XI. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2006. március 24-25.

A PÉTERVÁR-I CSAVAR TAGJAI POZÍCIÓJÁNAK MEGHATÁROZÁSA KÉNYSZEREGYENLETEK SEGÍTSÉGÉVEL

Gergely Attila-Levente

Abstract

This paper briefly presents a method with help to calculate a mechanism movement equation. A mechanism movement equation was hard to determine with the traditional methods, in this problem helps us this new method, the constraint equation's method. The solutions of the system, which contains the constraint equations, will be the coordinate of each part of the mechanism and the Euler-angle of these parts.

Összefoglaló

Egy mechanizmus kinematikai vizsgálatához szükségünk van a mechanizmus tagjainak mozgását leíró mozgásegyenletekre. Ezeket a mozgásegyenletek nehézkesen lehet meghatározni a hagyományos módszerekkel. E problémára adnak megoldást a kinematikai párokra felírt kényszer egyenletek. A kényszer egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldásaként az egyes tagok súlypontjainak koordinátáit és a tehetetlenségi koordináta rendszerek Euler-szögeit kapjuk a vonatkoztatási rendszerhez képest.

A kényszer egyenletek elméletének rövid áttekintése

Bármely mechanizmus kinematikai párokból épül fel, melyek csuklók segítségével vannak egymáshoz csatolva. Egy térbeli tagnak szabad állapotban hat szabadságfoka van, melyből három lineáris egy koordináta rendszer tengelyei mentén, és három forgó a tengelyek körül. A csukló, típusától függően, egy bizonyos számú mozgást kizár a fentiek közül, a kizárt mozgások száma megegyezik a csuklóra felírható kényszer egyenletek számával.

Feltételezünk két tagot, melyek egy csuklóval vannak összekötve.

A tagokhoz rögzítünk egy-egy képzeletbeli (Δ_i, Δ_j) egyenest, melyek mentén vagy körül történik a relatív, lineáris vagy forgó mozgás a két tag között. Ezen egyenesek egybeeshetnek vagy merőlegesek lehetnek egymásra a csuklótól függően. A tagokon felvesszük a központi tehetetlenségi koordináta rendszert, melyek Euler-szögei Ψ_i, θ_i, Φ_i és Ψ_j, θ_j, Φ_j a viszonyítási rendszerhez képest. Mindkét taghoz hozzárendelünk egy-egy segédrendszert $O_i^*, X_i^*, Y_i^*, Z_i^*$ és $O_j^*, X_j^*, Y_j^*, Z_j^*$, amelyek a darabok geometriai rendszereinek

felenek meg, és melyek X vagy Z tengelye a Δ egyenesen van. A központi tehetetlenségi koordináta rendszerek és a geometriai (segéd-) rendszerek egymáshoz képest nem mozognak el.

1. ábra. Két tag csukloval való összekötésének sémája

Az (1. ábra)-ra tekintve felírható a következő vektoriális egyenlet:

$$\mathbf{R}_{Gi} + \mathbf{R}_{ij} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{ji} - \mathbf{R}_{Gj} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Az (1) vektoregyenlet matrixegyenlete:

$$\begin{bmatrix} x_{Gi} \\ y_{Gi} \\ z_{Gi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \beta_{i1} & \gamma_{i1} \\ \alpha_{i2} & \beta_{i2} & \gamma_{i2} \\ \alpha_{i3} & \beta_{i3} & \gamma_{i3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11i} & b_{12i} & b_{13i} \\ b_{21i} & b_{22i} & b_{23i} \\ b_{31i} & b_{32i} & b_{33i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{j1} & \beta_{j1} & \gamma_{j1} \\ \alpha_{j2} & \beta_{j2} & \gamma_{j2} \\ \alpha_{j3} & \beta_{j3} & \gamma_{j3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{Gj} \\ y_{Gj} \\ z_{Gj} \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Az irányítványok felírása az Euler-szögek függvényében:

