ANÁLISE MULTIVARIADA EM INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO

WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

Editora Poisson

1ª Edição
2021

WALDENEI TRAVASSOS DE QUEIROZ

Análise Multivariada em Inventário Florestal Contínuo

1ª Edição

Belo Horizonte
Poisson
2021

Editor Chefe: Dr. Darly Fernando Andrade

Conselho Editorial

Dr. Antônio Artur de Souza – Universidade Federal de Minas Gerais

Ms. Davilson Eduardo Andrade

Dra. Elizângela de Jesus Oliveira – Universidade Federal do Amazonas

Msc. Fabiane dos Santos

Dr. José Eduardo Ferreira Lopes – Universidade Federal de Uberlândia

Dr. Otaviano Francisco Neves – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Dr. Luiz Cláudio de Lima – Universidade FUMEC

Dr. Nelson Ferreira Filho – Faculdades Kennedy

Ms. Valdiney Alves de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Imagem da Capa: Bertholetia excelsa (quantumambiental@gmail.com) e Araucária angustifolia (www.stcp.com.br).

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Q3

QUEIROZ, Waldenei Travassos de
Análise Multivariada em inventário
Florestal Contínuo/ Waldenei Travassos
de Queiroz. – Belo Horizonte – MG: Editora
Poisson, 2021.

Formato: PDF

ISBN: 978-65-5866-134-4

DOI: 10.36229/978-65-5866-134-4

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

1. Estatística 2. Métodos Quantitativos
I. Queiroz, Waldenei Travassos de II. Título

CDD-519.2

Sônia Márcia Soares de Moura – CRB 6/1896

O conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença de Atribuição Creative Commons 4.0.

Com ela é permitido compartilhar o livro, devendo ser dado o devido crédito, não podendo ser utilizado para fins comerciais e nem ser alterada.

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

www.poisson.com.br
contato@poisson.com.br

À minha amada esposa Izabel.
Aos meus filhos Anderson e Alex.
Às noras Alessandra e Lorena.
Aos netos Lucas, Gabriel e Alícia.
Aos meus pais Wagner e Erecina *in memoriam*.

Viva a vida, como se estivesse construindo com alegria, ternura e amor, a cada tempo de Planck, uma grande obra de arte matemática que é você mesmo.

Adaptado do ensinamento do Deus Tolteca Quetzalcóatl (Serpente Emplumada)

AGRADECIMENTOS

À Editora Poisson, pelo empenho e dedicação na publicação deste livro. À Inácia Faro Libonati pela cuidadosa revisão do texto final.

À Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), pela oportunidade que tive de exercer o magistério por 41 anos, e assim poder ensinar e aprender, não somente os conhecimentos técnicos sobre inventário florestal, mas, em especial, com os estudantes, colegas professores e funcionários, compreender a arte real do amor incondicional, atributo espiritual que estabelece as bases das relações humanas, condição importante para deslindar, em nosso planeta azul, os segredos da nossa missão de vida.

Ao Serviço Florestal Brasileiro (MMA), pelo convite para participar de todos os eventos que culminaram na construção e na implantação do Projeto do Inventário Florestal Nacional do Brasil (IFN), o que possibilitou produzir grandes discussões e aprendizados na área de inventário florestal.

Ao Professor Sylvio Péllico Netto (UFPR) pelos conhecimentos na área de inventário florestal e aos professores da ESALQ-USP: Cassio Roberto de Melo Godoi, Humberto de Campos, Frederico Pimentel Gomes (*in memoriam*), pelos ensinamentos que recebi na área de análise estatística uni e multivariada, em nossa formação pós-graduada, e ao Professor Carlos Tadeu dos Santos Dias pelos conhecimentos na elaboração de programas na linguagem do Sistema de Análise Estatística SAS.

Aos revisores deste trabalho: à Engenheira Florestal Anabel Aparecida de Mello, Professora da UFS, Mestrado pela UFLA e Doutorado pela UFPR; ao Engenheiro Florestal Joberto Veloso de Freitas, Professor da UFAM, Mestrado no INPA e Doutor pela Universidade de Aberdeen, Escócia; ao Engenheiro Florestal Joésio Deoclécio Pierin Siqueira, Vice-Presidente da STCP, Professor Aposentado da UFPR, Mestrado e Doutorado pela UFPR; ao Engenheiro Florestal José Natalino Macedo Silva, Professor Visitante da UFRA, Mestrado na UFPR e Doutor pela Universidade de Oxford; ao Engenheiro Florestal Lenilson Ferreira Palheta, Mestrado e Doutorado pela UFRA; à Engenheira Florestal Maria de Nazaré Maciel, Professora da UFRA, Mestrado pela UFRA e Doutorado pela UFPR; ao Engenheiro Florestal Paulo Luiz Contente de Barros, Professor Aposentado da UFRA, Mestrado e Doutorado pela UFPR; ao Bacharel em Estatística e Licenciado Pleno em Matemática Pedro Silvestre da Silva Campos, Professor da UFRA, Mestrado em Estatística pela UFPA e Doutorado em Ciências Agrárias pela UFRA.

A todos os colegas professores de Inventário Florestal com os quais tive o prazer de conviver e aprender, os quais homenageio em nome dos que participaram do lançamento do meu livro de “Amostragem em inventário florestal”, quando da realização do I Simpósio Nacional de Inventário Florestal, Natal-RN, em 26-28/11/2012, promovido pelo Serviço Florestal Brasileiro (SFB/MMA). Fotografia do evento de lançamento: Paulo Luiz Contente de Barros, Daniel Piotto, Alexander Christian Vibrans, Doádi Antonio Brena, Waldenei Travassos de Queiroz, Joberto Veloso de Freitas, Anabel Aparecida de Mello, Sylvio Péllico Netto, Fabio Venturoli, José Enílcio Rocha Collares,

Versides Sebastião Moraes e Silva, José Roberto Soares Scolforo, Afonso Figueiredo Filho e Paulo Rogério Soares de Oliveira.

Aos colegas professores e aos profissionais, que com amor e dedicação, adotaram o inventário florestal como ideal profissional, a amizade, o convívio e os ensinamentos recebidos: Agostinho Lopes de Souza, Alba Valeria Rezende, Armando Pinheiro de Carvalho Filho (*in memoriam*), Arne Nyssönen, Bem-Hur Borges, Carlos Roberto Sanquetta, Bernard Rollet, Fernando Cristóvam da Silva Jardim (*in memoriam*), Flóralin de Jesus Fonseca Coelho, Evaristo Francisco de Moura Terezo, Fernando Antônio Souza Bemerguy, Francisco de Paula Neto (*in memoriam*), Francisco José de Barros Cavalcante, Henrique de Castro Ferreira (*in memoriam*), Hilton Tadeu Zarate do Couto, Niro Higuchi, Hugo Barbosa Amorim, Jean Clement Laurent Dubois (*in memoriam*), Jeanine Maria Felfili (*in memoriam*), João Olegário Pereira de Carvalho, João Ricardo Vasconcellos Gama, John Palmer, John Welker, Jorge Alberto Gazel Yared, José de Arimatéia Silva, Juris Jankauskis, Lia de Oliveira Melo, Marco Antonio Amaro, Paulo Renato Schneider, Permínio Pascoal Costa Filho (*in memoriam*), Rafael de Paiva Salomão, Rosângela de Jesus Souza, Rui Lopes Loureiro (*in memoriam*), Sebastião do Amaral Machado, Ulisses Silva da Cunha, Yeda Maria Malheiros Oliveira e ao Estatístico Professor Carlos Roberto Padovani (Campus de Botucatu/UNESP), colega no curso de doutorado na ESALQ/USP, pela amizade e aprendizado quando das nossas discussões sobre análise multivariada, e a todos que me incentivaram na tarefa de oferecer aos usuários da teoria de análise multivariada aplicada em Inventário Florestal Contínuo, uma obra que reúne algumas experiências condizentes, principalmente, com as condições impostas pelos tipos florestais ocorrentes no Brasil.

BIOGRAFIA DO AUTOR

Waldenei Travassos de Queiroz nasceu, em Belém do Pará, no ano de 1950. É graduado em Engenharia Florestal e Mestre em Manejo Florestal pela Universidade Federal do Paraná (UFPR) e doutor em Estatística e Experimentação Agronômica pela Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (USP). Em 1974, iniciou suas atividades profissionais no Projeto RadamBrasil. Em 1975/1976, Contraparte Nacional do Setor de Inventário Florestal do Projeto BRA-45 FAO/IBDF. É Professor Titular aposentado da Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA). Em 1979, membro da comissão do IBDF para traçar diretrizes básicas para o estabelecimento de um Sistema Nacional de Avaliação de Recursos Naturais do Brasil. Em 1997, consultor do Programa de Desenvolvimento das Nações Unidas (PNUD) em Estatística e Planejamento de Inventários Florestais no Programa de Cooperação Técnica ao Zoneamento Ecológico Econômico do Estado de Rondônia (Projeto BRA/94/007). Foi Pró-reitor de Pesquisa e de Pós-Graduação e Vice Reitor da UFRA. De 1988-2002, professor de Inventário Florestal e Análise Multivariada do Curso de Pós-Graduação em Ciências Florestais Tropicais do INPA. Em 2009/2010, consultor da Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação (FAO), junto ao Serviço Florestal Brasileiro (SFB) do MMA, para o planejamento do Sistema de Amostragem do Inventário Florestal Nacional do Brasil. Publicou os livros “Técnicas de amostragem em Inventário Florestal nos Trópicos”, em 1998, e “Amostragem em Inventário Florestal”, em 2012. É membro do Conselho Editorial e Científico da Revista Ciência Florestal da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e também membro da Comissão Editorial da Revista Árvore da Universidade Federal de Viçosa (UFV).

