XIII. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2008. március 14-15.

A DIREKT MÓDSZER INTEGRÁLEGYENLETEI SAJÁT SÍKJÁBAN TERHELT LEMEZRE

Szűcs Nóra

Abstract

The main objective of the present paper is to establish the fundamental solutions for a thin plate assuming a constant in plane stress state due to the loads applied in the middle plane of the plate.

Összefoglalás

A jelen cikk célja az alapmegoldások, és a lehajlás számítására alkalmas integrálegyenletek előállítása, ha olyan terhelés működik a lemez saját síkjában, amelynek hatására konstans feszültségi állapot alakul ki a lemezben.

1. Bevezetés

Peremelemes megoldásokat lemezstabilitási problémákra különböző feltevések mellett több szerző publikált [1, 2, 3, 4, 5]. A felsorolt tanulmányok közös jellemzője, hogy a lemez síkjában működő és a stabilitásvesztést okozó terhelés tartományi integrálban jelenik meg a peremelemes formalizmusban. Ez az integrál kétféleképpen kezelhető, (a) tartományi elemek felett végzett numerikus integrálással (b) a tartományi integrál alkalmas transzformációval peremre történő kivitelével. A jelen cikk fő célja az alapmegoldások, és a lehajlás számítására alkalmas integrálegyenletek előállítása (két ilyen egyenletre van szükség), ha olyan terhelés működik a lemez saját síkjában, amelynek hatására konstans feszültségi állapot alakul ki a lemezben.

2. A feladat egyenletei

A tanulmány kartéziuszi (x, y, z) és görbevonalú koordinátarendszert $(x^1, x^2, x^3=z)$ és $\xi^1=s, \xi^2=n, \xi^3=z$ alkalmaz: s az ívkoordináta a peremgörbe mentén, n a peremgörbére merőlegesen mért normális.

Az $x^3=\xi^3=z=0$ koordináta felület egybeesik a lemez középsíkjával.

1. ábra. Koordináta rendszerek a középfelületen és a peremen

Kartéziuszi KR-ben $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ a bázisvektorok. Ha síkbeli görbevonalú KRt használunk, akkor egy akkor a görög indexek 1 és 2 értékűek, $g^{\alpha\mu}$ a metrikus tenzor. A z irányú elmozdulást w jelöli a középfelület P_0 pontjában. A lemez S^+ tartománya az x, y koordináta síkban az $\odot L$ görbével határolt. Ez utóbbi sima a véges számú K sarokpontokon kívül. A feladat differenciálegyenlete

$$I_1 E_1 \Delta \Delta w - f \Delta w = p_z, \quad (2.1)$$

ahol

$$I_1 = b^3/12, \quad E_1 = E/(1-\nu^2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

Itt b a lemeztavastagság, E a rugalmassági modulus, ν a Poisson szám, f a terhelési paraméter, p_z a középfelületre merőleges terhelés. Az M_n hajlítónyomaték, a V_n nyíróerő és a csavarónyomaték a

$$M_n = -I_1 E_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \quad \text{és} \quad V_n = I_1 E_1 \frac{\partial}{\partial n} \Delta_H w. \quad (2.3)$$

$$M_{nt} = -I_1 E_1 (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \quad (2.4)$$

képletekkel számítható. Következésképp a peremfeltételek a sima peremíven

$$M_n = 0 \quad \text{vagy} \quad -\frac{\partial w}{\partial n} = \hat{\varphi}(s) \quad (2.5a)$$

és

$$V_n - f \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{vagy} \quad w = \hat{w}(s), \quad (2.5b)$$

alakúak, ahol $\hat{w}(s)$ és $\hat{\varphi}(s)$ az elmozdulás és szögelfordulás előírt értékei a perem mentén.

3. Somigliana identitás

A (2.1) egyenlet a

$$M^{\alpha\beta}_{||\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + b^3 = 0 \quad (3.1)$$

egyenlet speciális esete, ha abban elvégezzük az alábbi helyettesítéseket

$$N^{\alpha\beta} = -f g^{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = w_{||\alpha\beta}, \quad b^3 = p_z \quad (3.2)$$

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\kappa 3} w_{||\kappa}, \quad \vartheta_\mu = w_{3||\mu}, \quad \kappa_{\mu\gamma} = -\vartheta_\mu ||_\gamma, \quad (3.3)$$

$$M^{\alpha\beta} = I_1 E_1 \underbrace{\left[\nu g^{\alpha\lambda} g^{\mu\gamma} + \frac{1-\nu}{2} (g^{\alpha\mu} g^{\lambda\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\lambda\mu}) \right]}_{-g^{\alpha\lambda\mu\gamma}} \kappa_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

és egyenesvonalú KR-re térünk át. Itt $p_z = b^3$ a középfelületre merőleges terhelés sűrűsége, $w = w^3$ a z irányú elmozdulás a középfelületen, $b_{\alpha\beta}$ a görbületi tenzor, $M_{\alpha\beta}$ az élnyomatékok tenzora, $N^{\alpha\beta}$ a síkbeli élerők tenzora, a kovariáns a két párhuzamos vonalkát követő görög index jelöli.

