XIV. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2009. március 26-27.

GUMIRUGÓ NYOMÓVIZSGÁLATA SAJÁT FEJLESZTÉSŰ VÉGESELEM PROGRAM SEGÍTSÉGÉVEL

Mankovits Tamás, Dr. Szabó Tamás, Dr. Juhász György

Abstract

This paper is concerned with the application of axially symmetric finite elements for the analysis of elastomers modeling with Neo-Hookean and Mooney-Rivlin materials. The penalty approach is applied for the Neo-Hookean material and the Hu Washizu type variational principle is formulated for the Mooney-Rivlin model. The aim of the research was to develop a finite element code which is useful to analyze hyperelastic materials.

Keywords: rubber spring, FEA, nearly incompressible

Összefoglalás

A cikk tengelyszimmetrikus elasztomerek Neo-Hooke és Mooney-Rivlin anyagmodellekkel történő végeselemes analizisével foglalkozik. A büntetőparaméteres közelítéshez a Neo-Hooke, míg a Hu Washizu típusú variációs funkcionálban a Mooney-Rivlin anyagmodellt alkalmazzuk. A kutatás célja egy végeselem program fejlesztése, amely használható hiperelasztikus anyagok viselkedésének leírására.

Kulcsszavak: gumirugó, VEM, majdnem összenyomhatatlan

1. Bevezetés

Számos olyan cikk található, amelyek hiperelasztikus anyagok leírására a h -verziós végeselem-módszert alkalmazza [1]. A p -verziós végeselem alkalmazása hatékony eszköz lineáris elasztikus feladatok vizsgálatára [2], viszont geometriailag és fizikailag nemlineáris problémákra való alkalmazás csak az utóbbi években kezdett elterjedni [3,4]. Az elasztomerek általában összenyomhatatlannak, vagy majdnem összenyomhatatlannak tekinthető anyagok. A térfogatállandóságot, mint kiegészítő feltételt a büntetőparaméteres, a Lagrange multiplikátoros technikával, és az ún. mixed (kevert)-módszerrel szokás kezelni. A kérdés az, hogyan lehet szilárd és ún. nem berágódó kétdimenziós végeselemeket kezelni. Egyre több cikk keresi erre a választ és a legtöbbje az előbb említett mixed-módszert javasolja. Mindemellet a térfogatváltozásból származó elmozdulások a hidrosztatikus nyomástól függetlenül vannak közelítve.

2. Nagy alakváltozások és deformációk

Lagrange-féle leírást alkalmazva a continuum mozgástörvénye $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$, a t pillanatnyi konfigurációban az anyagi pont helyvektora $\vec{X}$. A következő közelítésben az alakváltozási gradiens $\mathbf{F} = \text{Grad} \vec{\chi}(\vec{X}, t)$ multiplikatív felbontható térfogatváltozási $\mathbf{F}_{vol}$ és térfogatállandó részre

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \hat{\mathbf{F}}, \quad (1)$$

$$\text{ahol} \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{F}_{vol} = \det \mathbf{F} = J, \quad \hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}, \quad \det \hat{\mathbf{F}} = 1. \quad (2,3)$$

Felhasználva ezt a felbontást meghatározható az ún. jobb-oldali Cauchy-Green tenzor és annak térfogatállandó része

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \text{ahol} \quad \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}. \quad (4)$$

Az alakváltozási energiafunkcionál a következőképpen írható fel

$$W(J, \hat{\mathbf{C}}) = U(J) + \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}), \quad U(J) = \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2 \quad (5,6)$$

ahol $U(J)$ térfogatváltozásból származó alakváltozási energia, míg $\hat{W}(\hat{\mathbf{C}})$ a térfogatállandóságból származó alakváltozási energia. Az $U(J)$ funkcionált a fent említett módon szokás leggyakrabban felírni, ahol κ az ún. bulk modulusz. A $\hat{W}(\hat{\mathbf{C}})$ funkcionál a Neo-Hooke modellre és a Mooney-Rivlin anyagmodellre nézve a következő

$$\hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} \mu (\hat{\mathbf{I}}_I - 3), \quad \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) = \mu_{10} (\hat{\mathbf{I}}_I - 3) + \mu_{01} (\hat{\mathbf{I}}_{II} - 3) \quad (7,8)$$

ahol μ, μ_{10}, μ_{01} az anyagállandók, az $\hat{\mathbf{I}}_I, \hat{\mathbf{I}}_{II}$ az unimoduláris jobb-oldali Cauchy-Green tenzor első és második skalárinvariánsa. A referencia koordináta-rendszerben a feszültségeket a II. Piola-Kirchhoff tenzor adja meg (9), ahol $\bar{p}$ a hidrosztatikus nyomás. A pillanatnyi konfigurációban a Cauchy-féle feszültségi tenzor (10), illetve a deformáció a Green-Lagrange alakváltozási tenzorból az alábbi módon határozható meg (11)

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{W}(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} + \bar{p} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1}, \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (9,10,11)$$

3. A variációs elv és a végeselemes diszkretizáció

A büntetőparaméteres eljárás a következő funkcionálon alapul [3]

$$\Pi_p(\mathbf{u}, \bar{p}) = \int_V \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) dV + \int_V U(J) dV + \int_V \bar{p} (J - 1) dV - \int_V \frac{1}{2\kappa} \bar{p}^2 dV - \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (12)$$

ahol $\Pi_{ext}(\mathbf{u})$ a külső erőrendszer munkája. A merediánmetszet 2D-s négycsomópontú elemekkel, míg a mixed formula esetén minden elem elmozdulásmezője Lagrange polinomokkal van közelítve [2]