PREFÁCIO

O livro que o Prof. Waldenei Travassos de Queiroz nos entrega foi elaborado para ampliar as alternativas de estudantes e profissionais para lidar com a complexidade das florestas, por meio da aplicação de métodos estatísticos multivariados.

As florestas desempenham importantes e múltiplas funções que dão suporte à vida humana na terra. Elas nos entregam produtos, serviços ambientais e valores culturais, continuamente. O desafio de conservar e usar sustentavelmente essas florestas deve ser enfrentado com base na ciência e no conhecimento, como forma de garantir, também às gerações futuras, os benefícios que temos recebido delas.

O Brasil detém cerca de 500 milhões de hectares de florestas, posicionando-se como a segunda maior extensão florestal do mundo, segundo estimativas da FAO em 2020. Não há como conhecer e manejar as nossas florestas sustentavelmente para atender as necessidades da sociedade sem dispor de dados e métodos objetivos para subsidiar as melhores decisões, em todas as escalas. Conhecer as florestas é do que tratam os inventários florestais, seja em levantamentos pontuais ou em múltiplas ocasiões no tempo.

O inventário florestal contínuo é a principal ferramenta de monitoramento florestal a partir de dados de campo, sendo que quando este é baseado em medidas repetidas obtidas de parcelas permanentes, torna-se uma preciosa fonte de dados sobre a dinâmica, o crescimento e a produção florestal.

O manejo de florestas naturais da Amazônia é uma alternativa legítima de uso com a garantia da permanência da floresta, seus serviços e funções, em longo prazo. Mas ainda há muito que descobrir para o seu refinamento. No caso da produção de madeira, o manejo das florestas amazônicas baseia-se na colheita de algumas árvores por unidade de área e de um período de tempo de espera, ou de pousio, para que a floresta se recupere e possa ser explorada novamente.

Durante o período de pousio, que leva anos, as parcelas permanentes são medidas periodicamente, gerando dados sobre o crescimento das espécies e a evolução da recuperação da capacidade produtiva da floresta. Como o manejo florestal é uma atividade de longo prazo, dispor de métodos que estimem o tempo exato em que as árvores de espécies comerciais atingirão a maturidade para nova colheita é um importante passo para um bom planejamento.

E ao observarmos as variáveis e complexidades das florestas tropicais, que são múltiplas, vemos que o emprego da análise multivariada pode alavancar o potencial de resposta dos inventários florestais substancialmente, ampliando as possibilidades para um melhor uso e conservação das florestas. Este é o caso, por exemplo, do Inventário Florestal Nacional, que além de ser um inventário florestal contínuo, em escala nacional, também abrange variáveis biofísicas, ambientais e sociais relacionadas às florestas, compondo múltiplas dimensões e variáveis.

O livro **Análise Multivariada em Inventário Florestal Contínuo** cobre uma lacuna na ciência florestal, particularmente de métodos para análise de medidas repetidas no tempo, mas também com aplicação desses métodos na solução de vários problemas clássicos desta área da ciência. De forma detalhada e didática, ele oferece os fundamentos necessários para o entendimento teórico, como a álgebra de matrizes e vetores, as pressuposições para a análise de inventários florestais contínuos, a análise de variância multivariada e noções sobre a regressão não linear no contexto do tema central do livro. Objetivamente, o livro oferece exemplos de situações típicas de inventário florestal contínuo em que os métodos de análise multivariada podem ser aplicados pelo manejador, envolvendo perfis de espécies e métodos de manejo, como bases para subsidiar importantes decisões econômicas e silviculturais. Exemplos numéricos, bancos de dados, rotinas computacionais e os procedimentos necessários para a aplicação dos métodos de análise também são apresentados e tornam o livro didático e ainda mais valioso.

As florestas da Amazônia são complexas e ainda há muito a conhecer, e assim é também o seu manejo e, por isso, precisamos dispor de dados e métodos que nos permitam maior aproximação de seu entendimento e compreensão, de modo que possamos encontrar melhores caminhos para a sustentabilidade, e a estatística e os inventários florestais, sem dúvida são ferramentas de que dispomos para isso.

Finalmente, é muito importante destacar a grande contribuição que o autor trouxe, ao longo de sua brilhante carreira como Engenheiro Florestal com Pós-graduação em Métodos Estatísticos, para o ensino e compreensão das teorias que suportam e permitem, cada vez mais, uma visão ampliada dos inventários florestais.

***Joberto Veloso de Freitas-Professor da UFAM
Doutor pela Universidade de Aberdeen, Escócia.***

APRESENTAÇÃO

São muitas as dificuldades enfrentadas pelos profissionais e estudantes que se dedicam aos estudos das ciências florestais e que necessitam fazer uso de métodos estatísticos multivariados na análise de inventários florestais multidimensionais, decorrentes da falta de livros didáticos com aplicações práticas dentro desse contexto.

Objetivando ajudar a minimizar esse problema, o presente livro foi elaborado com a finalidade de contribuir para a diminuição dessa lacuna existente na literatura florestal e, de colaborar com o aprendizado de disciplinas que tratam da análise de levantamentos florestais.

O conteúdo apresentado nesta obra constitui a base dos cursos de análise multivariada que foram ministrados aos alunos de graduação do curso de Engenharia Florestal e no programa de pós-graduação em Ciências Florestais da Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), quando do exercício ativo da docência deste professor aposentado.

Este livro nada mais seria que “um pingô d’água no oceano”, dentro do mar diversificado de alternativas que caracterizam o ramo da análise estatística multivariada, caso o objetivo fosse apresentar com profundidade todos os métodos estatísticos, visando a subsidiar a análise de levantamentos e de experimentos longitudinais, considerando a complexidade requerida e a grande quantidade de problemas a serem equacionados dentro da engenharia florestal. A seguir serão abordados alguns pontos para aguçar a discussão sobre o panorama da análise multidimensional nos inventários florestais.

No caso do estudo dos recursos naturais de uma floresta, o planejamento dos inventários para subsidiar a operacionalização de um plano de manejo florestal sustentado, obrigatoriamente, deve, em seu levantamento, definir, distinguir e delimitar os ecossistemas com características semelhantes, e obviamente, os métodos estatísticos univariados não oferecem o suporte necessário e suficiente de análise para atender referido objetivo.

A experiência na Amazônia tem demonstrado que as estratificações dos ecossistemas estabelecidas mediante a interpretação de imagens de satélite e de fotografias aéreas, apesar de importantes e informativas, isoladamente não são capazes de explicar com o detalhamento requerido as inter-relações existentes entre as variáveis envolvidas para a definição dos diferentes estratos, principalmente na composição da vegetação localizada no sub-bosque da floresta. Desse modo, seria indicado compatibilizar os recursos de sensoriamento remoto e de planejamento de amostragem com a análise estatística multivariada. Entretanto, durante a execução de uma análise multivariada ocorrem algumas dificuldades, sejam em relação à compreensão de sua teoria estatística ou com relação à computação dessas análises.

É inegável, nas análises fitossociológicas de uma floresta natural, ser o uso da análise multidimensional um instrumento poderoso para interpretar as correlações inter e intra, existentes nos seus ecossistemas. Este fato fica ainda mais evidente atualmente, quando os métodos mais comumente utilizados nos estudos da fitossociologia e, amplamente disponíveis na literatura, através dos diversos “índices fitossociológicos” unidimensionais que, de acordo com Queiroz et al. (2017), tornam difícil a interpretação

ecológica dos tipos florestais, principalmente por não apresentarem estruturas de lógica matemática e de método estatístico capazes de explicarem a complexidade dos problemas envolvidos.

Atualmente, um dos problemas mais complexos enfrentados pelos profissionais que atuam no campo do manejo das florestas de terra firme da Amazônia, é a análise dos inventários florestais contínuos, com parcelas permanentes, cujo objetivo principal é o de monitorar e avaliar a dinâmica de crescimento e produção da floresta manejada. Por outro lado, para subsidiar o planejamento, definição e aplicação dos tratamentos silviculturais com vista à aceleração da recomposição da floresta manejada, torna-se imprescindível o uso de métodos estatísticos, que levem em consideração a detecção e a classificação de agrupamentos de espécies que possuam perfis de crescimento semelhantes.

Em se tratando do manejo de florestas naturais, a análise estatística do inventário contínuo com parcelas permanentes, ajuda a explicar a tendência de crescimento de diferentes grupos de espécies com características de desenvolvimento semelhantes e, portanto, facilita o planejamento dos tratamentos silviculturais a serem aplicados para estimular a regeneração natural e melhorar o crescimento da floresta. A análise multivariada, denominada de medidas repetidas, com o uso das técnicas de análises de levantamentos longitudinais, pode ajudar na determinação desses grupos. Em alguns casos, é até recomendável a aplicação conjunta de vários métodos multidimensionais.

As técnicas multivariadas de componentes principais e análise de fatores podem ser utilizadas na diminuição da dimensionalidade dos dados, o que possibilitaria a partir de um número menor de variáveis, mais facilmente explicar suas inter-relações. Essas técnicas são importantes para construir índices fitossociológicos multivariados, e, a partir deles, produzir mapas delimitando as comunidades florestais.

As técnicas de análises de agrupamento, de discriminante e de variância multivariada podem ser usadas para delimitar, classificar e comparar os diferentes tipos de ecossistemas, e assim obter mapas tipológicos baseados nas variáveis mais importantes na explicação das estruturas florísticas e ecológicas da vegetação.

Pode ser interesse de o pesquisador estudar as inter-relações entre grupos de variáveis. Por exemplo, um grupo pode ser formado por variáveis da flora e o outro pelas variáveis que refletem a fertilidade de solo. A análise de correlação canônica ajuda a explicar essas correlações gerando, inclusive, mapas com a estratificação das diversas relações solo-vegetação.

Nesta obra, os programas para efetuar as análises foram elaborados utilizando a linguagem de programação do Sistema de Análise Estatística (SAS), haja vista o seu grande potencial e amplitude, assim como a sua facilidade operacional e possibilidade de adaptação a outros aplicativos disponíveis no mercado.

