XI. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2006. március 24-25.

FELROBBANÁS DINAMIKAI RENDSZEREKBEN

Csikja Rudolf

Abstract

A less known procedure is presented to investigate blow up in polynomial ordinary differential equations. First, solutions to linear and nonlinear — more precisely: polynomial — equations are compared with respect to their domain. This comparison gives us important practical implications. Then a simple example illustrates the notion of blow up, next a general formulation of the problem is given. The next section gives a theoretical result providing a necessary and sufficient condition of blow up. Our own results follow: a new proof of a known result based upon the methods presented, and the investigation of a concrete system using our *Mathematica* program.

Összefoglalás

Az alábbiakban egy kevésbé ismert eljárást ismertetünk a polinomiális közönséges differenciálegyenletek megoldásai felrobbanásának vizsgálatára. A bevezetésben összehasonlítjuk a lineáris és a nemlineáris — pontosabban polinomiális — differenciálegyenleteket, illetve azok megoldásait az értelmezési tartományuk szempontjából, amiből fontos gyakorlati következtetések vonhatóak le. Majd egy egyszerű bevezető példával illusztráljuk a felrobbanás fogalmát, és a következő fejezetben megadjuk az általános megfogalmazását ezen problémának. Az ezt követő fejezetben pedig egy olyan elméleti eredményt tárgyalunk, amely szükséges és elégséges feltételt ad egy polinomiális rendszer megoldásainak felrobbanásához. Eztán pedig a saját eredményeimet mutatom be, egy jól ismert tétel újabb bizonyítását, ami az előbbieken ismertetett módszeren alapul, és egy rendszer konkrét vizsgálatát, aminek számításait a sajátkezüleg *Mathematica*-ban írt programmal végeztem el.

1. Bevezetés

Jól ismert tény, hogy egy lineáris, autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszer teljes megoldása ugyanazon az intervallumon van értelmezve, mint maguk az egyenlet jobb oldalát definiáló együtthatófüggvények. Ha például adott az $\dot{x}(t) = Ax(t)$ rendszer az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, akkor a jobb oldal értelmezési tartománya nyilván $t \in \mathbb{R}$; a gyakorlatban általában megfelel a $t \in R_0^+$ feltétel is, és ilyenkor nagyon jól használható a Laplace-transzformáció (tranziens jelenségek). A megoldás az $x(t) = x_0 e^{At}$ alakban áll elő, aminek láthatóan szintén $t \in R$ az értelmezési tartománya. Ez egy nagyon jól kidolgozott elmélet, a stabilitást és egyéb tulajdonságokat is belevéve igen sokat tudunk mondani általánosságban. Azonban, ha a jobb oldal egy

$$P(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad \forall a_{\alpha} \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \quad (1)$$

polinom, ahol $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, akkor konkrét esetekben nagyságrendekkel nehezebb a teljes megoldás értelmezési tartományát meghatározni, az általános esetre pedig ez hatványozottan igaz. Az pedig,

hogy egy szimbolikus általános megoldást meghatározzunk, az esetek többségében szinte reménytelen. Hogy hogyan is alakulhat egy ilyen polinomiális közönséges differenciálegyenlet megoldásának értelmezési tartománya, arra nézzünk egy egyszerű példát. Legyen

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}x^3(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

akkor a jobb oldal egy alkalmas értelmezési tartománya $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Az nyilvánvaló, hogy az $t \mapsto x(t) := 0, t \in \mathbb{R}$ függvény a differenciálegyenletnek megoldása. A fenti kezdeti érték esetén viszont a megoldás a

$$t \in \left(-\infty, \frac{1}{x_0^2}\right), \quad x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2}{1 - x_0^2 t}} \quad (3)$$

függvény, aminek az értelmezési tartománya nem egyezik meg az egész $\mathbb{R}$ halmazzal, hanem felülről korlátos. Az nagyon jól látszik, hogy a kezdeti értéktől függ ez a korlát. Vagy egy gyakorlatibb nézőpontból szemlélve, azt is szokták mondani, hogy a megoldás **felrobban** — a jelenség neve az angol szakirodalomban **blow up**. A felrobbanás is teljesen jogos kifejezés, hiszen gondoljunk bele, hogy mi történik akkor, ha ez a megoldás például egy kémiai reakcióban résztvevő anyag koncentrációját írja le. Most fogalmazzuk meg a felrobbanás fogalmát általánosan.

