XI. FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 2006. március 24-25.

A LAGRANGE – FÉLE MOZGÁSEGYENLETEK AUTOMATIKUS GENERÁLÁSA ÉS EGY ALKALMAZÁSI PÉLDA

Bauer Péter

Summary

In the engineering practice, a wide range of applications contain systems constructed from mass points, springs and dampers. Oscillations in vehicle suspension systems, aircraft wings and vehicle drivetrains can be analyzed using these model types. The model equations can be generated in two different ways. The first is the *synthetic method*, which generates the equations according to the force equilibrium between model components, with the use of Newton's second law. The drawback of this method is the need for considering the forces with their correct signs. Sign mistakes results in incorrect equations. The second, *analytic method* uses the Lagrange motion equations. In this case, we consider the energy content of system components, and generate the equations with their differentiation. Because the energy terms contain the squares of displacements, sign mistakes are almost impossible. So we can easily generate the equations, even for complicated systems. On the other hand, we can automatically generate the equations, for a suitably structured system. The first part of this article describes a computer program written in MATLAB, which can be used for this purposes. Then the equations of a quarter-car model, with active suspension are generated. Control engineers can spare time with the faster model generation provided by this MATLAB program. Finally, the design of an active suspension system is introduced using the generated quarter-car model.

Összefoglalás

A mérnöki gyakorlatban számtalan helyen használnak tömegpontokból, rugókból és csillapítókból álló mechanikai rendszermodelleket. Ilyen modellek alkalmazásával többek között vizsgálhatók jármű kerékfelfüggesztések, repülőgép szárnyak, és hajtásrendszerek lengései is. A modelleket leíró egyenletek generálása kétféle módon is megoldható [1]. Egyik a *szintetikus módszer*, mely Newton második axiómája alapján, a modell elemei közti erőegyensúly figyelembe vételével állítja elő az egyenleteket. Ennek hátránya, hogy az erőket előjelhelyesen kell figyelembe venni, és az előjelhibák hibás egyenleteket eredményeznek. A másik az *analitikus módszer*, mely a Lagrange – féle másodfajú egyenletek alkalmazását jelenti. Ekkor a rendszerelemek energia tartalmából kiindulva, differenciálással jutunk el ez erőegyensúlyt kifejező egyenletekig. Mivel az elemek energia tartalmát leíró tagokban az elmozdulások négyzete szerepel, ezzel a módszerrel jóval nehezebb előjel hibát vétetni. Így összetettebb rendszerekre is viszonylag egyszerű az egyenletek generálása. Ráadásul - megfelelően struktúrált rendszer esetében - lehetséges az egyenletrendszer számítógépes előállítás. A dolgozat első része egy erre készült MATLAB programot, és felhasználását negyed járműmodell mozgásegyenleteinek generálására mutatja be. Az egyenletek automatikus előállítása a szabályozástechnikában dolgozó mérnökök munkáját is megkönnyíti, mert így kevesebb időt vesz igénybe a modellalkotás, és több idő jut a rendszer szabályozásának tervezésére. A dolgozat második része, a negyed járműmodell alapján aktív kerékfelfüggesztés tervezését ismerteti.

A Lagrange – féle másodfajú egyenletek felhasznált alakja

Tömegpontokat, rugókat és csillapítókat tartalmazó rendszerek mozgásegyenleteinek analitikus előállítására alkalmasak a Lagrange – féle másodfajú egyenletek. Ezekkel a rendszer elemek energia tartalma alapján, differenciálással állíthatók elő a dinamikus rendszer viselkedését leíró differenciálegyenletek. A Lagrange egyenletek általános alakja:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \equiv Q_i \quad \forall t \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Az egyenletekben szereplő tagok:

1. $\dot{q}_i, q_i$: általánosított sebességek és koordináták, melyekkel a rendszer mozgása leírható. Egy n szabadságfokú rendszer mozgása n darab általánosított koordinátával (és sebességgel) jellemezhető.
2. E : a rendszer tagjainak összes mozgási energiája.
3. U : a rendszer tagjainak összes potenciális energiája, beleértve a rugók által tárolt energiát is.
4. D : disszipációs potenciál, mely a csillapítók által tárolt sebességtől függő energiatartalmat szimbolizálja.
5. Q_i : adott általánosított koordináta helyén ható, általánosított erő.

Így az (1) egyenlet felhasználásával, egy n szabadságfokú rendszerre, n darab másodrendű lineáris differenciálegyenlet állítható elő. Az egyenletek felhasználásával a rendszer vizsgálata (szimulációja) már elvégezhető.

A Lagrange – féle mozgásegyenletek automatikus generálása

Ha a rendszer felépítése megfelelően struktúrált, akkor lehetséges az (1) egyenlet alapján, a differenciálegyenletek automatikus (szisztematikus) generálása. Erre készült egy MATLAB program. A program működésének rövid ismertetését az ábra alapján tehetjük meg. Elsőként szükséges az általános koordináták számának (a programban y_i) megadása. Ezek után lehetőség van két koordinátának speciális értelmet adni. Az egyik lehet a föld pont, amelyben az elmozdulás zérus, a másik a bemenet (u),

amit mi adunk a rendszerre. Az általános koordináták kitűzik a rendszer struktúráját (szintjeit), melyre építve a többi rendszerkomponens megadható. Egy adott általános koordináta szintjén eldönthető, hogy legyen-e tömegpont, vagy sem, valamint, hogy legyen-e felfelé, vagy lefelé ható általánosított erő. Ezután már csak az általánosított koordináták között, párhuzamosan elhelyezkedő rugók és csillapítók számát kell megadni (a program lehetőséget ad több rugó és csillapító párhuzamos kapcsolására). Láthatóan a negyed járműmodell esetében, három általános koordináta írja le a rendszer viselkedését, melyek közül az első választandó bemenetnek (ez az útgerjesztés). Az irodalom szerint [2], a gumiabroncsnak elég csak a rugalmasságát (c_{11}) figyelembe venni. A kerék (m_2) és a negyed kocsiszekrény (m_3) között azonban, már a rugó és lengéscsillapító hatása is lényeges. A Q_2 és Q_3 általánosított erőket a felfüggesztés aktív eleme generálja, és $|Q_2|=|Q_3|$. A program által a fenti rendszerre generált egyenletek kétféle alakja:

LHS form equations:

$$eq_1: m_2 * d^2 y_2 + (c_11) * (y_2 - u) + (k_21) * (dy_2 - dy_3) + (c_21) * (y_2 - y_3) = Q_2$$

$$eq_2: m_3 * d^2 y_3 + (k_21) * (dy_3 - dy_2) + (c_21) * (y_3 - y_2) = -Q_3$$

Decomposed equations:

$$eq_1: m_2 * d^2 y_2 + (c_11) * y_2 + (k_21) * dy_2 + (c_21) * y_2 = (c_11) * u + (k_21) * dy_3 + (c_21) * y_3 + Q_2$$

$$eq_2: m_3 * d^2 y_3 + (k_21) * dy_3 + (c_21) * y_3 = (k_21) * dy_2 + (c_21) * y_2 - Q_3$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy a program nyelve angol, a szélesebb körű felhasználhatóság érdekében.

Aktív felfüggesztés tervezése a generált egyenletek felhasználásával

Az előállított egyenletekkel, a negyed járműmodell szimulációja, és az aktív felfüggesztés tervezése elvégezhető. A szimulációban érdemes figyelembe venni, a kerékelpattanás hatását is. Ez akkor lép fel, ha a kerék és az út között a normálerő értéke zérussá válik [3]. Ha ezen a ponton túl, a kerék még mindig távolodik az úttól, akkor történik meg az elpattanás, ugyanis negatív normálerő nem léphet fel (a gumiabroncs nincs az úthoz „ragasztva”).

A negyed járműmodell szimulációját érdemes többféle útgerjesztéssel is elvégezni. Első esetben egy 3 méter hosszúságú, szinusz félhullám jelalakú, 5,5 cm magas buckán való áthaladást vizsgálhatunk, második esetben pedig adott frekvenciájú 5,5 cm amplitúdójú szinuszos gerjesztést. Kontroller nélkül első esetben, 20,45 m/sec sebesség felett pattant el a kerék a buckán, második esetben 30 rad/sec frekvencia felett jelent meg az elpattanás. A szabályozó tervezés célja, a kocsiszekrény elmozdulásának +/- 1cm – es határokon belül tartása volt, multiplikatív rendszer bizonytalanságok és szenzoraj figyelembe vétele mellett. A tervezés μ szintézis alkalmazásával elvégezhető [4].

A kapott eredmények azt mutatják, hogy a kitérés csökkentése sikeres volt, az üzemi tartomány nagy részén 1 cm alatt marad (lásd ábra (szinuszos gerjesztés)). A kerékelpattanás fellépését az aktív felfüggesztés jelentősen nem befolyásolja, viszont a nagyságát növeli.

Az ábrával kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy a kontroller nélküli esetben, a jelentős kiemelés a járműszekrény sajátlengési frekvenciáján lép fel (7.379 rad/sec),

a második kiemelés pedig a kerék sajátfrekvenciájának (69.92 rad/sec) hatása. Láthatóan az alacsonyabb frekvencia tartományra tervezett szabályozó, képes tökéletesen elnyomni az első kiemelést, a másodiknak azonban már „csak” a jelentős csökkentésére alkalmas.

Összegzésképpen elmondható, hogy a Lagrange – féle másodfajú egyenletek felhasználásával, több szabadságfokú lengőrendszerek mozgásegyenletei akár automatikusan is generálhatók és a kapott egyenletek jól használhatók például szabályozók tervezésére.

Irodalomjegyzék

- [1] Győrik Albert: A mozgásegyenletek generálása, G2.Segédlet a Járműdinamika tárgyhoz, Budapest, 1998.
- [2] Gáspár P., Szászi I., Bokor J.: Design of LPV Controllers for Active Vehicle Suspensions, Periodica Polytechnica, Budapest, 2004. Vol. 32(1/2), pp. 113-122.
- [3] Császár László: Diagnosztikai célú járműdinamikai szimuláció, TDK dolgozat, Budapest, 2003. október 27.
- [4] Gary J. Balas, Doyle John C., Glover Keith, Packard Andy, Smith Roy: Mu Analysis and Synthesis Toolbox for Use with MATLAB, User's Guide, Version 3, The Math Works, June, 2001.
- [5] Bokor József, Szászi István: Optimal H_{∞} Control Design, Lecture notes to Modern Control Theory II. Department of Control and Transport Automation, Budapest, May 27, 2003.

Név: **Bauer Péter**

Tudományos fokozat: doktorandusz

Munkahely: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedésautomatikai Tanszék

Cím: 1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 2. Z ép. V. em. 515

E – mail: bauer.peter@mail.bme.hu

A szerző köszönetet mond az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok támogatásáért (OTKA N:T043111). A munka egyes részeit a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal „Elektronikus Jármű és Járműirányítási Tudásközpont” programja finanszírozta (OMFB – 01418/2004)