Waldenei Travassos de Queiroz

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO AO INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO	17
CAPÍTULO 2 - ÁLGEBRA DE VETORES E DE MATRIZES	21
2.1. - Produto interno ou produto escalar de dois vetores	22
2.2. - Ortogonalidade e base ortonormal.	23
2.3. - Vetores linearmente dependentes e independentes	23
2.4. - Ortonormalização de Gram-Schmidt	24
2.5. - Determinantes	26
2.6. - Matriz inversa regular	29
2.7. - Matrizes inversas generalizadas (Inversa-g)	31
2.7.1. - Matriz generalizada de Moore-Penrose	32
2.7.2. - Matriz inversa generalizada condicional	32
2.7.3. - Matriz inversa generalizada de quadrados mínimos.....	32
2.7.4. - Matriz inversa reflexiva ou inversa-g2.	33
2.8. - Autovalores e Autovetores	36
2.9. - Formas quadráticas.....	41
2.10. - Matriz Helmert	44
CAPÍTULO 3 - MULTINORMALIDADE E ESTRUTURAS DE MATRIZES DE COVARIÂNCIAS	47
3.1. - Teste de multinormalidade de Mardia.	49
3.2. - Teste de multinormalidade de Henze-Zirkler	51
3.3. - Teste de homogeneidade de matrizes de covariâncias considerando p ocasiões.....	54
3.4. - Teste de uniformidade da matriz de covariância considerando p ocasiões.	56
3.4.1. - Teste de uniformidade da matriz de covariância de Wilks.	57
3.4.2. - Circularidade ou esfericidade de uma matriz.	59
3.4.3. - O critério de Mauchly para testar a esfericidade de uma matriz.....	62
3.4.4. - Correção de Greenhouse-Geisser (g-g).....	64
3.4.5. - Correção Huynh e Feldt (h-f).	68

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA..... 69

4.1. - Análise multivariada para testar um vetor de médias de tratamento versus um vetor padrão populacional.....	70
4.2. - Análise multivariada para testar vetores de médias para dois tratamentos independentes.....	74
4.3. - Modelo linear univariado para mais de dois tratamentos.....	76
4.4. - Análise de variância multivariada do ensaio inteiramente ao acaso.....	79
4.5. - Testes de hipóteses multivariados e aproximações para a distribuição F.	82
4.6. - A função discriminante ou variável canônica Z1.....	84
4.7. - Análise de um experimento inteiramente ao acaso bivariado	85

CAPÍTULO 5 - NOÇÕES SOBRE REGRESSÃO NÃO LINEAR..... 97

5.1. - Teorema de Taylor.....	98
5.2. - Estimadores de máxima verossimilhança.	99
5.3. - Teste da razão de verossimilhança.	101
5.4. - Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear.....	102
5.5. - Análise de resíduos	104
5.6. - Regressão não linear.	108
5.6.1. - Determinação das estimativas dos parâmetros, para o modelo de Mitscherlich, pelo método dos mínimos quadrados ordinários.	110
5.6.2. - Determinação das estimativas dos parâmetros, pelo método dos mínimos quadrados ordinários, usando a forma matricial para o modelo de Mitscherlich	111
5.7. - Método de Gauss-Newton.....	114
5.8. - Avaliação da adequacidade dos modelos testados.	117
5.9. - Validação da predição do modelo de regressão pelo teste de Graybill	118

CAPÍTULO 6 – CICLO DE CORTE ECONOMICAMENTE ACONSELHÁVEL 119

6.1. - Derivadas.....	120
6.2. - Máximo e mínimo de uma função com uma variável	121
6.3. - Máximo e mínimo de uma função com duas variáveis	123

6.4. - Exemplo de obtenção de máximo e mínimo de uma função com três variáveis.....	125
6.5. - Máximos e mínimos condicionados	126
6.6. - Método dos Multiplicadores de Lagrange (Joseph Louis Lagrange 1736-1813).....	127
6.7. - Equação de Mitscherlich para estimar o crescimento de uma floresta	131
6.8. - Ciclo de corte economicamente aconselhável com a equação de Mitscherlich	134
6.9. - Ciclo de corte economicamente aconselhável pela equação de Von-Bertalanffy.	136

CAPÍTULO 7 - ANÁLISE DE INVENTÁRIOS FLORESTAIS CONTÍNUOS..... 138

7.1. - Análise univariada de inventários florestais com parcelas permanentes pelo método de parcelas subdivididas	140
7.2. - Inventários florestais com parcelas permanentes com um tratamento... 142	
7.2.1. - Análise de um inventário florestal contínuo com um método de manejo	144
7.3. - Inventários florestais com parcelas permanentes com dois tratamentos 148	
7.3.1. - Análise de um inventário florestal contínuo com dois métodos de manejo	149
7.4. - Inventários florestais com parcelas permanentes com mais de dois tratamentos	154
7.5. - Testes de hipóteses multivariados e as aproximações para a distribuição F.	158
7.6. - Análise de agrupamento pelo método de Ward.....	159
7.7. - Análise de um inventário florestal contínuo com quatro métodos de manejo	161
7.7.1. - Análise da interação Ocasão×Método de Manejo.....	161
7.7.2. - Estimativa do ciclo de corte economicamente aconselhável para M1, M2, M3 e M4.	170
7.7.3. - Teste da razão da máxima verossimilhança, de verificação de igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear, para M3 e M4	174

7.7.4. - Teste da razão da máxima verossimilhança, considerando os métodos de manejos M1, M2, M3 e M4, para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear.....	175
7.7.5. - Análise dos resultados e conclusões do exemplo do inventario florestal contínuo.	177

CAPÍTULO 8 - ANÁLISE DE PERFIL DE ESPÉCIES EM FLORESTAS NATURAIS.....

8.1. - Análise de perfil de crescimento de quatro espécies florestais.	180
8.1.1. - Análise da interação Ocasão×Espécie	180
8.1.2. - Ciclo de corte economicamente aconselhável para E1, E2, E3 e E4	188
8.1.3. - Teste da razão da máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear	193
8.1.4. - Considerações finais da análise do IFC para as espécies E1, E2, E3 e E4.	198

CAPÍTULO 9 - TÉCNICAS MULTIVARIADAS EM INVENTÁRIO FLORESTAL

9.1. - Análise de componentes principais.....	203
9.1.1. - Significado geométrico dos componentes principais	206
9.1.2. - Metodologia dos índices normalizados	207
9.1.3. - Análise de componentes principais para as espécies E1, E2, E3, E4, considerando como variáveis as ocasiões OC1, OC2, OC3, OC4 e OC5.....	208
9.2. - Analise discriminante	211
9.2.1. - Função linear discriminante de Fisher.	211
9.2.2. - Caso de duas populações minimizando a probabilidade total de classificação.	213
9.2.3. - Caso de duas populações multinormais com dispersões conhecidas e iguais.	213
9.2.4. - Caso de três populações multinormais com dispersões conhecidas e iguais, assim como ($p_1 = p_2$)	215
9.2.5. - Método não paramétrico para calcular a probabilidade de má classificação... ..	216
9.2.6. - Análise de discriminante, considerando as variáveis (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5) para as quatro populações (E1, E2, E3 e E4).....	216
9.3. - Análise de correlação canônica.	220
9.3.1. - Análise de correlação canônica considerando os métodos de manejo (M1, M2, M3, M4) e as quatro espécies (E1, E2, E3, E4).....	222

9.4. - Análise de fatores (AF).....	225
9.4.1. - Análise de fatores pelo método da máxima verossimilhança.	228
9.4.2. - Teste de hipótese para determinar o número de fatores (m) adequado para reproduzir o modelo (método de máxima verossimilhança)	232
9.4.3. - Estimação dos escores dos fatores.	232
9.4.4. - Metodologia dos índices normalizados	232
9.4.5. - Análise de fatores por componentes principais.....	233
9.4.6. - Métodos de Rotação dos Fatores.....	235
9.4.7. - Análise de fatores, pelo método dos componentes principais, para quatro espécies (E1, E2, E3, E4) em relação às variáveis (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5).....	236
 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	 240
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 241
APÊNDICE A: Distribuições estatísticas	247
APÊNDICE B: Banco de dados	252
APÊNDICE C: Programas SAS.	259

Capítulo 1

Introdução ao inventário florestal contínuo

Neste capítulo serão abordados, de um modo geral, os procedimentos denominados de medidas repetidas, por meio das técnicas de análise de levantamentos longitudinais, que são importantes quando se estuda perfil de crescimento, em particular, em inventário florestal contínuo com uso de parcelas permanentes, destacando temas fundamentais da estatística e da matemática, para que os estudantes da disciplina de inventário florestal percebam a importância do uso da estatística multidimensional na análise e na solução dos problemas florestais.

INTRODUÇÃO

Para avaliar e analisar a dinâmica de recomposição de uma floresta explorada, como parte integrante de um plano de manejo florestal sustentável, é necessário utilizar um processo de monitoramento da dinâmica da floresta para determinação do crescimento e produção dos seus recursos. Na ciência florestal, este procedimento é conhecido como Inventário Florestal Contínuo (IFC), onde são efetuadas mensurações repetidas no tempo, ou seja, medições em várias ocasiões. O tipo de alocação de parcelas mais comum no IFC são as permanentes, constituindo-se em um caso de população multivariada, onde variáveis aleatórias, como por exemplo, o volume de madeira avaliado em p -ocasiões segue uma distribuição de probabilidade com um vetor de médias e uma matriz de covariância. Os sucessivos inventários florestais realizados em ocasiões diferentes permitirão ajustar a respectiva função de crescimento, e assim, irão possibilitar a definição da idade ou ciclo de corte economicamente aconselhável para promover a colheita dos produtos da floresta.

