XIII. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2008. március 14-15.

HIDRAULIKUS ÉS ELEKTROMOS KÖRÖK, MECHANIKAI RENDSZEREK ANALÓGIÁJA

Kakucs András

Abstract

Using the analogies existing between hydraulic and electric circuits and mechanical systems we can work out some algorithms in modeling and analyzing hydraulic circuits. In this analysis the procedures and numerical methods of structural mechanics can be adopted with no or only small modifications.

Összefoglalás

A hidraulikus és az elektromos körök, valamint a mechanikai rendszerek analógiájának felhasználásával egy új, a hidraulikus körök számítására alkalmas eljárást lehet felépíteni. Ennek során a szerkezetek számításában elterjedt numerikus módszereket használhatjuk fel.

1. Bevezetés

A hidraulikus rendszerek vezetékekkel összekötött diszkrét elemekből állanak. Közismert, hogy ezek az elemek és az összekötő vezetékek bizonyos ellenállást fejtenek ki az áramlással szemben. A gyakorlatban inkább előforduló turbulens áramlás esetében a létrejövő nyomáscsökkenést a hozam (térfogatáram) négyzetével arányosnak tekintjük:

$$\Delta p(t) = R_h \cdot Q^2(t), \quad (1)$$

ahol R_h az illető elem hidraulikus ellenállása, amely az áramlási sebességtől függő mennyiség.

A kört felépítő elem belsejében bizonyos folyadékmennyiség található. Ez a mennyiség a folyadék nyomásától (a folyadék kompresszibilitásától és az elem belső térfogatának megnövekedésétől) függ, egy infinitezimális folyamat alatt, lineáris összefüggést feltételezve $dV = C_h \cdot dp$, ahol C_h az illető elem hidraulikus kapacitása. Mivel $dV = Q(t) \cdot dt$, zérus kezdeti feltételekkel

$$\Delta p(t) = \frac{1}{C_h} \cdot \int_0^t Q(t) dt. \quad (2)$$

Az elem belsejében levő folyadék, tömeggel rendelkezve, bizonyos tehetetlenséget mutat az áramlási sebesség megváltozása esetén:

$$\Delta p(t) = L_h \cdot \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (3)$$

ahol L_h az illető elem hidraulikus induktivitása.

Általános esetben az említett jelenségek együttesen lépnek fel, ekkor a nyomáscsökkenés:

$$\Delta p(t) = L_h \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + R_h \cdot Q^2(t) + \frac{1}{C_h} \cdot \int_0^t Q(t) dt . \quad (4)$$

Ez utóbbi egyenlet az RLC soros áramkörre felírt Ohm-törvényhez igen hasonló:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt , \quad (5)$$

az egyedüli lényeges különbség a hozam második hatványa lenne. Ez az észrevétel a hidraulikus-elektromos analógia alapja, azzal a megjegyzéssel, hogy az irodalom általában a nyomásesést a hozammal (és nem annak négyzetével) tekinti arányosnak.

Ha a (4) egyenletet deriváljuk, feltételezvéen együtthatóinak állandóságát, a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt} \Delta p(t) = L_h \cdot \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + 2 \cdot R_h \cdot Q(t) \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C_h} \cdot Q(t) . \quad (6)$$

Észrevehetjük, hogy ez az egyenlet az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer mozgásegyenletéhez hasonlít:

$$F(t) = m \cdot \frac{d^2 D(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dD(t)}{dt} + k \cdot D(t) . \quad (7)$$

Amennyiben egy hozamtól (áramlási sebességtől) függő $R_h^* = 2 \cdot R_h \cdot Q(t)$ ellenállást vezetünk be, akkor ez az egyenlet a nemlineáris csillapítású rendszerek mozgásegyenletével lesz analóg.

Ezen hármas analógiára alapozva a szerkezetek számításából ismert merevségi mátrix módszerét kiterjeszthetjük a hidraulikus körökre is.

2. Az ekvivalens elektromos kör

Az elektromos körök legtöbbször koncentrált paraméterűek, azaz ellenállásukat stb. pontszerűnek tekintett elemek jelentik, amelyeket ideális, ellenállás nélküli vezetékek kötnek össze. A hidraulikus körök esetében azonban ez a fajta megközelítés nem alkalmazható, mivel az összekötő vezetékek ellenállása, kapacitása és induktivitása nem hanyagolható el, így más megoldás után kell néznünk. Egy lehetőség a távvezetékek modellezésében használt, az 1. ábrán látható „T” négypólus alkalmazása lenne.

