XI. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2006. március 24-25.

AZ ÉPÍTÉSZETI INFORMÁCIÓ ÉRTELMEZÉSE 4 DIMENZIÓS, PROJEKTÍV SZEMPONTBÓL

Orbán György

Abstract

The n -dimensional geometric spaces in case of $n > 3$ does't can intuitiv interpretate. The geometry of this spaces has a perfect elaborated algebrical model. There are many calculations but they can effectuate easy with the help of calculator.

In this study it presente projections of a 3D spatial solid (construction) from a point that isn't in the space of this element. Is determinated a 4 dimensional con that have direction surface the construction and vertex a point that isn't in the space of construction. We obtain a set of spatial solids after the intersection of con with different hiperplans that have the same biraports of 4 elements. This can be attached to the construction in the function of different architectural criterias.

The vizualization of metod is made with GDL language (Geometrie Description Language) in case of Parthenon from Athen.

Összefoglalás

A háromnál több dimenziós tereket nem lehet intuitívan értelmezni, de ennek ellenére tökéletesen kifejlesztett algebrai modellel rendelkeznek, aminek segítségével tanulmányozhatóak. A számítások bonyolultabbak, de számítógép segítségével könnyen elvégezhetőek.

Ebben a dolgozatban egy háromdimenziós alakzatról (épületről) egy nem az alakzat terében fekvő pontból készült vetítések lesznek bemutatva. Meghatározunk egy négydimenziós kúpot melynek csúcsa nincs az épület terében és vezérfelülete az épület, majd elmetsszük különböző hipersíkokkal (háromdimenziós terekkel). Az így kapott alakzatok megőrzik projektív tulajdonságaikat és a belőlük alkotott halmazt az épülethez rendelhetjük különböző építészti szempontok szerint.

A folyamat vizualizálásához a GDL nyelvet használjuk (Geometric Description Language) az athéni Parthenon esetében.

1. Elméleti megalapozás

Egy sík kúpszeleteinek halmaza egy olyan kúp síkmetszeteiként lehet értelmezni melynek vezérgörbéje egy adott kúpszelet (pl. egy kör). Ilymódon egy körhöz egy kúpszelethalmazt lehet rendelni, mely egy olyan kúp síkmetszeteiből áll melynek vezérgörbéje az illető kör. E halmaz görbéi

1. ábra kúpszeletek

mind másodrendű görbék (mivel a vezérgörbe is másodrendű) és ezeket a vezérgörbe és a kúp csúcsa teljesen meghatározza. (1. ábra)

Hasonló módon a háromdimenziós térben egy gömbhöz vagy egypalástú hiperboloidhoz másodrendű felületek halmazát lehet hozzárendelni, melyek egy olyan négydimenziós kúp hipersíkokkal való metszetei lesznek, melyeknek vezérfelülete az illető gömb vagy egypalástú hiperboloid, a csúcsa pedig egy pont, amely nem tartozik hozzá ahhoz a háromdimenziós térhez amely tartalmazza a vezérfelületet. (2.ábra)

2. ábra másodrendű felületek

A fenti művelet segítségével egy mértani halmazban (görbék, felületek, térfogatok) rejlő információk újszerű módon értelmezhetők. Az információ értelmezése egy olyan tér segítségével történik, melynek dimenziója eggyel nagyobb az illető halmazt tartalmazó tér

dimenziójánál. Ez a művelet egy projektív transzformáció, amely megőrzi az elemnégyesek (pontsor, sugársor, síksor) kettősvizonyát.

Más megvilágításban a fenti művelet egy háromdimenziós tárgy “fényképeként” fogható fel, egy olyan pontból mely nem tartozik hozzá az illető háromdimenziós térhez.

Az emberi látás a centrális projekciónak (egy pontból egy síkra való vetítésnek) felel meg és ezért az elemekből alkothaó négyes csoportok kettősvizonya invariáns.