A análise de levantamentos com parcelas permanentes enquadra-se no grupo de experimentos com medidas repetidas, mais precisamente na classe dos levantamentos longitudinais, por envolver observações, em diversas ocasiões, em uma mesma unidade experimental. As medidas são repetidas no tempo de forma sistemática e, assim sendo, espera-se existir uma correlação não nula entre as medidas obtidas nos vários períodos de tempo analisados, bem como uma heterocedasticidade ou heteroscedasticidade das variâncias nas diversas ocasiões.

Experimentos planejados com medidas repetidas, normalmente têm como objetivo estudar o efeito global dos tratamentos ao fim do experimento, a variação do efeito dos tratamentos ao longo do tempo, ou mesmo estudar o efeito em alguma ocasião em particular.

Existem dois métodos para testar as hipóteses sobre o efeito dos tratamentos e a correspondente variação ao longo do tempo. O primeiro adota um procedimento univariado que trata as observações medidas no tempo como se fossem originadas de subdivisões das unidades experimentais (*split-plot*), sendo estudado por meio do delineamento em parcelas subdivididas, mas com a exigência de que as medidas tomadas em ocasiões distintas tenham variâncias homogêneas e sejam igualmente correlacionadas. O segundo método, denominado de análise de perfil ("*profile analysis*"), adota um procedimento multivariado, ou seja, considera as observações repetidas sobre cada unidade experimental como um vetor de respostas.

A análise de perfil deve ser usada quando as ocasiões distintas não possuem variâncias homogêneas e/ou também não são igualmente correlacionadas. Este procedimento adota hipótese completamente geral sobre a estrutura de covariâncias entre medidas repetidas tomadas sobre uma mesma unidade experimental.

A escolha do procedimento de análise de perfil de crescimento no IFC, se univariado ou multivariado, depende de suposições para o conjunto de dados em estudo. O modelo de análise univariada de perfil em parcelas subdivididas ("*split-plot*") não é recomendado para a análise de dados com medidas repetidas, pois considerando o modo sistemático

como são feitas as observações nas ocasiões, geralmente não é esperado uma matriz de covariância do tipo uniforme.

De acordo com Huynh e Feldt (1970), uma condição necessária e suficiente para que possa ser empregada a análise de variância univariada, no esquema de parcelas subdivididas, para um experimento com medidas repetidas, é que a matriz de covariância entre os tempos satisfaça a condição de esfericidade ou circularidade, o que é equivalente a especificar que as covariâncias entre pares de erros sejam todas iguais. Para testar tal condição, Mauchly (1940) propôs um teste de esfericidade que verifica se uma população normal multivariada apresenta variâncias iguais e correlações nulas. Caso o teste de esfericidade de Mauchly resulte ser não significativo, conclui-se que a matriz de covariância é classificada como esférica. Logo o experimento pode ser analisado na forma de parcela subdividida, caso contrário, recomenda-se o uso da análise multivariada de perfil.

Uma aplicação da análise univariada, considerando o delineamento em parcelas subdivididas, com o objetivo de estudar curvas de crescimento e análise de perfil de um ensaio com parcelas permanentes, pode ser vista em Queiroz (2012).

Queiroz (2014) utilizou a análise multivariada de perfil, a partir de dados de um inventário florestal contínuo com parcelas permanentes, em um experimento desenvolvido por Yared (1983), considerando nove procedências da espécie *Cordia alliodora* (Ruiz & Pav) Oken e as ocasiões de 6, 12, 18, 24 e 30 meses. O objetivo foi estudar curvas de crescimento e análise de perfil para a variável altura da espécie.

Morrison (1976) descreveu o teste de Mauchly (1940) para a validade da condição de esfericidade da matriz de covariância. O referido teste está disponível no PROC GLM do SAS (2002), com o comando *repeated* e a opção *printe*.

Para evitar problemas de singularidade das matrizes de covariâncias, o tamanho da amostra, no mínimo, deve ser maior do que o número de variáveis dependentes. A maioria dos experimentos biológicos apresenta tamanho amostral insuficiente para proceder ao teste de multinormalidade e de homogeneidade de matrizes de covariâncias. Desse modo, Hair et al. (2009) recomendam que, na MANAVA, o tamanho da amostra seja maior do que na ANAVA.

Segundo Anderson (1958) a pressuposição de homogeneidade de matrizes de covariâncias, supondo populações normais multidimensionais, pode ser feita pelo critério da razão de verossimilhança generalizada.

O modelo de análise multivariada de perfil, geralmente é parametrizado por meio das médias e tem a vantagem de ser de fácil interpretação. O modelo pode ser representado matricialmente na forma usual da análise multivariada de variância: $Y = X\beta + \varepsilon$, tal que Y é uma matriz de dados, X é a matriz de especificação do modelo, β é a matriz de parâmetros e ε é a matriz dos resíduos. Qualquer hipótese sobre os parâmetros pode ser expressa na forma linear geral $H: C\beta U = \phi$, onde C ($c \times g$) e U ($t \times u$) são matrizes com postos c e u de constantes conhecidas. A matriz C é responsável por comparações entre os tratamentos (linhas da matriz β), enquanto que a matriz U efetua as comparações entre as ocasiões (colunas da matriz β).

O teste da hipótese linear geral $H: C\beta U = \phi$ pode ser feito através das estatísticas: Lambda de Wilks, Traço de Pillai, Traço de Hotelling-Lawley e a Maior Raiz Característica de Roy. Estas estatísticas são funções das raízes características da matriz HE^{-1} , donde H é a matriz de somas de quadrados e produtos cruzados devido à hipótese nula e E é a matriz de somas de quadrados e produtos cruzados devido ao erro. Detalhes sobre essas estatísticas podem ser encontradas em Ferreira (2011), Fávero et al. (2009) e Hair et al. (2009).

Com o intuito de melhor embasamento teórico aos estudantes e demais leitores deste livro, serão apresentados, no contexto estatístico e matemático, os seguintes temas: noções sobre álgebra de vetores e de matrizes; estudo de máximos e mínimos condicionados de uma função; noções sobre regressão não linear pelo método de Gauss-Newton; teste da razão de verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e identidade de modelos de regressão não linear; teste de validade de regressão de Graybill; equação de Mitscherlich na obtenção do ciclo de corte economicamente aconselhável; o critério de Mauchly para testar se uma matriz de covariância é esférica; as correções de Geisser-Greenhouse (*g-g*) e de Huynh e Feldt (*h-f*) no estudo da esfericidade de matrizes; teste de uniformidade de matriz de covariância; teste de homoscedasticidade de matrizes de covariâncias; testes de multinormalidade de assimetria e de curtose de Mardia; teste de normalidade multivariada de Henze-Zirkler; noções sobre análise de variância multivariada (variável discriminante ou canônica); testes de paralelismo e de coincidência de perfis de crescimento; análise de agrupamento pelo método de Ward; análise de componentes principais, análise de fatores, análise discriminante; análise de correlação canônica.

Os dados usados nas diferentes aplicações apresentadas, neste livro, foram simulados, mas procurando ser o mais próximo possível da realidade Amazônica, haja vista a indisponibilidade de observações no formato completo requerido pelo método de análise de perfil. A partir da definição de vetores de médias e de matrizes de covariâncias foi gerado um banco de dados, considerando quatro tratamentos, denominados de métodos de manejo M1, M2, M3 e M4, aplicados em 30 parcelas permanentes de 0,25 ha por tratamento, para as ocasiões 0, 5, 10, 15 e 20 anos. O tempo 0 (zero) correspondeu à data logo após a exploração florestal.

Definido o melhor método de manejo, então foram simulados dados para quatro espécies, denominadas de E1, E2, E3, E4, com base nas suas importâncias econômicas, abundâncias de ocorrência e rápido crescimento, para ajustar as respectivas funções de crescimentos e a partir dessas definir os seus respectivos ciclos de corte economicamente aconselháveis.

O objetivo principal deste livro é apresentar o método multivariado de análise de perfil e suas relações com outros métodos multidimensionais. Em especial, servir de guia prático aos estudantes do curso de Engenharia Florestal, em particular da disciplina de Inventário Florestal. Por outro lado, visa também contribuir com a análise dos inventários florestais contínuos realizados dentro da programação do Inventário Florestal Nacional do Brasil (IFN), assim como, apresentar uma metodologia que possa servir de base para prever o ciclo de corte viável economicamente em uma floresta manejada.

Capítulo 2

Álgebra de vetores e de matrizes

Este capítulo trata de definições, conceitos e aplicações de álgebra de vetores e de matrizes que são importantes no estudo da análise multivariada. Aborda os seguintes temas: produto interno ou produto escalar de dois vetores; ortogonalidade e base ortonormal; vetores linearmente dependentes e independentes; procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt; determinantes; matriz inversa regular e matrizes inversas generalizadas (inversa-g); autovalores e autovetores; formas quadráticas; matriz Helmert.

2. INTRODUÇÃO

Matriz é uma tabela de dados organizada no formato $n \times p$, onde n representa o número de linhas (horizontal) e p o número de colunas (vertical). No caso de uma amostra p -dimensional, donde a matriz Y ($n \times p$) representa a tabela dos dados, então as linhas (vetores) representarão as n observações p -dimensionais.

Sejam os vetores: $a'_v = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]$ e $y'_v = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]$. O produto $a'_v y_v$ é dado por:

$$a'_v y_v = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_p y_p = \sum_{i=1}^p a_i y_i$$

Se $f(y_1, \dots, y_p) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_p y_p$, então, pode-se escrever que $f(y_1, \dots, y_p) = a'_v y_v$.