$$\alpha_{1i} = \cos \Psi_i \cos \Phi_i - \sin \Psi_i \cos \theta_i \sin \Phi_i$$

$$\alpha_{2i} = \sin \Psi_i \cos \Phi_i + \cos \Psi_i \cos \theta_i \sin \Phi_i$$

$$\alpha_{3i} = \sin \theta_i \sin \Phi_i$$

$$\beta_{1i} = -\cos \Psi_i \sin \Phi_i - \sin \Psi_i \cos \theta_i \cos \Phi_i$$

$$\beta_{2i} = -\sin \Psi_i \sin \Phi_i + \cos \Psi_i \cos \theta_i \cos \Phi_i$$

$$\beta_{3i} = \sin\theta_i \cos\Phi_i$$

$$\gamma_{1i} = \sin\Psi_i \sin\theta_i$$

$$\gamma_{2i} = -\cos\Psi_i \sin\theta_i$$

$$\gamma_{3i} = \cos\theta_i$$

(3)

A kényszeregyenletek felírása a Pétervár-i csavar tagjaira

3. ábra. A Pétervár-i csavar

Miután felrajzoltuk a sémát nagy figyelemmel kell megválasztani a viszonyítási koordináta rendszert, ugyanis a mechanizmus tagjai csak X vagy Z tengely körül szabad forgó mozgást végezzenek. Ezután felvesszük a súlypontokat a darab geometriai koordináta rendszerben.

A vektorok egy zárt kontúrt kell alkossanak. Ügyelnünk kell arra, hogy a egyes darabok tevezésénél használt geometriai koordináta rendszereknek (melyeket a (4. ábra)-n a csillag (segéd-) rendszerek jelölnek) az origója az összeszerelés során egybe essen a megfelelő csuklók esetén.

Miután az ábrával megvagyunk következhet a kényszeregyenletek felírása az egyes csuklókra.

Az 1., 2. tagokat egy ötöd osztályú csukló köt össze, öt egyenletünk lesz.

Felírható a következő vektoregyenlet:

$$\mathbf{R}_{G1} + \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{G2} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Ezt az egyenletet matrixalakban (fix rendszerben van felírva) felírva, majd behelyettesítve az iránykoszinuszok kifejezését a tagra felírható kényszeregyenletekhez jutunk.

$$\begin{aligned} & x_{G1} + x_{12}(\cos\Phi_1 \cos\Psi_1 - \sin\Phi_1 \sin\Psi_1 \cos\theta_1) - y_{12}(\sin\Phi_1 \cos\Psi_1 + \cos\Phi_1 \sin\Psi_1 \cos\theta_1) + z_{12} \sin\theta_1 \sin\Psi_1 - \\ & - x_{G2} - x_{21}(\cos\Phi_2 \cos\Psi_2 - \sin\Phi_2 \sin\Psi_2 \cos\theta_2) + y_{21}(\sin\Phi_2 \cos\Psi_2 + \cos\Phi_2 \sin\Psi_2 \cos\theta_2) - z_{21} \sin\theta_2 \sin\Psi_2 = 0 \\ & y_{G1} + x_{12}(\cos\Phi_1 \sin\Psi_1 + \sin\Phi_1 \cos\Psi_1 \cos\theta_1) - y_{12}(\sin\Phi_1 \sin\Psi_1 - \cos\Phi_1 \cos\Psi_1 \cos\theta_1) - z_{12} \sin\theta_1 \cos\Psi_1 - \\ & - y_{G2} - x_{21}(\cos\Phi_2 \sin\Psi_2 + \sin\Phi_2 \cos\Psi_2 \cos\theta_2) + y_{21}(\sin\Phi_2 \sin\Psi_2 - \cos\Phi_2 \cos\Psi_2 \cos\theta_2) + z_{21} \sin\theta_2 \cos\Psi_2 = 0 \\ & z_{G1} + x_{12} \sin\theta_1 \sin\Phi_1 + y_{12} \sin\theta_1 \cos\Phi_1 + z_{12} \cos\theta_1 - z_{G2} - x_{21} \sin\theta_2 \sin\Phi_2 - y_{21} \sin\theta_2 \cos\Phi_2 - z_{21} \cos\theta_2 = 0 \end{aligned}$$