2. ábra. Az S^+ tartomány és az L peremgörbéje töréspontokkal

Legyen u kétfőn sokszor differenciálható skalármező. Kimutatható, hogy

$$\int_{S^+} \left(M^{\alpha\beta}_{||\alpha\beta}(w) + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}(w) \right) u \, dS = I_1 E_1 \int_{S^+} u ||_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta\mu\gamma} w_{||\mu\gamma} \, dS + f \int_{S^+} g^{\alpha\beta} u ||_{\alpha\beta} w_{||\beta} \, dS + \\ + \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta} + \frac{d}{ds} \left(n_{\alpha} M^{\alpha\beta} t_{\beta} \right) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{||\beta} \right] u \, ds - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) n_{\beta} \frac{du}{dn} \, ds - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) t_{\beta} u \Big|_i^{i+1} \quad (3.5)$$

A w és u w betűcseréket követő különbségképzéssel adódik a Somigliana identitás:

$$\int_{S^+} \left(M^{\alpha\beta}_{||\alpha\beta}(w) + f g^{\alpha\beta} w_{||\alpha\beta} \right) u \, dS - \int_{S^+} \left(M^{\alpha\beta}_{||\alpha\beta}(u) + f g^{\alpha\beta} u_{||\alpha\beta} \right) w \, dS = \\ = \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta}(w) + \frac{d}{ds} \left(n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) t_{\beta} \right) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{||\beta} \right] u \, ds - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta}(u) + \frac{d}{ds} \left(n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(u) t_{\beta} \right) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} u_{||\beta} \right] w \, ds - \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) n_{\beta} \frac{du}{dn} \, ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(u) n_{\beta} \frac{dw}{dn} \, ds - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) t_{\beta} u \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(u) t_{\beta} w \Big|_i^{i+1} \quad (3.6)$$

4. Elsőrendű alapmegoldás

Legyen $Q(\xi, \eta)$ és $M(x, y)$ a középfelület két pontja: forráspont és hatáspont. A két pont távolságát R , az M pont Q pontra vonatkoztatott helyvektorát $\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y$ jelöli. $\delta(M-Q)$ a Dirac függvény. A

$$\Delta(\Delta w - k^2 w) = \delta(M-Q)/D, \quad D = I_1 E_1, \quad k^2 = f/D > 0 \quad (4.1)$$

DE megoldását - itt a deriválás az M pontra vonatkozik, $U(M, Q)$ -val fogjuk jelölni, és elsőrendű alapmegoldásnak fogjuk nevezni. Igazolható, elhagyva a részleteket, hogy az alapmegoldás

$$U(M, Q) = U(R) = \frac{1}{Dk^2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln R - \frac{1}{4} \right). \quad (4.2)$$

alakú. Ennek normálirányú deriváltját szintén alapmegoldásnak nevezzük:

$$G(M, Q) = \frac{\partial U(R)}{\partial n} = \frac{1}{Dk^2} \left(\frac{1}{2\pi R} - \frac{k}{4} Y_1(kR) \right) \frac{n_{\kappa} r_{\kappa}}{R}. \quad (4.3)$$

5. Somigliana képletek

Tegyük fel hogy alkalmazzuk a Somigliana identitást az S^+ tartományra, feltéve hogy (a) Q belső pont, (b) helyettesítjük $U(M, Q)$ -t $u(M)$ -val. Megjegyezzük, hogy egy Q középpontú R_c sugarú kört kizárunk az S^+ tartományból és az identitás határértékét kell venni ha R_c tart zérushoz. Elhagyva a hosszadalmas részletszámításokat, kapjuk :

$$w(Q) = \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta}(w(M_o)) + \frac{d}{ds} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w(M_o)) t_{\beta} \right] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{||\beta}(M_o) \right\} U(M_o, Q) \, ds_{M_o} - \\ - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta}(U(M_o, Q)) + \frac{d}{ds} \left(n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q)) t_{\beta} \right) - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} U_{||\beta}(M_o, Q) \right] w(M_o) \, ds_{M_o} \\ - \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w(M_o)) n_{\beta} \frac{\partial U(M_o, Q)}{\partial n} \, ds + \oint_{\mathcal{L}} n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q)) n_{\beta} \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} \, ds_{M_o} - \\ - \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w) t_{\beta} U(M_o, Q) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q)) t_{\beta} w \Big|_i^{i+1} + \int_{S^+} U(M, Q) p_z(M) \, dS_M \quad Q \in S^+ \quad (5.1)$$