2.1. PRODUTO INTERNO OU PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES

Sejam os vetores: $y'_{v1} = [y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1p}]$ e $y'_{v2} = [y_{21} \ y_{22} \ \dots \ y_{2p}]$. O produto interno ou produto escalar em R^p entre dois vetores y_{v1} e y_{v2} , com o mesmo número de elementos, é definido como a soma dos produtos dos seus elementos correspondentes. O produto interno de dois vetores $y'_{v1} y_{v2}$ é um escalar (constante).

$$y'_{v1} y_{v2} = y_{11} y_{21} + y_{12} y_{22} + \dots + y_{1p} y_{2p} = \sum_{i=1}^p y_{1i} y_{2i}$$

O produto interno, de um vetor $y'_v = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ com ele mesmo ($y'_v y_v$), é a soma de quadrados dos elementos de y_v , ou seja, $y'_v y_v = \sum_{i=1}^n y_i^2$. O valor $y'_v y_v$ é definido como o quadrado do comprimento do vetor y_v e sendo representado por $d^2 = y'_v y_v$.

A interpretação geométrica de $d = \sqrt{y'_v y_v}$ corresponde à distância entre o ponto referente aos elementos de y_v e a origem no sistema p -dimensional. O comprimento de um vetor também é chamado de norma. Se ocorrer $y'_v y_v = 1$, implica que $d = 1$, então y_v é definido como um vetor normalizado, isto é, possui o comprimento ou norma igual à unidade.

Seja a matriz $Y = [y_{v1} \ y_{v2}]$ formada pelos vetores:

$$y'_{v1} = [y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1p}] \quad y'_{v2} = [y_{21} \ y_{22} \ \dots \ y_{2p}]$$

Pode-se definir a distância entre os pontos que correspondem às coordenadas dos vetores y_{v1} e y_{v2} , como: $d = \sqrt{\sum_{i=1}^p (y_{1i} - y_{2i})^2}$, denominada distância Euclidiana.

É importante em algumas técnicas multivariadas que a representação vetorial das variáveis tenha norma igual à unidade. Para obter a normalização igual à unidade de um vetor basta dividir os seus elementos pela sua norma.

Se y_{v1} e y_{v2} são vetores normalizados, isto é, $y'_{v1}y_{v1}=1$ e $y'_{v2}y_{v2}=1$, implica que $y'_{v1}y_{v2}=1$, ou seja, o produto interno de vetores normalizados é igual à unidade.

2.2. ORTOGONALIDADE E BASE ORTONORMAL

Sejam os vetores: $y'_{v1}=[y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1p}]$ e $y'_{v2}=[y_{21} \ y_{22} \ \dots \ y_{2p}]$.

O cosseno do ângulo θ entre dois vetores é igual à razão entre o produto interno deles e a raiz quadrada do produto de suas normas.

$$\cos\theta = \frac{y'_{v1}y_{v2}}{\sqrt{(y'_{v1}y_{v1})(y'_{v2}y_{v2})}}$$

Dois vetores são ortogonais entre si se o ângulo θ entre eles for igual a 90° , ou seja, $\cos\theta=0$, então para que dois vetores sejam ortogonais é necessário que o produto interno entre eles seja igual a zero. Destarte, os vetores y'_{v1} e y'_{v2} são ortogonais se $y'_{v1}y_{v2}=0$.

Existem situações, na análise multivariada, em que há a necessidade de estabelecer uma base ortonormal de vetores. Uma base é definida como ortonormal quando é constituída por um conjunto de vetores que são mutuamente ortogonais e com normas iguais a unidade.

Caso nesse conjunto os vetores forem 2 a 2 ortogonais, mas não necessariamente de norma unitária, a base vetorial é dita ortogonal. Por outro lado, pode-se obter uma base ortonormal, normalizando os vetores da base ortogonal. Para obter a normalização de um vetor basta dividir cada elemento do vetor pela sua norma.

2.3. VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E INDEPENDENTES

Dois vetores y_{v1} e y_{v2} com p componentes são definidos como sendo linearmente dependentes, se os elementos de um dos vetores forem proporcionais aos elementos do outro vetor. Os vetores $y'_{v1}=[2 \ 1 \ 3]$ e $y'_{v2}=[4 \ 2 \ 6]$ são linearmente dependentes, pois $y_{v2}=2y_{v1}$.

Seja um conjunto formado por p vetores $y_{v1}, y_{v2}, \dots, y_{vp}$. Estes vetores são denominados linearmente independentes, caso seja impossível escrever qualquer vetor desse conjunto como função linear dos vetores remanescentes. Um conjunto formado por p vetores $y_{v1}, y_{v2}, \dots, y_{vp}$ é denominado linearmente independente, se não existirem escalares

$c_1, c_2, \dots, c_p$ que possam gerar algum vetor y_{vi} do conjunto, ou seja, não é possível ocorrer:

$$c_i y_{vi} = c_1 y_{v1} + \dots + c_{i-1} y_{v(i-1)} + c_{i+1} y_{v(i+1)} + \dots + c_p y_{vp}$$

Por exemplo, sejam os vetores $y'_{v1} = [1 \ 2 \ -1]$, $y'_{v2} = [1 \ 3 \ 2]$ e $y'_{v3} = [4 \ 11 \ 5]$. Estes constituem um conjunto linearmente dependente, dado que: $y_{v3} = y_{v1} + 3y_{v2}$.

Dado um conjunto de vetores dependentes, então se pode sempre obter pelo menos um vetor como função linear dos demais.

Define-se como posto ou *rank* de uma matriz o número de vetores linhas (colunas) linearmente independentes. Abaixo algumas propriedades:

- [1] Uma matriz é definida como de posto completo quando todos os vetores linhas (colunas) forem linearmente independentes;
- [2] O posto de A' (transposta) é igual ao posto de A . Este fato mostra que existe equivalência das linhas e das colunas na definição do posto;
- [3] O posto de $A'A$ ou AA' é igual ao posto de A ;
- [4] O posto da matriz A não muda ao pré-multiplicá-la ou pós-multiplicá-la por outra não singular. Matriz não singular é aquela que admite inversa normal (possui posto completo);
- [5] O posto de uma matriz é invariante a operações elementares de linhas e de colunas.

2.4. ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Seja a base vetorial composta pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$. Ferreira (2011) apresenta os passos para, a partir dessa base, pelo processo de Gram-Schmidt, obter os vetores ortonormais $y_1, y_2, \dots, y_p$. No caso de ocorrer alguns vetores linearmente dependentes no conjunto, então será originada uma base ortonormal com um número (r) menor de vetores ($r < p$).

a) O primeiro passo consiste em ortogonalizar os vetores da base:

$$e_1 = v_1$$

$$e_2 = v_2 - \frac{v'_2 e_1}{\|e_1\|^2} e_1$$

$$e_3 = v_3 - \frac{v'_3 e_2}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{v'_3 e_1}{\|e_1\|^2} e_1$$

...

$$e_p = v_p - \frac{v_p' e_{p-1}}{\|e_{p-1}\|^2} e_{p-1} - \dots - \frac{v_p' e_1}{\|e_1\|^2} e_1$$

b) O segundo passo consiste em normalizar todos os vetores ortogonalizados:

$$y_i = \frac{e_i}{\sqrt{e_i' e_i}}, \text{ para } e_i' e_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, p)$$

Exemplo 2.4.1. Dados os vetores $v_1' = [3 \ 1]$ e $v_2' = [2 \ 2]$. Obter a base ortonormal.

Primeiro passo: $e_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$e_2 = v_2 - \frac{v_2' e_1}{\|e_1\|^2} e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

$$\|e_1\|^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \text{ e } v_2' e_1 = [2 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$$

Segundo passo: $y_i = \frac{e_i}{\sqrt{e_i' e_i}}$

$$\sqrt{e_1' e_1} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{e_2' e_2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2}{5} \sqrt{10}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \quad y_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$y_{v1}' y_{v1}' = 1; \quad y_{v2}' y_{v2}' = 1; \quad y_{v1}' y_{v2}' = y_{v2}' y_{v1}' = 0$$

Ferreira (2011) cita que o processo de Gram-Schmidt é importante para a obtenção da matriz inversa generalizada de Moore-Penrose, a qual é utilizada em processos iterativos de estimativas de parâmetros em modelos não lineares. Dada uma matriz X ($p \times k$) formada por um conjunto de k vetores (colunas). Seja a matriz U , de dimensão coluna r e dimensão linha igual a p , a base resultante da ortonormalização de X ($p \times k$). A matriz inversa generalizada de Moore-Penrose de X ($p \times k$) será dada por:

$$X^+ = \Gamma'(\Gamma\Gamma')^{-1}U', \text{ tal que: } \Gamma = UX$$

2.5. DETERMINANTES

O conceito de um número associado a uma matriz quadrada é importante na solução de muitos problemas, como por exemplo, verificar se uma matriz possui inversa. Para cada matriz quadrada existe um número real único, denominado determinante. As notações mais usadas para representar o determinante de uma matriz quadrada A são $\det A$ e $|A|$. Seja o sistema de equação mais simples $ax_1 = c$, $a \neq 0$, cuja solução é $x_1 = c/a$. Observe que o denominador (a) , de $x_1 = c/a$, está associado à matriz dos coeficientes. Escrevendo na forma matricial $Ax_v = b_v$, ou seja, $A = [a]$, $x_v = [x_1]$ e $b_v = [c]$, então o denominador (a) é definido como o determinante de $A = [a]$, isto é, $\det A = a$.

Seja um sistema com duas equações cujas soluções x_1 e x_2 sejam possíveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

As soluções x_1 e x_2 são: $x_1 = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ e $x_2 = \frac{c_2a_{11} - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Verifica-se que, os denominadores $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ das soluções x_1 e x_2 são iguais e associados à matriz dos coeficientes do sistema de equação escrito na forma matricial $Ax_v = b_v$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad x_v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b_v = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

O denominador de x_1 e x_2 é definido como o determinante de A , ou seja, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Para uma matriz de primeira ordem: $\det[a_{11}] = a_{11}$;

Para uma matriz de segunda ordem: $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

Para uma matriz de terceira ordem: $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Para uma matriz A de qualquer ordem, neste caso, o determinante pode ser calculado pela regra de Laplace, onde o determinante de qualquer matriz quadrada de ordem p é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha i (ou coluna j) pelos seus respectivos cofatores.