4. ábra. A mechanizmus sémája a helyzetvektorokkal

5. ábra. 1-2 tag sémája

$$b_{111}-b_{112}=0$$

$$b_{211}-b_{212}=0$$

(5)

A 4., 5. egyenletek abból a feltételből kapjuk hogy az egyes tagokhoz tartozó segéd koordináta rendszerek X tengelyei egybe kell essenek.

A 2., 3. tag kapcsolatára szintén felírhatjuk a (4)-es egyenletet, azzal a különbséggel, hogy a kifejezésben szerepelni fog az $\mathbf{A}_1$ vektor.

$$\mathbf{R}_{G2} + \mathbf{R}_{23} + \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_{32} - \mathbf{R}_{G3} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Az $\mathbf{A}_1$ vektor rotációs matrixát, mely a fix rendszerbe forgatja át, a következő keppen lehet felírni:

$$\mathbf{T}_{li}^* = \mathbf{T}_{li} \cdot \mathbf{T}_{ii}^* \quad (7)$$

A $\mathbf{T}_{ii}^*$ matrix a segéd koordinátarendszer és a tehetetlenségi koordináta rendszer közti iránykoszinuszokat tartalmazza. A tervezés folyamán használt program segítségével is meg lehet határozni ezt a matrixot. A $\mathbf{T}_{li}$ matrix tagjai a tehetetlenségi és a viszonyítási koordináta rendszer közti iránykoszinuszok.

$$\begin{bmatrix} b_{112} & b_{122} & b_{132} \\ b_{212} & b_{212} & b_{232} \\ b_{312} & b_{312} & b_{332} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \beta_{21} & \gamma_{21} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} & \gamma_{22} \\ \alpha_{23} & \beta_{23} & \gamma_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_{21}^0 & \cos \beta_{21}^0 & \cos \gamma_{21}^0 \\ \cos \alpha_{22}^0 & \cos \beta_{22}^0 & \cos \gamma_{22}^0 \\ \cos \alpha_{23}^0 & \cos \beta_{23}^0 & \cos \gamma_{23}^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Mivel az $\mathbf{A}_1$ az X tengelyen helyezkedik el csak erre a tengelyre vonatkozó iránytényezőket írjuk fel, ugyanis a többi zéróval egyenlő. A (7)-os összefüggésből következik:

$$\begin{aligned} b_{112} &= \alpha_{21} \cos \alpha_{21}^0 + \beta_{21} \cos \alpha_{22}^0 + \gamma_{21} \cos \alpha_{23}^0 \\ b_{212} &= \alpha_{22} \cos \alpha_{21}^0 + \beta_{22} \cos \alpha_{22}^0 + \gamma_{22} \cos \alpha_{23}^0 \\ b_{312} &= \alpha_{23} \cos \alpha_{21}^0 + \beta_{23} \cos \alpha_{22}^0 + \gamma_{23} \cos \alpha_{23}^0 \end{aligned} \quad (9)$$

