XIII. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2008. március 14-15.

FESZÍTŐFA OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMÁK A HAMILTON UTAK ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRA

Salamon Gábor

Abstract

The design process of telecommunication networks often uses graph theory as an efficient modeling paradigm. The nodes and possible links of the network are represented by a graph G . When a connected network is to be designed, the aim is to find a spanning tree T of input graph G . Many of these problems have an objective function based on the node-degrees of T . This model is extremely useful while designing networks where the cost of devices to install depends highly on the needed routing functionality (ending, forwarding, or routing a connection). In this paper we consider three closely related problems of this kind: Minimum Leaf Spanning Tree problem, Maximum Internal Spanning Tree problem, and Minimum Branching Spanning Tree problem. All of these problems are generalizations of the Hamiltonian path problem as a Hamiltonian path of the input graph G (if exists) provides an optimal solution for all of them. As a result all three problems are NP-hard and so it is very unlikely that exact polynomial time algorithms can be developed for them. Research activity on this topic focuses on creating approximation algorithms which provide „good enough” solutions in polynomial time. In this paper we survey the known approximability results on the above problems. The approximation algorithms can be used in network design either to directly solve problems or to build up efficient solution heuristics.

Összefoglalás

A távközlési hálózatok tervezésekor az egyik leggyakrabban használt modellezési paradigma a gráfelmélet. A megtervezendő hálózat csomópontjait és lehetséges összeköttetéseit egy G gráf írja le. Amennyiben a célunk egy összefüggő hálózat kialakítása, tulajdonképpen ebben a G input gráfban kell egy T feszítőfát találnunk. Sok konkrét hálózattervezési feladat esetében a T megoldás jóságát leíró célfüggvény a T feszítőfa fokszámaitól függ. Ez a modell igen hasznos például abban az esetben, amikor a hálózati csomópontokba elhelyezendő eszközök költségét a tőlük megkövetelt funkcionalitás (kapcsolat végződötetés, adat továbbítás, útvonalválasztás) határozza meg. A jelen dolgozatban három olyan problémát ismertetünk, melyek a fokszám-alapú feszítőfa optimalizálás témakörébe tartoznak: a MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFA, a MAXIMÁLIS BELSŐPONT-SZÁMÚ FESZÍTŐFA és a MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA problémákat. Ezen problémák mindegyike a Hamilton-út keresés általánosítása (tehát NP-nehéz), ezért nagyon valószínűtlen, hogy a közeljövőben egyszerre egzakt és hatékony algoritmust találjunk megoldásukra. A témában folyó kutatások egyik fő iránya épp ezért gyors és „elég pontos” közelítő algoritmusok megalkotása. A jelen dolgozatban összefoglaljuk a fenti három problémára jelenleg ismert közelítéseket. A hivatkozott algoritmusok közvetlen hasznukon túl ahhoz is hozzájárulnak, hogy a hálózattervezés problémáinak megoldására a jövőben hatékony heurisztikákat találjunk.

Problémafelvetés: optikai hálózatok és feszítőfák

Az optikai alapú telekommunikációs hálózatokban igen elterjedt az úgynevezett hullámhosszosztásos multiplexálás (Wavelength Division Multiplexing – WDM) használata. A technológia lényege, hogy a különböző továbbítandó adatcsomagokat egyazon optikai szálon, de különböző hullámhosszú jellel továbbítják. Ezáltal jelentős sávszélesség növekedés érhető el, azonban az egyes hálózati csomópontokba kerülő eszközöknek képeseknek kell lenniük a különböző hullámhosszok kezelésére,

