] = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([P_{ij}] \cdot [Q_j]) = [P_{ij}] \cdot \frac{\partial}{\partial Q_k} ([Q_j]) \quad (1.18)$$

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right]^T = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([P_{ij}] \cdot [Q_j])^T = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([Q_j]^T \cdot [P_{ij}]^T) = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([Q_j]^T) \cdot [P_{ij}]^T \quad (1.19)$$

az (1.11), (1.18) és az (1.19) egyenlőségeket behelyettesítése után az (1.15) egyenletből kapjuk:

$$\left[\frac{dU}{dQ} \right] = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left(\left[\frac{\partial R_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [R_i] \right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial Q_k} [Q_j]^T \cdot [P_{ij}]^T \cdot ([P_{ij}] \cdot [Q_j] + [F_i]) \right) \quad (1.20)$$

Az U optimáló függvény minimális értékét a következő feltétel határozza meg:

$$\left[\frac{dU}{dQ} \right] = 0 \quad (1.21)$$

Amelyhez, elégséges az (1.20) egyenletből kifejezett feltétel,

$$[P_{ij}]^T \cdot ([P_{ij}] \cdot [Q_j] + [F_i]) = 0 \quad (1.22)$$

Vagy,

$$[P_{ij}]^T \cdot [P_{ij}] \cdot [Q_j] + [P_{ij}]^T \cdot [F_i] = 0 \quad (1.23)$$

Ahol, bevezetve a jelöléseket

$$N_{jj} = [P_{ij}]^T \cdot [P_{ij}] \quad (1.24)$$

$$K_j = [P_{ij}]^T \cdot [F_i] \quad (1.25)$$

$$[N_{jj}] \cdot [Q_j] + [K_j] = 0 \quad (1.26)$$

Ahonnán,

$$[Q_j] = -[N_{jj}]^T \cdot [K_j] \quad (1.27)$$

1.2.1 Gyakorlati alkalmazás

Feltételezzük, hogy az egytengelyű kiegyensúlyozást a gépben létező OZ tengelyre szerelt ellensúlyokkal próbáljuk megvalósítani.

Ebben az esetben az OX és az OY koordinátatengelyekkel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyek hiányoznak, azaz: $F_{x1} = F_{x2} = F_{y1} = F_{y2} = 0$ és alkotói

$Q_1 = Q_2 = R_1 = R_2 = S_1 = S_2 = T_1 = T_2 = 0$ hiányozni fognak.

A mechanizmus tehetetlenségi erői és a tehetetlenségi erők nyomatékai egy tengelyre helyezett ellensúlyokkal nem redukálhatók csak részben csökkenthetők, az (1.9) és (1.10) egyenletek szerint ezért beírható az (1.6) mátrixegyenlet jobboldalára a kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erők és nyomatékainak Fourier együtthatói:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_x & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{FX} \\ B_{FX} \\ A_{FY} \\ B_{FY} \\ A_{FZ} \\ B_{FZ} \\ A_{MX} \\ B_{MX} \\ A_{MY} \\ B_{MY} \\ A_{MZ} \\ B_{MZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\Sigma Fx} \\ B_{\Sigma Fx} \\ A_{\Sigma Fy} \\ B_{\Sigma Fy} \\ A_{\Sigma Fz} \\ B_{\Sigma Fz} \\ A_{\Sigma Mx} \\ B_{\Sigma Mx} \\ A_{\Sigma My} \\ B_{\Sigma My} \\ A_{\Sigma Mz} \\ B_{\Sigma Mz} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Az OX és az OY koordinátatengelyekkel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyek és ellensúlyaik hiányában az ellensúlyok pozícióit meghatározó koordináták értékei értelmetlené válnak, illetve az (1.6) (1.9) és (1.10) egyenleteket figyelembe véve az (1.28) mátrixegyenletből felírható:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\
 c_1 & c_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 -c_x & -c_x & c_y & c_y \\
 c_y & c_y & c_x & c_x
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{FX} \\ B_{FX} \\ A_{FY} \\ B_{FY} \\ A_{MX} \\ B_{MX} \\ A_{MY} \\ B_{MY} \\ A_{MZ} \\ B_{MZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\Sigma Fx} \\ B_{\Sigma Fx} \\ A_{\Sigma Fy} \\ B_{\Sigma Fy} \\ A_{\Sigma Mx} \\ B_{\Sigma Mx} \\ A_{\Sigma My} \\ B_{\Sigma My} \\ A_{\Sigma Mz} \\ B_{\Sigma Mz} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Az (1.29) egyenletrendszer tíz egyenletből áll és tizennégy ismeretlent tartalmaz. A kérdés az: - hova és mekkora ellensúlyokat kell helyezni a mechanizmus tengelyére, ahhoz hogy az egyenlet jobboldalán lévő kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok moduluszai a minimálisra csökkenjenek? Erre a választ az (1.27), (1.29), (1.7) és az (1.8) egyenletek adják.

Eredmények: T-optimalás előtt, S-optimalás után

	1	$MT_i =$	$MS_i =$
$Rs_i =$	1 129.64484921	46.57820378	26.51843655
	2 129.78166437	46.81668084	26.51843655
	3 129.83596597	45.65742337	26.51843655
	4 129.80130779	43.13763134	26.51843655
	5 129.68180326	39.33895459	26.51843655
	6 129.49166007	34.38725741	26.51843655
	7 129.25356167	28.45484889	26.51843655
	8 128.99604768	21.77392932	26.51843655
	9 128.75015571	14.70494537	26.51843655
	10 128.54568966	8.19606265	26.51843655
	11 128.4075576	6.70096299	26.51843655
	12 128.35265169	12.3330532	26.51843655
	13 128.38770094	19.38683246	26.51843655
	14 128.50840891	26.25168875	26.51843655
	15 128.70000477	32.4687702	26.51843655
	16 ...	...	...

Irodalom

- [1] PAPP, I., *Contribution on Dynamic Balancing of Spatial Mechanisms*, Teză de doctorat, Cluj, 1999.
- [2] PAPP, I., *Optimization of Dynamical Balancing of Mechanisms According to Diminution of Vibration Amplitude at a Given Point*. International Conference in Mechanical Engineering, page 285-287, Satu-Mare, April 28-May 1, 2005, ISBN.973-7840-03-08.
- [3] STEVENSEN, E.N., JR. *Balancing of Machines*. San Francisco, California, ASME, paper 72-Mech.-52, 1972.

Dr. Papp István, egyetemi docens

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhely

Műszaki és Humán Tudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék

Telefon mobil, 0743797371

E-mail: Pappistvan1944@yahoo.com