Ez az egyenlet valójában egy reprezentációs tétel. Ha ismerjük a $w(M_o)$ elmozdulásmezőt, valamint a $d w(M_o)/dn$ szögelfordulásmezőt, a

$$M_n = n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w(M_o)) n_{\beta}$$

hajlítónyomatékokat és a

$$V_n = n_{\alpha} M^{\alpha\beta}_{||\beta}(w(M_o)) + \frac{d}{ds} \left[n_{\alpha} M^{\alpha\beta}(w(M_o)) t_{\beta} \right] - f n_{\alpha} g^{\alpha\beta} w_{||\beta}(M_o)$$

nyíróerőt akkor az elmozdulás $w(Q)$ értéke az (5.1) képlettel számítható. Ha a $Q=Q_0$ a peremen van, akkor az (5.1)re vezető gondolatmenettel adódik, hogy

$$\begin{aligned} w(Q_0)c_u(Q_0) = & \oint_{\mathcal{L}} \left\{ n_\alpha M^{\alpha\beta}{}_{||\beta}(w(M_o)) + \frac{d}{ds} \left[n_\alpha M^{\alpha\beta}(w(M_o)) t_\beta \right] - f n_\alpha g^{\alpha\beta} w_{||\beta}(M_o) \right\} U(M_o, Q_o) ds_{M_o} - \\ & - \oint_{\mathcal{L}} \left[n_\alpha M^{\alpha\beta}{}_{||\beta}(U(M_o, Q_o)) + \frac{d}{ds} \left(n_\alpha M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q_o)) t_\beta \right) - f n_\alpha g^{\alpha\beta} U_{||\beta}(M_o, Q_o) \right] w(M_o) ds_{M_o} \\ & - \oint_{\mathcal{L}} n_\alpha M^{\alpha\beta}(w(M_o)) n_\beta \frac{\partial U(M_o, Q_o)}{\partial n} ds + \oint_{\mathcal{L}} n_\alpha M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q_o)) n_\beta \frac{\partial w(M_o)}{\partial n} ds_{M_o} - \\ & - \sum_{i=1}^n n_\alpha M^{\alpha\beta}(w) t_\beta U(M_o, Q_o) \Big|_i^{i+1} + \sum_{i=1}^n n_\alpha M^{\alpha\beta}(U(M_o, Q_o)) t_\beta w \Big|_i^{i+1} + \int_{S+} U(M, Q_o) p_z(M) dS_M \quad Q_o \in \mathcal{L} \quad (5.2) \end{aligned}$$

ahol $c_u(Q_0)$ 0.5, ha a görbe sima, ellenkező esetben függ a Q_0 pontban levő két érintő által bezárt szögtől. Mivel ismerünk két peremértéket a görbén, további egyenletre van szükség. Ez az egyenlet az (5.2) alatti gondolatmenet ismétlésével kapható meg, ha az $U(M, Q)$ -t helyére $G(M, Q)$ -t gondolunk..

6. Következtetések

A fő célkitűzésünkkel összhangban meghatároztuk az alapmegoldást vékony a saját síkjában terhelt vékony lemezre. Az alapmegoldás ismeretében mód nyílik (a) a kritikus terhelés meghatározására, és (b) a terhelés rezgésekre gyakorolt hatásának vizsgálatára.

Irodalom

- [1] S. Syngellakis, A. Elzein: *Plate buckling loads by the boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37:1763-1778
- [2] M. S. Nerantzaki, J. T. Katsikadelis: *Buckling of plates with variable thickness – an analog solution*, Engineering Analysis with Boundary elements, 1996, 18:149-154
- [3] J. Lin, R. C. Duffield, H. Shih: *Buckling analysis of elastic plates by boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary elements, 1999, 23:131-137
- [4] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, A. Young: *Application of dual reciprocity method to plates and shells*, Engineering Analysis with Boundary elements, 2000, 24:583-590
- [5] J. Purbolaksono, M. H. Aliabadi: *Buckling analysis of shear deformable plates by boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62:537-563

Szűcs Nóra, doktorandusz

Munkahely: Bay Zoltán Logisztikai és Gyártástechnikai Intézet

Cím: 3519, Magyarország, Miskolc-Tapolca, Iglói út 2.

Telefon: +36-46-560-110

E-mail: noraszucs@vipmail.hu