2. Az általános feladat megfogalmazása

Tekintsük a következő rendszert: $\dot{x} = P \circ x$, ahol $x \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ függvény, és $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olyan polinom, amely valós együtthatókkal rendelkezik. Vagy lokális alakban: $\dot{x}(t) = P(x(t))$. Ennek a rendszernek az általános megoldása n számú tetszőleges konstans tartalmaz $t \mapsto x(t; C_1, C_2, \dots, C_n)$. Legyen a kezdeti feltétel $x(0) := x_0$, ekkor a megoldás felírható a $t \mapsto x(t; x_0)$ alakban. A megoldás véges időn belül felrobban, ha létezik olyan $t_e \in \mathbb{R}^+$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy bármilyen $M \in \mathbb{R}$ -re van olyan $\varepsilon > 0$, hogy: $|t_e - t| < \varepsilon \rightarrow \|x(t; x_0)\| > M$, ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma.

3. A Ψ -sorba fejtés módszere

Ez a módszer szükséges és elégséges feltételt ad bármilyen polinomiális KDE megoldásának felrobbanására.

$$x(t) = \Psi(\alpha, p, t) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \tau^{\frac{j}{q}} \right), \quad (7)$$

ahol $\tau = (t - t_e)$, $p \in \mathbb{Q}^n$, $q \in \mathbb{N}$ és a_j pedig $N_j(< j)$ fokú polinomja a $\log(t - t_e)$ kifejezésnek. Az $\alpha \tau^p$ kifejezés olyan vektort jelent, amelynek i -edik komponense $\alpha_i \tau^{p_i}$. Ezt a sort Ψ -sornak hívják.

Tétel: Vegyük az $\dot{x} = P \circ x$ polinomiális — nem lineáris — rendszert, ahol $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, továbbá tegyük fel, hogy a rendszer általános megoldása konvergens Ψ -sorba fejthető. Ekkor a következő két állítás ekvivalens egymással:

- Létezik a kezdeti feltételeknek olyan $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaza, amelyre $\forall x_0 \in X_0$ esetén van olyan $t_e \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lim_{t \rightarrow t_e} \|x(t, x_0)\| = +\infty$;
- Létezik egy $\Psi(\alpha, p, t; c)$ általános megoldás.

Most lássuk, hogy ezt a sorfejtést, hogyan is kell elvégezni, illetve milyen feltételek mellett fog felrobbani a differenciálegyenlet megoldása. Először is az P vektortér összes lehetséges felbontását vesszük úgy, hogy a domináns tag megoldása legyen az $\dot{x} = \hat{P} \circ x$ egyenletnek az $x = \alpha \tau^p$ helyettesítéssel. Továbbá definiáljuk az $R := -\hat{P}'(\alpha) - \text{Diag}(p)$ mátrixot, ahol $\hat{P}'(\alpha)$ a Jacobi-mátrix. Ennek a mátrixnak a sajátértékeit nevezzük rezonanciáknak ($\text{Spec}(R)$). Továbbá a vizsgálódás miatt definiáljunk egy G halmazt úgy, hogy $G := \{(\alpha, p) | \text{Spec}(R) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1} \cup \{-1\}\}$, és (α, p) pár olyan, hogy kielégíti az $\dot{x} = \hat{P} \circ x$ egyenletet. A vizsgálatot a következő két állítás alapján lehet elvégezni:

- a felrobbanás nem következik be semmilyen kezdeti feltételre, ha $\alpha \notin \mathbb{R}^n$ $\forall (\alpha, p) \in G$;
- legfeljebb olyan kezdeti feltételek mellett következhet be robbanás, amely kezdeti feltételek a fázistérnek éppen abban az ortánsában vannak, amelyekben teljesül, hogy $\exists x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$ $\text{sign}(x_0) = \text{sign}(\alpha)$, illetve amelyekre ez nem teljesül, azok szintén nem robbanak fel.