Számos nevezetes építészeti alkotás tudatosan szerkesztett kettősvizonyokon alapuló vezérvonalakkal (domináns irányok, karakterisztikus pontok, jellegzetes fény-árnyék hatások) rendelkezik, mint például az athéni Akropoliszon található Parthenon vagy a görög építészet jellegzetes oszlopfői. Ezek a tulajdonságok megőrződnek bármely centrális vetítés során. A kettősvizony invarianciájának köszönhetően egy épület kettősvizonyokon alapuló arányai érzékelhetővé válnak az időbeni megtekintés alkalmával is és nem csak a homlokzatok elméletileg elvonatkoztatott egyszerű viszonyainak tanulmányozása során, ami az átlagos szemlélőnek is esztétikai élményt nyújthat.

Bármely épület pontthalmazként fogható fel. Az épülethez (pontthalmazhoz) végtelen sok más épület rendelhető hozzá, mely egy olyan négydimenziós kúpnak hipersíkokkal való metszeteként kapható meg, melynek vezérfelülete az illető épület, a csúcsa pedig egy pont, ami nincs benne az épületet tartalmazó háromdimenziós térben. Minden ily módon kapott “épület” megőrzi az eredeti épület kettősvizonyait.

Egy építészeti alkotás a valóságtól elvonatkoztatva olyan különböző épületek halmazaként értelmezhető, melyek azonos kettősvizonyokon alapuló arányrendszerrel rendelkeznek. Így módon egy épülethez eszmeileg egy egész új formavilágot lehet társítani.

2. Alkalmazások

Az athéni Akropoliszon épült Parthenon az építészet egyik gyöngyszeme. Homlokzatait kettősviszonyokon alapuló arányok rendezik a szemlélő számára megkapó egységgé. Az említett módszernek megfelelően a Parthenonhoz egy halmazt lehet hozzárendelni.

3. ábra logikai séma

A Parthenont határoló felület a topológia elvének megfelelően egy háromszöghálóval közelíthető meg. Az adatok bevétele egy olyan halmaz formájában történik amelynek elemei rendezett valós számhármasok, amelyek a háromszögháló csúcspontjai koordinátáinak felelnek meg.

$$V_i = [[x_k, y_k, z_k], [x_j, y_j, z_j], [x_l, y_l, z_l]] \quad (1)$$

Az adatok rendszerezése a négydimenziós térnek megfelelő negyedik koordináta hozzávételével történik. $V_i = [[x_k, y_k, z_k, 0], [x_j, y_j, z_j, 0], [x_l, y_l, z_l, 0]]$

A számítások egyszerűsítése végett feltételezzük, hogy a kúp csúcsa rajta van az Oxyz hipersíkra az épületet befogadó legkisebb térfogatú téglatest középpontjában emelt merőlegesen.

$$W = \left[\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}, \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2}, c \right] \quad (3)$$

A négydimenziós kúp alkotóinak paraméters egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} G_{i,1,1} &= (W_1 - V_{i,1,1}) \cdot \lambda + V_{i,1,1} & G_{i,2,1} &= (W_1 - V_{i,2,1}) \cdot \lambda + V_{i,2,1} & G_{i,3,1} &= (W_1 - V_{i,3,1}) \cdot \lambda + V_{i,3,1} \\ G_{i,1,2} &= (W_2 - V_{i,1,2}) \cdot \lambda + V_{i,1,2} & G_{i,2,2} &= (W_2 - V_{i,2,2}) \cdot \lambda + V_{i,2,2} & G_{i,3,2} &= (W_2 - V_{i,3,2}) \cdot \lambda + V_{i,3,2} \\ G_{i,1,3} &= (W_3 - V_{i,1,3}) \cdot \lambda + V_{i,1,3} & G_{i,2,3} &= (W_3 - V_{i,2,3}) \cdot \lambda + V_{i,2,3} & G_{i,3,3} &= (W_3 - V_{i,3,3}) \cdot \lambda + V_{i,3,3} \\ G_{i,1,4} &= (W_4 - V_{i,1,4}) \cdot \lambda + V_{i,1,4} & G_{i,2,4} &= (W_4 - V_{i,2,4}) \cdot \lambda + V_{i,2,4} & G_{i,3,4} &= (W_4 - V_{i,3,4}) \cdot \lambda + V_{i,3,4} \end{aligned} \quad (4)$$