$\det A = \sum_{i=1}^p a_{ij} A_{ij}$, quando se considera a coluna j ;

$\det A = \sum_{j=1}^p a_{ij} A_{ij}$, quando se considera a linha i .

A regra de Laplace obedece às seguintes etapas:

- Obter os menores complementares A_{ij} de qualquer linha i ou de qualquer coluna j de A . Menor complementar A_{ij} , de um elemento a_{ij} de uma matriz A , é o determinante da submatriz resultante quando da eliminação da linha i e da coluna j ;
- Obter a matriz dos cofatores $\bar{A} = [\Delta_{ij}]$ dos elementos a_{ij} de A . O cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} de A é o menor complementar de a_{ij} multiplicado pelo termo $(-1)^{i+j}$, ou seja, $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

Exercício 2.5.1. Dada a matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obter o menor complementar do elemento $a_{22} = -1$:

Eliminando a segunda linha e a segunda coluna, a submatriz resultante será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

O menor complementar do elemento $a_{22} = -1$, é:

$$A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

b) Obter o cofator do elemento $a_{22} = -1$, ou seja, Δ_{22} :

Dado $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, então: $\Delta_{22} = (-1)^{2+2} A_{22} = (-1)^4 \times -2 = -2$.

c) Obter o determinante da matriz A pela regra de Laplace:

Pode-se trabalhar com qualquer linha ou qualquer coluna. Considerando a primeira linha, têm-se:

$$\det A = a_{11} \times (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \times (1 - 4) - 3 \times (-2 - 2) + 1 \times (4 + 1) = -3 + 12 + 5 = 14$$

Algumas propriedades dos determinantes:

- O determinante de uma matriz triangular ou de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;
- O determinante é igual a zero quando todos os elementos de uma linha ou de uma coluna são iguais a zero;
- O determinante é igual a zero quando duas linhas ou duas colunas são idênticas, ou seja, os seus elementos são iguais;
- O determinante é igual a zero quando uma linha é uma relação linear de outra linha, similarmente quando uma coluna é uma relação linear de outra coluna, ou seja, uma é múltipla da outra;
- Se duas linhas ou duas colunas são permutadas entre si, então o determinante troca de sinal.

A matriz adjunta de uma matriz A é a matriz transposta da matriz dos seus cofatores, ou seja, $\text{adj}A = \overline{A}'$.

Exercício 2.5.2. Obter a matriz adjunta de A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, calcula-se a matriz de cofatores de A , isto é, a matriz $\overline{A}$.

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5 \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -7$$

Resultando $\bar{A}$ que é a matriz dos cofatores de A :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz adjunta de A , basta obter a transposta da matriz dos cofatores, ou seja, $\text{adj}A = \bar{A}'$:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

2.6. MATRIZ INVERSA REGULAR

Sejam as matrizes quadradas A e A^{-1} , se $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, então A^{-1} é a matriz inversa regular de A . Uma matriz é dita não singular se a mesma admite inversa regular, e se não admite inversa é denominada singular. A matriz inversa regular é única e será representada por A^{-1} .

Da teoria de determinantes tem-se que, em uma matriz quadrada não singular A , os elementos correspondentes à sua inversa A^{-1} são os elementos da matriz adjunta de A ($\text{adj}A$) divididos pelo determinante de A .

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj}A)}{\det A} \quad (\det A \neq 0)$$

Exercício 2.6.1. Obter a solução do sistema de equações.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Da solução matricial $x_v = A^{-1}b_v$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da teoria de determinantes:

$A^{-1} = \frac{(\text{adj}A)}{\det A}$, onde $A \neq 0$ e $\text{adj}A$ é a matriz adjunta de A .

Como visto anteriormente, têm-se $\det A=14$ e $\text{adj}A$:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -30+30+14 \\ 40-12+0 \\ 50+6-14 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Conclusão: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

Efetuada a verificação da definição, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, têm-se:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, conclui-se que A^{-1} é a inversa regular de A .

Propriedades de uma matriz não singular, ou seja, matriz que possui inversa regular:

- $A^{-1}A = AA^{-1} = I$;
- A^{-1} é única;
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;
- Se A é simétrica, então A^{-1} também é simétrica;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (se A e B são matrizes não singulares);
- Se a inversa da matriz A é igual a sua transposta ($A^{-1} = A'$), então, diz-se que A é uma matriz ortogonal ($A'A = I$).

As matrizes ortogonais ($A'A = I$), e consequentemente, $A^{-1} = A'$, são importantíssimas na estatística multivariada.

Uma matriz A é definida como ortogonal se suas linhas (colunas) são formadas por vetores ortonormais. Vetores ortonormais são vetores independentes (o produto interno entre eles é igual a zero) e possuem normas iguais à unidade.

Se A é ortogonal $A'A = AA' = I$, a inversa de A , simplesmente, é a transposta A' . A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é um exemplo de uma matriz ortogonal, pois:

$$A'A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AA' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é a mais geral matriz ortogonal de ordem 2×2 , pois $AA' = A'A = I$.

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta \times \sin\theta + \sin\theta \times \cos\theta \\ -\sin\theta \times \cos\theta + \cos\theta \times \sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7. MATRIZES INVERSAS GENERALIZADAS (INVERSA-G)

O conceito sobre inversa normal de uma matriz é “se uma matriz A tem inversa A^{-1} , essa matriz necessariamente é quadrada e deve ter determinante diferente de zero”. Isto equivale a dizer que a matriz A é não singular, ou ainda, que tem posto completo (linhas e colunas linearmente independentes). Uma matriz quadrada é dita singular se tiver determinante nulo.

Muitos problemas estatísticos, teóricos e aplicados, envolvem a solução de sistemas de equações lineares do tipo $Ax_v = b_v$ ou $y_v = X\beta_v$. Se as matrizes A e X são de ordem $n \times n$, não singulares, então, as soluções dos sistemas existem (sistemas consistentes) e são únicas (sistemas determinados), sendo dadas por: $x_v = A^{-1}b_v$ e $\beta_v = X^{-1}y_v$. Existem casos em que A e X não são quadradas, ou mesmo sendo as matrizes A e X quadradas, pode ocorrer de serem singulares (matrizes com determinantes iguais a zero) ou, mesmo, apresentarem postos incompletos. Nestas situações, uma abordagem neste sentido envolve o uso das inversas generalizadas de matrizes.

Alguns tipos de matrizes inversas generalizadas que são importantes na análise estatística são: inversa generalizada de Moore-Penrose, inversa generalizada condicional, inversa generalizada de quadrados mínimos e a inversa generalizada reflexiva (ou inversa-g2).

2.7.1. MATRIZ GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE

Denomina-se matriz generalizada de Moore-Penrose (ou *pseudo-inversa*) de A ($m \times n$), a matriz A^+ ($n \times m$) que satisfaz as condições:

- a. $AA^+A = A$;
- b. $A^+AA^+ = A^+$;
- c. $AA^+ = (AA^+)'$ (simétrica);
- d. $A^+A = (A^+A)'$ (simétrica).

Um procedimento para obter a matriz de Moore-Penrose está apresentado na seção 2.4.

2.7.2. MATRIZ INVERSA GENERALIZADA CONDICIONAL

Inversa generalizada condicional de uma matriz A , de ordem $m \times n$, é uma matriz denotada por A^- , de ordem $n \times m$, que satisfaz a condição: $AA^-A = A$.

Duarte (1996) cita que a inversa de Moore-Penrose é uma inversa condicional (A^-) de A , pois satisfaz a primeira propriedade da inversa de Moore-Penrose; a recíproca, no entanto, não é verdadeira, acrescentando, também, que A^- é “uma” inversa-g de A e não “a” inversa-g de A , pois podem existir muitas matrizes que satisfazem tal condição. A exceção ocorre quando A é não singular, situação em que $A^- = A^{-1}$, sendo, portanto, única. A obtenção de uma matriz inversa generalizada condicional não apresenta uma expressão definida, já que pode haver várias inversas condicionais para uma mesma matriz. Há diversos procedimentos, entre os quais o algoritmo de Searle (1971), o qual consiste em observar as seguintes etapas:

- a) Dada uma matriz A ($m \times n$) de posto (r), retirar de A qualquer submatriz P , não singular e de posto (r), e obter a sua inversa normal P^{-1} e a sua transposta $(P^{-1})'$;
- b) Substituir em A os elementos que constituíram a matriz P pelos correspondentes de $(P^{-1})'$, acrescentando zeros aos elementos restantes. A transposta da matriz resultante é uma inversa condicional.

2.7.3. MATRIZ INVERSA GENERALIZADA DE QUADRADOS MÍNIMOS

É uma matriz muito importante na aplicação da teoria do Método dos Quadrados Mínimos. Os sistemas de equações lineares dessa teoria podem ser resolvidos usando-se as inversas de quadrados mínimos.

Seja uma matriz A ($m \times n$), denota-se A^* de ordem $n \times m$ como uma inversa generalizada de quadrados mínimos de A , se e somente se, a matriz A^* satisfizer as condições:

- a. $AA^*A = A$;
- b. $AA^* = (AA^*)'$ (forma simétrica).

Duarte (1996) menciona que toda matriz inversa de quadrados mínimos é uma inversa condicional (A^-) e que A^+ (Moore-Penrose) é também uma inversa de quadrados mínimos. O mesmo autor cita que uma matriz A^* pode ser obtida a partir de uma matriz inversa condicional por meio da seguinte expressão:

$$A^* = (A'A)^- A'.$$

2.7.4. MATRIZ INVERSA REFLEXIVA OU INVERSA-G2

É assim denominada por atender a duas condições recíprocas (inversa-g2). Este tipo de inversa é, particularmente, importante no uso do sistema estatístico SAS.