4. Alkalmazások

4.1. Lineáris rendszer

Jól ismert állítást mondunk most ki és bizonyítunk be az itteni módszerekkel. Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ elsőrendű lineáris rendszert. Ez a rendszer semmilyen valós kezdeti értékre nem robban fel.

Bizonyítás: végezzük el az $x = \alpha \tau^p$ helyettesítést: $p * \alpha \tau^{p-1} = A \alpha \tau^p$, ahol a $*$ művelet a vektorok elemenkénti szorzását jelenti. Innen kapjuk a következő egyenleteket: $p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ és $p = p-1$, amiből az utóbbi ellentmondás, így nincs megfelelő (α, p) pár, tehát a megoldások semmilyen kezdeti értékre nem robbanak fel. ■

4.2. Van der Pol-oszcillátor

Az oszcillátor egyenlete: $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$, amit átírva egyenletrendszerre kiderül, hogy egyetlen egy (α, p) pár van, amelyik kielégíti a már említett egyenletet, viszont ezekhez a rezonanciák nem megfelelőek, így nincs olyan kezdeti érték, amelyre a megoldás felrobbana, ahogy azt eddig is tudtuk. Viszont, ha periodikusan perturbáljuk az egyenletünket, azaz $\ddot{x}(t) - \mu(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = a \cos(t)$, ez az egyenlet szemmel láthatóan nem autonóm és nem is polinomiális, ám ezen lehet „segíteni” az átviteli-elv alkalmazásával és a $\cos(t)$ sorbafejtésével,

akkor: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x + a\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)$, $\dot{z} = c$. Ehhez a rendszerhez két megfelelő (α, p)

pár van, amihez a rezonanciák is megfelelően alakulnak, így tovább vizsgálódhatunk. Úgy tűnik, hogy a perturbáció, megváltoztatta a rendszer felrobbanásra való hajlamát, nézzük hogyan. Ha $\mu \in \mathbb{R}^-$, akkor semmilyen kezdeti értékre nem robban fel a megoldás. Ha $\mu \in \mathbb{R}^+$, akkor viszont a felrobbanás olyan kezdeti értékekre bekövetkezhet, ahol a kezdeti értékek előjele sorra megegyezik az α vektor komponenseinek előjelével, ami a c előjelétől függően lehet $\{\pm, \pm, +\}$ vagy $\{\pm, \pm, -\}$.

6. Következtetések / Összefoglaló

A dolgozat legfőbb célja az volt, hogy bemutasson egy fontos módszert a polinomiális közönséges differenciálegyenletek megoldásai felrobbanásának vizsgálatára. Egyik jövőbeni feladat a *Mathematicában* írt program továbbfejlesztése, vagy akár egy külön csomag megírása erre a problémakörre. A dolgozatban nem tértünk ki a divergencia negativitására és alkalmas Ljapunov függvények létezéséből levonható következtetésekre.

Irodalom

- [1] Goriely, A., Hyde, C.: Necessary and sufficient conditions for finite time singularities in ordinary differential equations, *Journal of Differential Equations* **161**, 2000, 422—448.

Csikja Rudolf, hallgató.

Munkahely: Budapesti Műszaki Egyetem, Természettudományi Kar, Analízis Tanszék

Cím: H-1117, Magyarország, Budapest, Irinyi J. u. 42.

Telefon: +36-70-5075772

E-mail: csikja@math.bme.hu