Behelyettesítés és a szorzások elvégzése után a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} & x_{G2} + x_{23}(\cos \Phi_2 \cos \Psi_2 - \sin \Phi_2 \sin \Psi_2 \cos \theta_2) - y_{23}(\sin \Phi_2 \cos \Psi_2 + \cos \Phi_2 \sin \Psi_2 \cos \theta_2) + z_{23} \sin \theta_2 \sin \Psi_2 + \\ & + \mathbf{A}_1[(\cos \Psi_2 \cos \Phi_2 - \sin \Psi_2 \cos \theta_2 \sin \Phi_2) \cos \gamma_{21}^0 + (-\cos \Psi_2 \sin \Phi_2 - \sin \Psi_2 \cos \theta_2 \cos \Phi_2) \cos \gamma_{22}^0 + \sin \Psi_2 \sin \theta_2 \cos \gamma_{23}^0] - \\ & - x_{G3} - x_{32}(\cos \Phi_3 \cos \Psi_3 - \sin \Phi_3 \sin \Psi_3 \cos \theta_3) + y_{32}(\sin \Phi_3 \cos \Psi_3 + \cos \Phi_3 \sin \Psi_3 \cos \theta_3) - z_{32} \sin \theta_3 \sin \Psi_3 = 0 \\ & y_{G2} + x_{23}(\cos \Phi_2 \sin \Psi_2 + \sin \Phi_2 \cos \Psi_2 \cos \theta_2) - y_{23}(\sin \Phi_2 \sin \Psi_2 - \cos \Phi_2 \cos \Psi_2 \cos \theta_2) - z_{23} \sin \theta_2 \cos \Psi_2 - \\ & - y_{G3} - x_{32}(\cos \Phi_3 \sin \Psi_3 + \sin \Phi_3 \cos \Psi_3 \cos \theta_3) + y_{32}(\sin \Phi_3 \sin \Psi_3 - \cos \Phi_3 \cos \Psi_3 \cos \theta_3) + z_{32} \sin \theta_3 \cos \Psi_3 = 0 \\ & z_{G2} + x_{23} \sin \theta_2 \sin \Phi_2 + y_{23} \sin \theta_2 \cos \Phi_2 + z_{23} \cos \theta_2 - \\ & - z_{G3} - x_{32} \sin \theta_3 \sin \Phi_3 - y_{32} \sin \theta_3 \cos \Phi_3 - z_{32} \cos \theta_3 = 0 \\ & b_{112} - b_{113} = 0 \\ & b_{212} - b_{213} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

A 2., 3. tagot egy negyed osztályú csukló köti össze, megis 5 egyenletünk van, ez annak tudható be hogy megjelent az $\mathbf{A}_1$ mint ismeretlen. Az utolsó két egyenlet abból a feltételből jön, hogy a segéd rendszerek X tengelyei egymásra tevődnek.

A fenti megfontolások alapján egyszerűen felírhatók a fentmaradt két csuklóra az egyenletek.

A 3–4 tagot összekötő csuklóra az egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} & x_{G3} + x_{34}(\cos \Phi_3 \cos \Psi_3 - \sin \Phi_3 \sin \Psi_3 \cos \theta_3) - y_{34}(\sin \Phi_3 \cos \Psi_3 + \cos \Phi_3 \sin \Psi_3 \cos \theta_3) + z_{34} \sin \theta_3 \sin \Psi_3 - \\ & - x_{G4} - x_{43}(\cos \Phi_4 \cos \Psi_4 - \sin \Phi_4 \sin \Psi_4 \cos \theta_4) + y_{43}(\sin \Phi_4 \cos \Psi_4 + \cos \Phi_4 \sin \Psi_4 \cos \theta_4) - z_{43} \sin \theta_4 \sin \Psi_4 = 0 \\ & y_{G3} + x_{34}(\cos \Phi_3 \sin \Psi_3 + \sin \Phi_3 \cos \Psi_3 \cos \theta_3) - y_{34}(\sin \Phi_3 \sin \Psi_3 - \cos \Phi_3 \cos \Psi_3 \cos \theta_3) - z_{34} \sin \theta_3 \cos \Psi_3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_{G4} - x_{43}(\cos\Phi_4\sin\Psi_4 + \sin\Phi_4\cos\Psi_4\cos\theta_4) + y_{43}(\sin\Phi_4\sin\Psi_4 - \cos\Phi_4\cos\Psi_4\cos\theta_4) + z_{43}\sin\theta_4\cos\Psi_4 = 0 \\
& z_{G3} + x_{34}\sin\theta_3\sin\Phi_3 + y_{34}\sin\theta_3\cos\Phi_3 + z_{34}\cos\theta_3 + a_2(\sin\theta_3\sin\Phi_3\cos\gamma_{31}^0 + \sin\theta_3\cos\Phi_3\cos\gamma_{32}^0 + \cos\theta_3\cos\gamma_{33}^0) - \\
& -z_{G4} - x_{43}\sin\theta_4\sin\Phi_4 - y_{43}\sin\theta_4\cos\Phi_4 - z_{43}\cos\theta_4 = 0 \\
& b_{133} - b_{134} = 0 \\
& b_{233} - b_{234} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Ennél a párnál a segédkoordináta rendszerek Z tengelyek esnek egybe.