Dada uma matriz qualquer A ($m \times n$), uma matriz A^R ou A^{g2} , de ordem $n \times m$, é definida inversa reflexiva de A , se e somente se, atender as condições: $AA^R A = A$ e $A^R AA^R = A^R$. De acordo com Duarte (1996), toda inversa reflexiva é uma inversa condicional (A^-) e que A^+ (Moore-Penrose) é também uma inversa reflexiva.

As inversas reflexivas também não são únicas e uma forma de obtê-las é por meio da expressão $A^R = AA^- A$, ou seja, é possível obter, a partir de uma inversa condicional de A , uma inversa reflexiva de A .

O procedimento de Gauss-Jordan consiste em um algoritmo que utiliza operações pivotais para obtenção de matrizes inversas e inversas generalizadas de matrizes quadradas. O procedimento estabelece uma sequência de passos.

Seja a matriz $A = A^{(0)}$ ($p \times p$) que será repetidamente alterada em $m \leq p$ passos, ou seja, $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$. A matriz resultante $A^{(m)}$ corresponderá à matriz inversa A^{-1} se o posto de $A^{(m)}$ for $m = p$, entretanto, no caso de $m < p$, então será uma matriz inversa generalizada.

Em cada fase do procedimento é escolhido um elemento pivô $a_{jk}^{(i)}$ da matriz $A^{(i)}$. As seguintes condições devem ser obedecidas:

- a. O pivô deve ser diferente de zero;
- b. As linhas e as colunas já usadas para definir o pivô nas $(i-1)$ fases anteriores não podem ser utilizadas novamente.

O ideal é escolher os elementos pivôs na sequência $a_{11}^{(i)}, a_{22}^{(i)}, \dots, a_{pp}^{(i)}$. Escolhe-se o próximo pivô na sequência quando da ocorrência de um pivô nulo, resultando que um número $m \leq p$ de iterações será realizado.

As linhas e colunas não utilizadas como pivô serão preenchidas por zeros. O processo é interrompido quando não existir mais pivô para ser utilizado. O posto da matriz A é definido pelo número de pivôs não nulos utilizados. Ferreira (2011) cita que no caso do resultado ser uma matriz generalizada, a mesma corresponderá à matriz reflexiva (g2),

assim como apresenta os passos do procedimento considerando a escolha do pivô $a_{jj}^{(i)}$, descritos a seguir:

a) Obter os elementos da j -ésima linha e j -ésima coluna de $A^{(i+1)}$:

$$a_{jj}^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}^{(i)}}$$

b) Obter os elementos da j -ésima coluna de $A^{(i+1)}$:

$$a_{kj}^{(i+1)} = -\frac{a_{kj}^{(i)}}{a_{jj}^{(i)}} \quad (k \neq j)$$

c) obter os elementos da j -ésima linha de $A^{(i+1)}$:

$$a_{jl}^{(i+1)} = \frac{a_{jl}^{(i)}}{a_{jj}^{(i)}} \quad (l \neq j)$$

d) obter os elementos das linhas e colunas diferentes de j de $A^{(i+1)}$:

$$a_{kl}^{(i+1)} = a_{kl}^{(i)} - \frac{a_{kj}^{(i)} a_{jl}^{(i)}}{a_{jj}^{(i)}} \quad \forall k, l \neq j$$

Exercício 2.7.1. Obter a inversa da matriz $A^{(0)}$:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Definindo $a_{11}^{(0)} = 1$ como primeiro pivô, tem-se $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 - \frac{2 \times 3}{1} & 2 - \frac{2 \times 1}{1} \\ -1 & 2 - \frac{1 \times 3}{1} & -1 - \frac{1 \times 1}{1} \end{bmatrix} \rightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Definindo $a_{22}^{(1)} = -7$ como segundo pivô, tem-se $A^{(2)}$:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 - (\frac{3 \times -2}{-7}) & \frac{3}{-7} & 1 - (\frac{3 \times 0}{-7}) \\ \frac{2}{-7} & -\frac{1}{-7} & 0 \\ -1 - (\frac{-1 \times -2}{-7}) & -\frac{1}{-7} & -2 - (\frac{-1 \times 0}{-7}) \end{bmatrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -2 \end{bmatrix}$$

Definindo $a_{33}^{(2)} = -2$ como terceiro e último pivô, tem-se $A^{(3)}$:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} - \left(\frac{1 \times -\frac{5}{7}}{-2}\right) & \frac{3}{7} - \left(\frac{1 \times -\frac{1}{7}}{-2}\right) & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} - \left(\frac{0 \times -\frac{5}{7}}{-2}\right) & -\frac{1}{7} - \left(\frac{0 \times -\frac{1}{7}}{-2}\right) & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

A matriz $A^{(3)}$, como tem posto completo, é a inversa regular de $A^{(0)}$.

Exercício 2.7.2. Resolver o sistema de equações.

Obter $x_v = B^R b_v$:

Dado: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases} \quad B^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Observar que $B^{(0)}$ é uma matriz singular, haja vista a terceira linha ser a soma da primeira e da segunda. Então, a matriz inversa generalizada a ser obtida será uma reflexiva g2. Verificar se: $BB^R B = B$ e $B^R BB^R = B^R$.

Definindo $b_{11}^{(0)} = 1$ como primeiro pivô, tem-se $B^{(1)}$:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 - \frac{2 \times 3}{1} & 2 - \frac{2 \times 1}{1} \\ -3 & 2 - \frac{3 \times 3}{1} & 3 - \frac{3 \times 1}{1} \end{bmatrix} \rightarrow B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -7 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Definindo $b_{22}^{(1)} = -7$ como segundo pivô, tem-se $B^{(2)}$:

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{3 \times -2}{-7}\right) & \frac{3}{7} & 1 - \left(\frac{3 \times 0}{-7}\right) \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -3 - \left(\frac{-7 \times -2}{-7}\right) & -1 & 0 - \left(\frac{-7 \times 0}{-7}\right) \end{bmatrix} \rightarrow B^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definindo $b_{33}^{(2)} = 0$ como terceiro e último pivô, tem-se que $B^{(3)}$ é a inversa reflexiva de $B^{(0)}$, haja vista o pivô ser nulo ($b_{33}^{(2)} = 0$). As linhas e colunas não utilizadas como pivô serão preenchidas por zeros.

$$B^R = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_v = B^R b_v = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verificação de:

$$BB^R B = B \text{ e } B^R BB^R = B^R$$

$$BB^R B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = B$$

$$B^R BB^R = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^R$$

O SAS usa o comando ginv, para obter a inversa generalizada de uma matriz A , ou seja, $IGA = \text{ginv}(A)$.

2.8. AUTOVALORES E AUTOVETORES

Os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada são importantes no desenvolvimento teórico das técnicas multivariadas. Os autovalores e autovetores possuem relevância nas estruturas metodológicas, principalmente, dos métodos de componentes principais, de análise de fatores, de análise de correlação canônica e nos testes de significância multivariados.

O pesquisador na área de recursos naturais renováveis, muitas vezes, tem como objetivo identificar fatores ambientais que influenciam a estrutura de um ecossistema natural, avaliando, geralmente, um grande número de variáveis respostas, o que dificulta a visualização das inter-relações entre elas.

Para facilitar essas interpretações, a análise multivariada por meio das análises de componentes principais e de fatores, cria novas variáveis independentes, respectivamente componentes principais e fatores, que são funções lineares das variáveis originais e que são extraídas da estrutura de dispersão das informações

originais. Na análise de variância multivariada é importante obter as variáveis discriminantes ou canônicas para melhor interpretar os resultados.

Essas técnicas consistem em, a partir da matriz de covariância ou de correlação, usando transformação linear, obter uma matriz diagonal Λ onde todos os coeficientes da diagonal principal são formados pelos autovalores λ_i . Estes estão associados a uma matriz formada pelos vetores chamados autovetores representados por eixos ortogonais (produto interno igual a zero).

Autovalores são conhecidos também como raízes características, valores característicos, valores próprios ou latentes. Os autovalores de uma matriz A ($p \times p$) são as soluções da equação determinantal $|A - \lambda I| = 0$ ou $\det(A - \lambda I) = 0$. O determinante é um polinômio de grau p em λ , assim a matriz A ($p \times p$) possuirá p raízes características ou autovalores.

Associado a cada autovalor λ_i de uma matriz quadrada A ($p \times p$) existe um autovetor a_{vi} , também conhecido como vetor característico, vetor próprio ou vetor latente, cujos elementos satisfazem o sistema de equações homogêneas: $(A - \lambda_i I)a_{vi} = 0_v$. Se λ_i e λ_j são raízes características distintas de uma matriz simétrica A , seus vetores associados a_{vi} e a_{vj} são ortogonais. Da teoria dos autovalores e dos autovetores de matrizes:

- a. O produto das p raízes características de A ($p \times p$) é igual ao $\det A$;
- b. A soma das raízes características de A ($p \times p$) será igual ao traço de A ($p \times p$).

O traço de uma matriz quadrada A ($p \times p$) é definido como a soma dos elementos da diagonal principal.

Dado $(A - \lambda_i I)a_{vi} = 0_v$, então $Aa_{vi} = \lambda_i a_{vi}$, assim como se $(A - \lambda_j I)a_{vj} = 0_v$, logo $Aa_{vj} = \lambda_j a_{vj}$.

Pré-multiplicando por a'_{vj} a expressão $Aa_{vi} = \lambda_i a_{vi}$, tem-se: $a'_{vj}Aa_{vi} = \lambda_i a'_{vj}a_{vi}$.