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^n N_a \mathbf{u}_a \quad n = 4 + 4(p-1) + (p-1)^2, \quad (13)$$

ahol N_a az alakfüggvény, $\mathbf{u}_a$ az elmozdulásmező, n az alakfüggvények száma, amely nemlineárisan függ a p -verziójú közelítés fokszámától. A térfogatváltozás és a hidrosztatikus nyomás alacsonyabb fokszámú polinomokkal van közelítve, mint az elmozdulásmező (p)

$$\bar{J}_{(p=2)} = a_0 + a_1x + a_2y, \quad \bar{J}_{(p=3)} = \bar{J}_{(p=2)} + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy \quad (14)$$

$$\bar{p}_{(p=2)} = b_0 + b_1x + b_2y, \quad \bar{p}_{(p=3)} = \bar{p}_{(p=2)} + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy \quad (15)$$

Egy p -verziós végeslemes program került kifejlesztésre majdnem összenyomhatatlan anyagok esetére. Az elmozdulásmező közelítésének fokszáma $p = 1$ -től $p = 3$ -ig lehet előírva.

4. Numerikus vizsgálat

Egy, az iparban használt gumirugó legáltalánosabb beépítési módja **1. ábrán** [5] látható. A geometria és a terhelés is tengelyszimmetrius. A vizsgált gumirugó jellemző méretei a **2. ábrán** láthatók.

1. ábra. Gumirugó beépítési módja

2. ábra. Gumirugó jellemző méretei

Az anyagállandók a Shore keménységmérés által kapott gumikeménység eredményből származtathatóak. A mérés az (MSZ ISO EN 868:1997) szabvány alapján lett elvégezve.

A mintadarab végleges keménység értéke (A/15:69) a különböző felületeken mért keménységértékek átlagából lett meghatározva. A különböző elasztikus jellemzők - rugalmassági modulusz, nyíró rugalmassági modulusz, Mooney-Rivlin paraméterek - egy végeselem program fejlesztők által írt cikk alapján lett meghatározva [6]. Ezek a paraméterek az **1. táblázatban** találhatóak.

1. táblázat. Rugalmas jellemzők a Shore keménységből

Shore-A	Rugalmassági modulusz (N/mm ²)	Nyírási rugalmassági modulusz (N/mm ²)	Mooney-Rivlin paraméterek	
			μ_{10} (N/mm ²)	μ_{01} (N/mm ²)
69	6,927	1,754	0,702	0,175

3. ábra. Végeselemes háló 2D-s négycsomópontú elemekkel

4. ábra. Az eredeti és a terhelt állapot

A vizsgálat során a gumirugó felső részén $v_y = -20\text{mm}$ elmozdulás van előírva. A terhelést 4 egyenlő lépésben alkalmazzuk a testre. A **3. ábrán** a végeelem háló látható, míg a **4. ábrán** a megoldás az említett terhelési esetre. Az eredeti állapot fekete, míg a terhelt állapot piros színű.

5. Összefoglalás

A kifejlesztett végeelemes program alkalmas kezelni majdnem összenyomhatatlan anyagokat. A jövőbeni kutatás célja az, hogy a program képes legyen összenyomhatatlan anyagokat is számolni.

Irodalom

- [1] Zienkiewicz, O.C., Qu, S., Taylor, R.L., Nakazawa, S.: *The Patch Test for Mixed Formulations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23. (1986), pp 1873-1883.
- [2] Szabó, B.A., Babuska, I., Chayapathy, B.K.: *Stress Computation for Nearly Incompressible Materials by the p-version of the Finite Element Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28. (1989), pp. 2175-2190.
- [3] Bonet, J., Wood, R.D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] Szabó, T., Mankovits, T.: *FEM Computations of Hyperelastic Materials*. microCAD'2004 International Scientific Conference, (2004), pp. 79-84.
- [5] *Typical installation of rubber spring*. Timbren Industries Inc.
- [6] Altidris, P., Warner, B.: *Analyzing Hyperelastic Materials*. Midwest ANSYS Users Group, IMPACT Engineer Solutions, 2005.

Mankovits Tamás, főiskolai adjunktus

Munkahely: Debreceni Egyetem AMTC Műszaki Kar, Gépészmérnöki Tanszék

Cím: 4028 Debrecen, Ótemető u. 2-4.

Telefon / Fax: +36-52-415555/77780

E-mail: tamas.mankovits@mfk.unideb.hu

Dr. Szabó Tamás, PhD egyetemi docens

Munkahely: Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kar, Alkalmazott Mechanika Tanszék

Cím: 9026 Győr, Egyetem tér 1.

Telefon / Fax: +36-96-503400/3271

E-mail: sztamas@sze.hu

Dr. Juhász György, PhD főiskolai docens

Munkahely: Debreceni Egyetem AMTC Műszaki Kar, Gépészmérnöki Tanszék

Cím: 4028 Debrecen, Ótemető u. 2-4.

Telefon / Fax: +36-52-415555/77779

E-mail: juhasz@mfk.unideb.hu