adatcsomagok hozzáadására, illetve lecsatlakoztatására. Ezek a forgalomirányítás szempontjából fontos funkciók tisztán optikai eszközökkel egyáltalán nem vagy csak igen drágán valósíthatók meg. A kapcsolódó hálózattervezési feladat a következő: adottak a csomópontok és a köztük lévő lehetséges linkek (például a már meglévő optikai szálak). Úgy kell elhelyezni a különböző eszközöket és megtervezni a forgalomirányítást, hogy a lehető legkevesebb helyen legyen szükség drága eszközökre (amelyek képesek az adatcsomagok lecsatlakoztatására és hozzáadására) [1]. Célunk a probléma minél precízebb matematikai kezelése. Ehhez a következő modellt használjuk: adott egy G input gráf, ennek csúcsai reprezentálják a hálózat csomópontjait, míg élei a lehetséges linkeket. A feladat megadni G egy olyan T feszítőfáját, amely a lehető legkevesebb nagyfokú csúcsot tartalmazza. Egy csúcs nagyfokú (vagy más néven elágazás), ha fokszáma T -ben legalább három. Vegyük észre, hogy a megtalált T feszítőfa éppen a végül megvalósított minimális összefüggő hálózat modellje, és ebben éppen a nagyfokú csúcsokban van szükség drága, forgalomirányításra is képes eszközök használatára. A jelen dolgozat célja összefoglalni az erről a feladatról és néhány rokon feszítőfa optimalizálási problémáról ismert eredményeket.

A dolgozatban említett feszítőfa optimalizálási feladatok közös jellemzői az alábbiak. A probléma bemenete valamennyi esetben egy összefüggő G gráf, a lehetséges megoldások pedig G feszítőfái. Egy konkrét T feszítőfa jóságát a feladatra jellemző célfüggvény határozza meg. Esetünkben ez a célfüggvény kizárólag T pontjainak fokszám-eloszlásától függ. Három ilyen problémát tekintünk át részletesebben. A MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma [2,3] esetében minimalizálandó a feszítőfa elágazásainak (legalább harmadfokú csúcsainak) száma. A MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma esetében minimalizálandó a feszítőfa leveleinek (pontosan elsőfokú csúcsainak) száma. A MAXIMÁLIS BELSŐPONT-SZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma [4] esetén maximalizálandó a feszítőfa belső pontjainak (legalább másodfokú csúcsainak) száma. Könnyű észrevenni, hogy az utóbbi két probléma ugyanannak a feladatnak két megfogalmazása. Ezen megfogalmazások az optimalizálás szempontjából ekvivalensek. Amikor a levelek helyett a belső (levelektől különböző) pontokat számoljuk, akkor valójában a célfüggvény komplementerét képezzük. Ez a két rokon probléma nemcsak formailag különböző, de közelíthetőségi szempontból is igen eltérően viselkedik. Valamennyi fenti probléma közös jellemzője, hogy az optimális megoldása (amennyiben létezik ilyen a G gráfban) egy olyan speciális feszítőfa, amely egyetlen útból áll (azaz két elsőfokú pontját kivéve minden pontja másodfokú). Az ilyen speciális feszítőfa neve Hamilton-út. Annak eldöntése, hogy az adott G gráf tartalmaz-e egyáltalán Hamilton-utat, a kombinatorikus optimalizálás egyik legismertebb NP-teljes problémája [5]. Jelenlegi ismereteink szerint igen valószínűtlen, hogy hatékony algoritmus adható a feladat megoldására. Ebből következik, hogy a jelen dolgozatban tárgyalt problémák is NP-nehezék. Épp ezért nem várhatunk olyan algoritmust, amely *hatékonyan és egyszersmind optimálisan* oldja meg őket. A gyakorlati felhasználhatóság miatt a hatékonyságból nem engedhetünk, így az

optimalitást kell felváltunk egy matematikailag kezelhető és behatárolható pontatlansággal. Amint az ilyen esetekben szokás, közelítő algoritmusokat adunk a feladatok megoldására. Ezáltal hatékony és az optimálisához elegendően közeli megoldásokat nyerünk.

Ismert közelítések a feszítőfa optimalizálási problémákra

Mielőtt ismertetjük a fent definiált problémák megoldására jelenleg ismert közelítéseket, emlékeztetjük az olvasót a közelítő algoritmusok jóságának mérésére használatos approximációs faktor fogalmára. Legyen adva egy P optimalizálási probléma, illetve egy ennek megoldására szolgáló A közelítő algoritmus. Azt mondjuk, hogy A egy f -közelítő algoritmus a P problémára, ha P tetszőleges I inputjára az algoritmus az optimális megoldásnál legfeljebb f -szer rosszabb megoldást szolgáltat. Ekkor az approximációs faktor f .