A 4–1 párt összekötő csukló egyenletei:

$$\begin{aligned}
& x_{G4} + x_{41}(\cos\Phi_4\cos\Psi_4 - \sin\Phi_4\sin\Psi_4\cos\theta_4) - y_{41}(\sin\Phi_4\cos\Psi_4 + \cos\Phi_4\sin\Psi_4\cos\theta_4) + z_{41}\sin\theta_4\sin\Psi_4 - \\
& -x_{G1} - x_{14}(\cos\Phi_1\cos\Psi_1 - \sin\Phi_1\sin\Psi_1\sin\theta_1) + y_{14}(\sin\Phi_1\cos\Psi_1 + \cos\Phi_1\sin\Psi_1\cos\theta_1) - z_{14}\sin\theta_1\sin\Psi_1 = 0 \\
& y_{G4} + x_{41}(\cos\Phi_4\sin\Psi_4 + \sin\Phi_4\cos\Psi_4\cos\theta_4) - y_{41}(\sin\Phi_4\sin\Psi_4 - \cos\Phi_4\cos\Psi_4\cos\theta_4) - z_{41}\sin\theta_4\cos\Psi_4 - \\
& -y_{G1} - x_{14}(\cos\Phi_1\sin\Psi_1 + \sin\Phi_1\cos\Psi_1\cos\theta_1) + y_{14}(\sin\Phi_1\sin\Psi_1 - \cos\Phi_1\cos\Psi_1\cos\theta_1) + z_{14}\sin\theta_1\cos\Psi_1 = 0 \\
& z_{G4} + x_{41}\sin\theta_4\sin\Phi_4 + y_{41}\sin\theta_4\cos\Phi_4 + z_{41}\cos\theta_4 - \\
& -z_{G1} - x_{14}\sin\theta_1\sin\Phi_1 - y_{14}\sin\theta_1\cos\Phi_1 - z_{14}\cos\theta_1 = 0 \\
& b_{134} - b_{131} = 0 \\
& b_{234} - b_{231} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Ennél a párnál szintén a Z tengelyek esnek egybe.

A (5), (10), (11), (12) egyenletekből egy egyenletrendszert kapunk, melyet egy számítógépes program segítségével oldható meg. Az egyenletrendszer megoldása a mozgó tagok Euler-szögei és súlypontjainak koordinátái lesznek.

A program bemenő adatai: minden tagnak külön-külön meg kell határozni a tehetetlenségi főtengelyek és a geometriai rendszer tengelyei közt létező iránykoszinuszokat. A súlypont és a geometriai rendszer origójának viszonyát. Az ismeretleneknek kell egy kezdeti értéket adni, melyet a program magától korrigál.

Irodalom:

- [1] PAPP István: 2004 Kényszeregyenletek egy síkbanfekvő négyoldalú mechanizmus tagja helyzeteinek meghatározására. In: Csibi Vencel-József, Dr. (szerk.): *XII. Nemzetközi Gépész Találkozó – Csíksomlyó, 2004. április 22–25.* Kolozsvár, Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, 228–233.
- [2] PAPP István: Mechanizmusok. Egyetemi Jegyzet

Gergely Attila-Levente (hallgató)

Munkahely: Sapientia-EMTE, Műszaki- és Humántudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék

Cím: 535600, Románia, Székelyudvarhely, Béke utca 6/11

tel: 0743-577339

E-mail: gergelya1984@yahoo.com