XIII. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Koložsvár, 2008. március 14-15.

KÉNYSZEREGYENLETEK

Szilágyi Arnold

Abstract

The subject of this paper is the presentation of a unusual method and its usability designing a machine, which gives the opportunity for specialists to have an insight upon the behaviour of a mechanism which is being designed under a dynamic load. Furthermore, an optimized form of constraint equations will be presented as well as the dual quaternionic method developed by the author.

Összefoglalás

A dolgozat témája egy új módszer ismertetése és annak alkalmazhatósága a géptervezésben, amely lehetőséget ad a szakember számára, hogy képet kapjon a gép viselkedéséről, annak dinamikus igénybevétele folytán. A dolgozat további részeiben bemutatásra kerül a szerző által optimalizált alakja, majd a kényszeregyenletek duál kvaterniós módszere, amelyet szintén ezen dolgozat szerzője dolgozott ki.

1. Bevezetés

A dolgozat egy világszerte ismeretlen matematikai módszert mutat be, amely segítségével akár dinamikus vizsgálatot végezhetünk egy mechanizmuson. Az első részben az eredeti módszer kerül bemutatásra, majd a szerző által optimalizált, módosított módszer leírása olvasható el. A kutató munka következtében a szerző egy újabb egyszerűsítést fedezett fel a duál kvaterniók felhasználásával. A matematikai apparátus bár nehézkes de könnyen algoritmizálható. Ezt bizonyítja egy olyan számítógépes alkalmazás is, amely szimbólikusan generálja a kényszeregyenleteket a mechanizmus 3D-s modelljéből kiindulva.

2. A „klasszikus” kényszeregyenletek módszere

Két, csuklóval összekötött test (kinematikai pár) helyzete tizenkét koordinátával határozható meg, egyenként hat-hat koordinátával, ám ezek a koordináták bizonyos feltételek mellett összefüggésben vannak. Ezen összefüggések matematikai leírására ad egy lehetőséget a kényszeregyenletek módszere. Az **1. ábrán** egy térbeli mechanizmus csuklóval összekötött, i -edik és j -edik tagja van feltüntetve. Látható az OXYZ rögzített rendszer, az i -edik tag tehetetlenségi főtengelyei (X_i, Y_i, Z_i) , amelyet az $\mathbf{R}_{Gi}$ helyzetvektor, és az irányítottságot jellemző $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ szögek határoznak meg, valamint a j -edik tag főtengelyei (X_j, Y_j, Z_j) , azok szögeivel $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ és az $\mathbf{R}_{Gj}$ helyzetvektorral meghatározva. Van két csillaggal jelölt segéd, vagy más néven geometriai rendszer $(O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*; O_j^* X_j^* Y_j^* Z_j^*)$, A

segédrendszerek O_i^* és O_j^* origói, a Δ_i és Δ_j tengelyeken helyezkednek el, amelyek relatív mozgást végeznek hengeres, csúszó és csavarmenetes kötések esetén. A segédrendszerek $\vec{r}_i(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, illetve $\vec{r}_j(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$ helyzetvektorral rendelkeznek a $G_i x_i y_i z_i$ és $G_j x_j y_j z_j$ rendszerekhez viszonyítva. A csuklók által bevitt kötöttségek analitikus meghatározása a segédrendszerek megengedett, egymáshoz viszonyított mozgásaiból adódik, amelyet a csukló típusa határoz meg. Ezeket a csillag rendszerek irányszögei között fellépő feltételekkel írhatjuk le:

$$\begin{aligned}\alpha_i^* &= \alpha_j^* \\ \beta_i^* &= \beta_j^* \\ \gamma_i^* &= \gamma_j^*\end{aligned}\quad (1)$$

1. ábra. Egy térbeli csuklós mechanizmus két, általános tagja.

Az **1. ábrán** feltüntetett körbejárási irány szerint felírható a következő vektoriális egyenlet:

$$\vec{R}_{Gi} + \vec{r}_i + \vec{a} - \vec{R}_{Gj} - \vec{r}_j = 0 \quad (2)$$

Ez tulajdonképpen a két tag közötti tetszőleges mozgást leíró egyenlet. De ha ezt kiegészítjük a csuklónak megfelelő kötöttségek egyenleteivel a kinematikai pár matematikai modelljét kapjuk. Ugyanígy eljárva felírhatjuk a többi kinematikai pár egyenletrendszerét, így megkapván a mechanizmus matematikai modelljét.