1. ábra. A „T” négypólus, mint vezetéket helyettesítő elem

Az ábrán Δp_1 és Δp_2 a csomóponti relatív (légkörihez viszonyított) nyomások, Δp pedig a modellezett szakaszon fellépő nyomásesés.

A számítás és a modellezés pontossága függ a fenti kapcsolással helyettesített vezeték l hosszától. Mivel a nyomásváltozás hullámok formájában terjed a vezetékek mentén, a számítások pontosságát e hullámok λ hosszával hozzák kapcsolatba: a modell akkor alkalmazható, ha

$$l < \frac{\lambda}{16}. \quad (8)$$

Amennyiben ez a feltétel nem teljesül, úgy a vezetéket rövidebb szakaszokra kell feldarabolni; így jutunk például a 2. ábrán látható „II” modellhez.

2. ábra. Egy vezeték „II” modellje

Ilyen módon a hidraulikus körünket egy koncentrált paraméterű (áram-) körrel tudjuk modellezni, illetve ezen modell segítségével tudjuk a számításainkat elvégezni. A 3. ábrán egy egyszerű, folyadékelosztó kör látható: az 1. pont a hálózat betáplálási pontja, a 2. és 3. pontokban a folyadék távozik a rendszerből, ráadásul a 3. pontban egy rezgéseket keltő berendezés működik. Az egyszerű „T” négy-pólusokkal megvalósított koncentrált paraméterű helyettesítő kör az ábra jobb oldalán látható.

3. ábra. Egy egyszerű példa

Láthatjuk, hogy ez több hurokból áll. A számítások elvégzésére a legalkalmasabb eljárás a hurokáramok módszere lenne, amely bizonyos algoritmizálást is lehetővé tesz, pl. észrevehetjük, hogy a 4. csomóponttól eltekintve (ahol nincs letestelő elem) minden vezetékszakasz két-két hurokra bomlik fel. Ahhoz, hogy ez a 4. pont ne okozzon külön kezelendő esetet, az ott csatlakozó vezetékek kapacitásának egy részét (pl. 1/4-ét) oda költöztetjük és akkor a 4. ábrán látható, minden vezetéket két

hurokra felosztó kapcsoláshoz jutunk.

4. ábra. Módosított „T” modell alkalmazása

3. A számítások elvégzése, következtetések

A számítások elvégzésére a hurokáramok módszere alkalmazható. Bebizonyítható ([5]), hogy a 4. ábrán megjelölt hurkokat diszkrét elemeknek (elemi soros RLC köröknek) tekintvén, egy egyszerű algoritmus alkalmazásával a megoldandó egyenletrendszer

$$[L_h] \cdot \{\ddot{Q}\} + [R_h^*] \cdot \{\dot{Q}\} + [1/C_h] \cdot \{Q\} = \{\Delta \dot{p}\}, \quad (9)$$

formában kapjuk, amely a több dinamikai szabadságfokkal rendelkező (nemlineáris) rendszerek mozgásegyenletével analóg:

$$[M] \cdot \{\ddot{D}\} + [C] \cdot \{\dot{D}\} + [K] \cdot \{D\} = \{F\}, \quad (10)$$

tehát megoldására a szerkezetek számításában alkalmazott eljárások (pl. a merevségi mátrix módszere) alkalmazhatók lesznek.

Ugyanezen analógia alapján, a (9) egyenlet jobb oldalát zéróval egyenlővé tévén a szabadrezgések egyenletéhez jutunk, tehát meg tudjuk határozni a tanulmányozott hidraulikus kör rezonáns frekvenciáit is.

Irodalom

- [1] BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice - Hall Inc, USA, 1996.
- [2] FLOREA, J., PANAITESCU, V. **Mecanica fluidelor**. Bukarest, Ed. Didactică și Pedagogică, 1979.
- [3] LÁTRÁNYI J., ZALKA A. **Válogatott fejezetek hidraulikus körfolyamatok tervezéséből**. Budapest, Műszaki Egyetem, 1982.
- [4] SINGIRESU S. RAO **Mechanical Vibrations**. Addison-Wesley Publishing Co, USA, 1995.
- [5] KAKUCS. A. **Modelarea circuitelor hidraulice prin analogia cu sistemele electrice și mecanice**. Ed. Univ. Transilvania, Braşov, 2007.

Kakucs András, ph.d, Sapientia Egyetem, Marosvásárhely, Gépészmérnöki Tanszék
 Marosvásárhely, Segesvári u. 1/c, Tel.: +40-265-208172, fax: +40-265-206211
 E-mail: kakucs@ms.sapientia.ro