FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA

Kolozsvár, 1997, március 21-23

EGY KÖZELÍTŐ MÓDSZER AZ ORTOTRÓP ANYAGÚ RUDAK CSAVARÁSI FELADATÁNAK MEGOLDÁSÁRA

Gulyás Lajos

Összefoglaló :

E tanulmány tárgya homogén, anizotróp, lineárisan rugalmas anyagú prizmatikus rudak Saint Venant féle csavarási feladatának egy numerikus megoldási módszere. A tanulmány eredményei tömör keresztmetszetű prizmatikus rudakra vonatkoznak, noha a levezetett összefüggések némi módosítással üreges keresztmetszetű prizmatikus rudakra is kiterjeszthetők.

A Perem approximáció

Az előadásban ismertetésre kerülő perem approximációs módszer elméleti háttérét döntően a Trefftz eljárás adja. A perem approximációs eljárások igen hatékonyan használhatók lineáris peremérték feladatok numerikus megoldására. Több előnnyel rendelkeznek az úgynevezett tartományi approximációs eljárásokkal szemben. A perem approximációs eljárásokban a közelítés elsősorban a vizsgált tartomány peremére lokalizálódik. A probléma mezőegyenletei a vizsgált tartomány minden belső pontjában kielégítettek szemben az igen elterjedt tartományi approximációs eljárásokkal. További előny, hogy a diszkretizálásnál csak a peremgörbét kell felosztani, nem szükséges a tartományra illeszkedő háló generálása, valamint az ismeretlen mennyiségek csak a peremgörbéhez kötődnek. A perem módszerek alkalmazásában kitüntetett szerepe van az úgynevezett alapmegoldásnak. Az alapmegoldás az összes mezőegyenletet kielégíti eltekintve a forrásponttól.

Alapvető feltevés, hogy a rúd keresztmetszet síkja egybeesik a rugalmasság egy szimmetria síkjával. A palást feszültségmentességét biztosító statikai peremfeltételt csak a peremgörbe egy diszkrét pontthalmazán teljesül. A közelítő megoldást a vetemedési függvény differenciálegyenletében szereplő páros rendű differenciáloperátor különböző pontokhoz tartozó alapmegoldásai lineáris kombinációjaként építetik fel.

Az ábra egy anizotróp anyagú prizmatikus rúd keresztmetszetét szemlélteti, ahol (1), (2) az anizotrópia főirányait jelöli ki,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= G_1 \cos^2(\alpha) + G_2 \sin^2(\alpha) \\
 a_2 &= (G_2 - G_1) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\
 a_3 &= G_1 \sin^2(\alpha) + G_2 \cos^2(\alpha)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Az a_1 , a_2 , a_3 anyagállandók és az anizotrópia főirányaihoz tartozó G_1 , G_2 csúsztató rugalmassági modulusok kapcsolatát a fenti egyenlet mutatja.

A szóban forgó differenciálegyenlet és statikai peremfeltétel, amely a keresztmetszet öblösödési függvényét határozza meg az alábbi :

$$a_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in A \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 (a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}) n_x + (a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y}) n_y &= \quad (x, y) \in \partial A \\
 = (a_1 y - a_2 x) n_x + (a_2 y - a_3 x) n_y &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

ahol $\varphi(x, y)$ az úgynevezett öblösödési függvény.

(2. ábra) : a csavart prizmatikus rúd keresztmetszete.

Az alkalmazott jelölések a következők:

ϑ : fajlagos elcsavarodás, M : csavarónyomaték, ∂A : peremgörbe, s : ∂A -n értelmezett ívkoordináta, $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$ az A felület normálisa, φ : öblösödési függvény.

A csúszató feszültségek és az öblösödési függvény kapcsolatát a

$$\tau_{xz} = \vartheta \left\{ a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_1 y + a_2 x \right\} \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = \vartheta \left\{ a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_2 y + a_3 x \right\} \quad (4)$$

összefüggések írják le.

A csavarónyomaték számítása az alábbi formula felhasználásával történik:

$$S = \iint_{\partial A} [(-y a_1 + x a_2) n_x + (-y a_2 + x a_3) n_y] \varphi ds + \int_A (a_3 x^2 + a_1 y^2 - 2 a_2 x y) dA \quad (5)$$

Az (1), (2) egyenletek által kijelölt kerületérték probléma közelítő megoldását

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^M c_i \ln \left[\left| \frac{(x - m_i)^2}{a_1} + 2 \frac{(x - m_i)(y - n_i)}{a_2} + \frac{(y - n_i)^2}{a_3} \right| \right] \quad (6)$$

alakban állítjuk elő. A c_i állandókat a peremkollokációval kapcsolatos egyenletrendszer megoldása adja.

A tanulmány ismerteti azokat a formulákat vázlatos levezetésekkel együtt, amelyek alkalmazásával közvetlenül megkapjuk a csúsztató feszültségmezőt, és a csavarási merevséget a közelítő megoldásból. A kidolgozott közelítő módszer alkalmazását néhány számpélda szemlélteti.

Az alkalmazott módszer néhány tulajdonsága

a, A perem típusú közelítő megoldás ennek következtében az input adatok generálása könnyebb, mint a tartományi típusú közelítő eljárásoknál (pl végeelem módszernél).

b, A mechanikai mennyiségek reguláris egyenletekkel, formulákkal fejezhetők ki, nincs szükség szinguláris integrálok kiértékelésére, mint az egyéb típusú módszereknél.

c, Az előadott közelítő módszer igen alkalmas érzékenység analízis formuláinak kifejlesztéséhez, hiszen szingularitás mentes kifejezésekből közvetlenül az alakparaméterek szerinti differenciálással nyerjük az érzékenység analízis formuláit, amelyek szintén mentesek mindenfajta szingularitástól.

d, A számítás pontossága igen erősen függ a forráspontok helyétől, főleg a forráspontok és a tartomány határgörbéjének a távolságától.

IRODALOM

- [1] C. Patterson and M.A. Sheikh, " On the use of fundamental solutions in Trefftz method for potential and elasticity problems" in C. A. Brebbia (ed) , Boundary Element Methods in Engineering (Proc. Int. Conf. on BEM, Suothampton, England, 1982), Springer, Berlin, pp. 43-57, 1982.
- [2] M.A. Sheikh and C. A. Patterson, " A Modified Trefftz method for Fluid flow ", in T. Kawai (ed) Finite Element Flow Analysis (Proc. 4th Int. Sympt. on Finite Element Methods in Flow Problems) Univ. Tokyo Press, Tokyo, pp. 973-980, 1982.
- [3] M. Okamoto, T. Sekiya : Some practical Solutions for Elastic Torsion of Bars, Mechanics Research Communications, július 24-26 , 1991.
- [4] Weber C. : Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, band 4, 1924.
- [5] C. Г. Lexnickij : Anizotróp és nemhomogén anyagú rudak csavarása, Moszkva, 1971.

Gulyás Lajos doktorjelölt hallgató, Miskolci Egyetem, Miskolc - Egyetemváros 3515,
06/46/365-111