Tovább lépve, az egyenletrendszer idő szerinti deriválása után kiszámíthatjuk az eredő szögsebességet:

$$\begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i & \sin \gamma_i & 0 \\ -\cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{bmatrix} \quad [PAPP, MÁTÉ (8.) képlet]$$

Újraderiválva az egyenletrendszert eljutunk a lineáris gyorsulásokig, illetve szöggyorsulásokig (a megfelelő tag tehetetlenségi rendszerében). Ezekután kiszámíthatók a tagok eredő szöggyorsulásai is:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \varepsilon_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i - \dot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i & \dot{\gamma}_i \cdot \sin \gamma_i & 0 \\ \dot{\beta}_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i - \dot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i & -\dot{\gamma}_i \cdot \cos \gamma_i & 0 \\ \dot{\beta}_i \cdot \sin \beta_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i & \sin \gamma_i & 0 \\ -\cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_i \\ \ddot{\beta}_i \\ \ddot{\gamma}_i \end{bmatrix} \quad [PAPP, MÁTÉ (9) képlet]$$

A tagok tehetetlenségi erői felírhatóak:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix} = -m_i \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X}_{Gi} \\ \ddot{Y}_{Gi} \\ \ddot{Z}_{Gi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

valamint a tehetlenségi nyomatékai:

$$[M_i]^{(i)} = \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \varepsilon_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zi} & \omega_{yi} \\ \omega_{zi} & 0 & -\omega_{xi} \\ -\omega_{yi} & \omega_{xi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Végezetül minden tagra felírhatjuk az erők és a nyomatékok egyensúlyát, aminek következtében meghatározhatók a csuklóokban fellépő erők is, amelyek fontosak a gép további vizsgálatának szempontjából.

3. Egyszerűsített modell

Ha kihagyjuk a vektorkontúrból a súlyponti tehetlenségi rendszert és helyette tekintjük az előző taggal kapcsolatban álló koordináta-rendszer és a következő taggal kapcsoltban álló koordináta-rendszer közötti vektort, a számítások során eggyel kevesebb koordinátatranszformációt kell elvégezni és eggyel kevesebb tag marad a vektoregyenletben is. Tehát a **3. ábra** alapján feltüntetett körbejárási iránynak megfelelően a vektorkontúr a következő alakot ölti:

$$\vec{R}_{ni} + \vec{A} - \vec{R}_j - \vec{R}_{nj} = 0 \quad (5)$$

A vektoregyenletnek megfelelő

mátrixegyenlet a következőképpen alakul az **OXYZ** rendszerben:

$$\vec{R}_{ni} + {}^0_i[T] \cdot \vec{A} - {}^0_j[T] \cdot \vec{R}_j - \vec{R}_{nj} = 0 \quad (6)$$

miközben a “klasszikus” módszerrel ugyanez a mátrixegyenlet:

$$\vec{R}_{Gi} + {}^0_G[T] \cdot \vec{r}_i + {}^0_G[T] \cdot {}^G_j[T] \cdot \vec{a} - {}^0_j[T] \cdot \vec{R}_{Gj} - \vec{r}_j = 0 \quad (7)$$

A számítások egyszerűsége szembetűnő. A további lépések ugyanúgy történnek, ahogy azt fentebb láthattuk, annyi különbséggel, hogy egy keveset egyszerűsödnek az egyenletek és a nyomatékegyenletben a tehetetlenségi nyomatékok tenzora nem lesz átlós.

2. ábra. Egyszerűsített modell

4. Duál kvaterniók modell

Mivel egy duális kvaternió a csavarmozgással szoros kapcsolatban van, és a csavarmozgásból a vizsgált csuklók bármely mozgását le lehet vezetni, a dolgozat szerzője azon fáradozott hogy szervesen beépítse a duál kvaterniókat a kényszer egyenletek módszerébe, hisz így egyszerűbb kényszereket vihe-

5. ábra. A duális kvaternió modell

tünk be a mechanizmus matematikai modelljébe. Az elmélet alapja ugyancsak egy egyenlőség az O_{jp} pontban, amelyet a következő egyenlettel fejezhetünk ki, ha a transzformációkat a duál kvaterniókkal írjuk le:

$$\hat{r}_{jn}^{(0)} = q_{jp}^{(0)} \cdot q_i^{(0)} \cdot \hat{r}_{in}^{(0)} \cdot q_i^{(0)*} \cdot q_{jp}^{(0)*} \quad (8)$$

, ahol $q_{jnp}^{(0)} = q_{jpn}^{(0)-1}$, $q_{jpn}^{(0)} = q_{jp}^{(0)} \cdot q_{jpn}^{(jp)}$ és $q_i^{(0)} = q_{in}^{(0)} \cdot q_i^{(in)}$, és a $*$ a duális kvaternió konjugáltját jelöli.

A bonyolultnak tűnő matematikai háttér valójában egyszerűbb lehetőséget nyújt a transzformációk leírására. Például ha optimálisan válasszuk meg egy hengeres csuklós kinematikai pár segédrendszereit, csak a következő alakú kvaterniókat kell összeszoroznunk:

$$\hat{q}_i^{in} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta_0}{2} s_{0x} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} s_{0y} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} s_{0z} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Irodalom

- [1] Papp István, Máte Márton: *Transformarea generală a două sisteme ortogonale*. CDM2005, a IV.-a Conferință de dinamica mașinilor. Vol. II, pag. 319-326. ISBN 973-635-511-X.
- [2] eucledianspace.com

Szilágyi Arnold, hallgató

Munkahely: Sapienia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar - Marosvásárhely, Gépészmérnöki Tanszék

Cím: 540453, Románia, Marosvásárhely, Gloriei 8/6

Telefon : +40-744-358710

E-mail: arnold_sz_noel@yahoo.com