Elsőként tekintsük a MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA problémát. Ez a probléma közelíthetőség szempontjából is nehéznek bizonyult. A bonyolultságelmélet jelen állása szerint ugyanis nem létezik rá olyan közelítő algoritmus, melynek approximációs faktora jobb, mint $\log n$, ahol n az input gráf pontjainak száma [3]. Egyelőre nyitott probléma, hogy ez az approximációs faktor elérhető-e egyáltalán minden esetben. Ismert egy olyan közelítő algoritmus [3], amely $\log n$ nagyságrendű approximációs faktort garantál az olyan input gráfok esetében, amelyekben minden pont fokja legalább cn (ahol c konstans). Az algoritmus mohó stratégiát követ, mindig a lokálisan legnagyobb fokszámú pontban építi tovább az aktuálisan meglévő feszítőfát. Gargano és társai [2] szintén az egyenletesen sűrű gráfokban alkalmazható algoritmust adták az elágazásszám csökkentésére.

Mivel az elsőfokú pontok (levelek) száma felülről korlátozza a nagyfokú pontok számát, ezért ez utóbbi mennyiség csökkentése elérhető úgy is, hogy a feszítőfa megkonstruálása során a levelek számát igyekszünk minimalizálni. Sajnos azonban a MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma is nehezen közelíthető. Lu és Ravi belátták [6], hogy jelen bonyolultságelméleti tudásunk szerint nagyon valószínűtlen egy olyan közelítő algoritmus létezése, amely ezt a problémát konstans approximációs faktorról oldja meg.

A MAXIMÁLIS BELSŐPONT-SZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma optimalizációs szempontból ekvivalens a MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFA problémával, azaz ugyanazon feszítőfák alkotják az optimális megoldások halmazát. Érdekes, hogy míg az utóbbi probléma nehezen közelíthető, addig az előbbire léteznek hatékony közelítő algoritmusok. Salamon és Wiener [4] egy mélységi bejárás alapuló hatékony közelítő algoritmust adott a MAXIMÁLIS BELSŐPONT-SZÁMÚ FESZÍTŐFA problémára, melynek approximációs faktora 2, azaz az algoritmus által megtalált feszítőfának legalább fele annyi belső pontja van, mint az optimálisnak. A jelenleg ismert legjobb approximációs faktor $7/4$ [7]. Azt

ezt elérő algoritmus egy kezdeti feszítőfából kiindulva folytatólagosan alkalmaz néhány egyszerű lokális javítólépést. Minden lépés hozzájárul a levelek számának csökkentéséhez, azaz a belső pontok számának növeléséhez. Ugyanezen algoritmus alkalmazható a MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA problémára is. Bár ezt a problémát tekintve nem ismerünk matematikai korlátot a közelítés jóságára, futási tesztek alapján az algoritmus hatékony heurisztikának bizonyult.

Irodalomjegyzék

- [1] G. Salamon, S. Győri, T. Cinkler, J. Harmatos: Dimensioning Multi-Layer Transport Networks with Grooming by Genetic Algorithm. *Proceedings of 5th European Conference on Networks and Optical Communications (NOC2002)*, pp 44–51, 2002
- [2] L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, U. Vaccaro: Spanning trees with bounded number of branch vertices. *LNCS 2380 (Proceedings of ICALP02)*, pp 355–365, 2002
- [3] G. Salamon: Spanning tree optimization problems with degree-based objective functions. *Proceedings of 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, pp 309–315, 2005
- [4] G. Salamon, G. Wiener: On finding spanning trees with few leaves. *Information Processing Letters* 105, pp 164–169, 2008
- [5] M. Garey, D. Johnson: *Computers and Intractability*. WHFreeman and co., 1979
- [6] H.-I. Lu, R. Ravi: Approximation for maximum leaf spanning trees in almost linear time. *Journal of Algorithms* 29 (1), pp 132–141, 1998
- [7] G. Salamon: Approximation Algorithms for the Maximum Internal Spanning Tree Problem. *LNCS 4708 (Proceedings of MFCS2007)*, pp 90–102, 2007

A kutatáshoz az OTKA-NKTH nyújtott támogatást (OTKA 67651).

Salamon Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok körútja 2
Tel: +36 1 463 2585
E-mail: gsala@cs.bme.hu