Tekintsük azt a négydimenziós gúlát melynek alapja a téglatest és csúcsa a kúp csúcsával egyezik meg. A metsző hipersíkot olyan négy ponttal határozzuk meg melyek a fenti gúla élein adott arányban helyezkednek el. Ilymódon könnyebben elképzelhetővé válik a leendő hipersíkmetszet.

$$P_1 = A_1 + \alpha \cdot (W - A_1) \quad P_2 = A_2 + \beta \cdot (W - A_2) \quad P_3 = A_3 + \gamma \cdot (W - A_3) \quad P_4 = A_4 + \delta \cdot (W - A_4) \quad (5)$$

A hipersík kanonikus egyenlete: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \cdot w + E = 0$

Az (5) ben szereplő pontokat a (6) egyenletbe helyettesítve és az (5) és (6) egyenletekből álló rendszert megoldva megkapjuk a hipersíkmetszetet amit paraméters formában így írhatunk:

$$H = [p, r, t, \varepsilon \cdot p + \mu \cdot r + \sigma \cdot t + c] \quad (7)$$

A kúp metszését úgy végezzük, hogy mindegyik alkotót a hipersíkkal metszük és megoldjuk az alábbi egyenletrendszer: $G_{i,j,1} = H_1 \quad G_{i,j,2} = H_2 \quad G_{i,j,3} = H_3 \quad G_{i,j,4} = H_4 \quad j = \overline{1..3}$ (8)

Következik a H hipersíkban fekvő felület egyenlete: $E_i = [[x_k, y_k, z_k, w_k], [x_j, y_j, z_j, w_j], [x_l, y_l, z_l, w_l]]$ (9)

Az eredmény szemléltetése céljából szükséges a H hipersíkot az Oxyz hipersíkba transzformálni.

A hipersíkot tartalmazó tér egy B bázisa: $v_1 = [1, 0, 0, \varepsilon] \quad v_2 = [0, 1, 0, \mu] \quad v_3 = [0, 0, 1, \sigma]$ (10)

Schmidt féle módszerrel ortogonalizálva B' ortonormált bázist kapjuk $B'(u_1, u_2, u_3)$ (11)

Ha ezt kiegészítjük a bázisvektorok vektori szorzatával: $u_4 = u_1 \times u_2 \times u_3$ (12)

A négydimenziós tér ortonormált bázisát kapjuk: $u_i(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) \quad i = \overline{1,4}$ (13)

A B bázisból a B' be való áttérési mátrix a következő: $M = [x_{i,j}] \quad i, j = \overline{1..4}$ (14)

A koordinátarendszer transzformáció a következő formulával történik: $R_i = M^t \cdot E_i - O'$ (15)

Az így kapott adatokat a GDL nyelvezet (Geometric Description Language) segítségével megjeleníthetjük. A végeredmény egy háromdimenziós épület, ami megőrzi az eredeti arányrendszer projektív tulajdonságait, ugyanakkor formailag különbözik tőle. $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Az 5. ábra a Parthenon épületének egy új variánsát szemlélteti összehasonlítva az eredeti Athénban található

4.ábra Az athéni Parthenon

5.ábra "II. Parthenon "

Irodalom

- [1] COXETER H.S.M: *Bevezetés a geometriába*, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1973
- [2] VRÂNCEANU G.: *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*, Editura de Stat Didactică și Pedagogică, București, 1961.
- [3] GUY PILATE: *Mathematiques les lois de l'harmonie*, Edition 1996-97, Bruxelles
- [4] GUY PILATE: *Mathematiques complements*, Edition 1997-98, Bruxelles

Orbán György , hallgató

Kolozsvári Műszaki Egyetem - Építészeti Kar

Cím(egyetem): 400020, Románia, Kolozsvár (Cluj-Napoca), Str. Constantin Daicoviciu nr 15

Telefon / Fax: +40-(0)264-520261

E-mail: orban.gyorgy@gmail.com