Pré-multiplicando por a'_{vi} a expressão $Aa_{vj} = \lambda_j a_{vj}$, tem-se: $a'_{vi}Aa_{vj} = \lambda_j a'_{vi}a_{vj}$.

Dado que $a'_{vj}Aa_{vi} = a'_{vi}Aa_{vj}$, então $\lambda_i a'_{vj}a_{vi} = \lambda_j a'_{vi}a_{vj}$. Por outro lado, como $a'_{vj}a_{vi} = a'_{vi}a_{vj}$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, logo para atender $\lambda_i a'_{vj}a_{vi} = \lambda_j a'_{vi}a_{vj}$, resulta a solução única: $a'_{vj}a_{vi} = 0$ e $a'_{vi}a_{vj} = 0$, concluindo-se, então, que a_{vi} e a_{vj} são vetores ortogonais.

Os autovetores podem ser definidos satisfazendo a condição de ter comprimento igual à unidade: $a'_{v1}a_{v1} = a'_{v2}a_{v2} = \dots = a'_{vp}a_{vp} = 1$, isto é, normalizados e também mutuamente perpendiculares (ortogonais).

Para qualquer matriz simétrica real existe uma matriz ortogonal P , tal que $P'DP = A$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de A , dispostos na condição $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$, onde r é o número de autovetores não nulos (posto da matriz A). Os autovetores normalizados de A , associados aos autovalores, podem ser tomados como colunas de P . Como A é uma matriz simétrica, então $A = P'DP = PDP'$.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Tem-se da álgebra de matrizes que se A é uma matriz simétrica real, então $A = \lambda_1 a_{v1} a'_{v1} + \lambda_2 a_{v2} a'_{v2} + \dots + \lambda_r a_{vr} a'_{vr}$, onde r é o posto da matriz A . Fazendo-se $L = PD(\sqrt{\lambda_i})$ e $L' = D(\sqrt{\lambda_i})P'$, tem-se que $A = LL'$.

Se a matriz A ($p \times p$) é simétrica definida positiva (posto completo), implica que A tem p pares de autovalores e autovetores, então:

$$A = \lambda_1 a_{v1} a'_{v1} + \lambda_2 a_{v2} a'_{v2} + \dots + \lambda_p a_{vp} a'_{vp}$$

Da álgebra de matrizes, tem-se que os autovetores não são únicos se dois ou mais autovalores são iguais.

Exercício 2.8.1. Obter os autovalores e os autovetores correspondentes à matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0, \text{ pois, } \det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

Os autovalores $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$ são as soluções de $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

Os autovalores ou as raízes características da matriz A são $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$;

O determinante da matriz A é dado pelo produto $\lambda_1 \times \lambda_2 = 7 \times 2 = 14$;

O traço da matriz A é dado pela soma $\lambda_1 + \lambda_2 = 7 + 2 = 9$.

Procedimento para obter os autovetores a_{v1} e a_{v2} associados aos autovalores $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$. Para cada autovalor λ_i de uma matriz quadrada A ($p \times p$) existe um autovetor a_{vi} , cujos seus elementos satisfazem o sistema de equações homogêneas $(A - \lambda_i I)a_{vi} = 0_v$,

então o primeiro passo é obter o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 7$, com a resolução do sistema de equações homogêneas $(A - \lambda_1 I)a_{v1} = 0_v$.

$$(A - 7I)a_{v1} = \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 7 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-7 & 2 \\ 2 & 3-7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultando:
$$\begin{cases} -a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 2a_{11} - 4a_{21} = 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações homogêneas admite infinitas soluções. Considerando a solução para $a_{11} = 1$, então $a_{21} = 1/2 = 0,5$. O próximo passo é transformar o vetor

$$a_{v1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \text{ em um vetor normalizado } \dot{a}_{v1} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \end{bmatrix}.$$

Para que o vetor $\dot{a}_{v1}$ seja considerado um vetor normalizado, o seu comprimento ou norma deve ser igual à unidade. Para transformar a_{v1} em um vetor normalizado $\dot{a}_{v1}$, basta dividir os seus elementos pela sua norma, então:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \\ \dot{a}_{21} &= \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{1,25}} \\ \dot{a}_{v1} &= \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com efeito, pode-se mostrar que $\dot{a}_{v1}$ é um vetor normalizado, pois $\dot{a}'_{v1} \dot{a}_{v1} = 1$:

$$\dot{a}'_{v1} \dot{a}_{v1} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \end{bmatrix} = \dot{a}_{11}^2 + \dot{a}_{21}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1,25}} \right)^2 + \left(\frac{0,5}{\sqrt{1,25}} \right)^2 = \frac{1 + 0,25}{1,25} = 1$$

Tem-se, então, o autovetor normalizado associado ao maior autovalor $\lambda_1 = 7$:

$$\dot{a}_{v1} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Cálculo do autovetor a_{v2} associado ao menor autovalor $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)a_{v2} = \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2 & 2 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a_{12} + 2a_{22} = 0 \\ 2a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações homogêneas admite infinitas soluções. Considerando a solução para $a_{12} = 1$, então $a_{22} = -2$. O próximo passo é transformar o vetor $a_{v2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,

em um vetor normalizado $\dot{a}_{v2} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{22} \end{bmatrix}$.

Seja a transformação do vetor a_{v2} , no vetor normalizado $\dot{a}_{v2}$. Então:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{12} &= \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \dot{a}_{22} &= \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Donde, resulta:

$$\dot{a}_{v2} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Da álgebra de matrizes tem-se que, pela decomposição espectral, dada uma matriz simétrica A , existe uma matriz P , tal que, $A = PDP'$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos correspondem aos autovalores de A . Os vetores característicos da matriz A são tomados como colunas de P .

Verificação de $PDP' = A$, considerando:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

De onde resultaram os autovalores $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$, assim como os autovetores associados normalizados correspondentes:

$$\dot{a}_{v1} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad \dot{a}_{v2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A = [PDP'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1,25}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0,5 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1,25}} & \frac{0,5}{\sqrt{1,25}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado $A = \lambda_1 \dot{a}_1 \dot{a}'_1 + \lambda_2 \dot{a}_2 \dot{a}'_2$, tem-se:

$$\lambda_1 \dot{a}_{v1} \dot{a}'_{v1} = 7 \frac{1}{\sqrt{1,25}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{1,25}} [1 \quad 0,5] = \frac{7}{1,25} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6 & 2,8 \\ 2,8 & 1,4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \dot{a}_{v2} \dot{a}'_{v2} = 2 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{5}} [1 \quad -2] = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,8 \\ -0,8 & 1,6 \end{bmatrix}$$

$$A = \lambda_1 \dot{a}_{v1} \dot{a}'_{v1} + \lambda_2 \dot{a}_{v2} \dot{a}'_{v2} = \begin{bmatrix} 5,6 & 2,8 \\ 2,8 & 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 & -0,8 \\ -0,8 & 1,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz P dos autovetores é ortogonal, sendo A simétrica e D diagonal, então:

$$A = PDP' \quad P'AP = P'PDP'P \quad D = P'AP$$

2.9. FORMAS QUADRÁTICAS

Sejam os vetores $x'_v = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_p]$, $y_v = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_p]$ e a matriz $A (p \times p)$.

$${}_p A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

A expressão $Q(x_v, y_v) = x'_v A y_v$ é denominada de “Forma Bilinear”.

Se $x_v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y_v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tem-se:

$$Q(x_v, y_v) = [x_1 \quad x_2] \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ desenvolvendo-se, tem-se:}$$

$$Q(x_v, y_v) = a_{11}x_1y_1 + a_{21}x_2y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2$$

No caso particular dos vetores serem iguais ($x_v = y_v$) e A uma matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$) para ($i \neq j$), resulta que: $Q(x_v) = x'_v A x_v$ que é denominada de forma quadrática. Seja o exemplo:

$$x_v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (a_{12} = a_{21})$$

$$Q(x_v) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Generalizando para:

$$x_v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad {}_n A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

$Q(x_v) = x'_v A x_v = f(x_1, \dots, x_p)$ que é a expressão da forma quadrática para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_p$, sendo ${}_n A_p$ simétrica. Podendo ser escrita nas seguintes formas:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p a_{ij}x_i x_j$$

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij}x_i x_j$$

A matriz simétrica A ($p \times p$) e suas formas quadráticas associadas são denominadas para todo $x_v \neq 0$, de:

- a. Positiva definida se: $x'_v A x_v > 0$;
- b. Positiva semi-definida se: $x'_v A x_v \geq 0$;
- c. Negativa definida se: $x'_v A x_v < 0$;
- d. Negativa semi-definida se: $x'_v A x_v \leq 0$.

O posto (r) ou característica de uma forma quadrática $Q(x_v) = x'_v A x_v$ é o mesmo da matriz A ($p \times p$). A forma quadrática é dita “singular” se o posto ou característica é $r < p$. Por outro lado, se $r = p$ é classificada como “não singular”.

Em toda forma quadrática definida positiva a matriz A ($p \times p$) dos coeficientes possui posto completo, ou seja, é uma matriz não singular, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, pois admite inversa regular, assim como os seus autovalores são todos positivos.

Seja o exemplo onde se deseja obter o valor máximo de uma forma quadrática $f(x_1, \dots, x_p) = x'_v A x_v$, donde A é uma matriz $p \times p$ positiva definida e o vetor $x'_v = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_p]$ sujeito a restrição $x'_v x_v = 1$. A condição $x'_v x_v = 1$ significa que o vetor x_v possui comprimento igual à unidade.

Seja a equação $L(x_1, \dots, x_p, \lambda)$ segundo o método dos multiplicadores de Lagrange (capítulo 6, seção 6.6):

$$L(x_1, \dots, x_p, \lambda) = x'_v A x_v - \lambda(x'_v x_v - 1)$$

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_p)}{\partial x_v} = 2A x_v - 2\lambda x_v$$

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_p)}{\partial x_v} = 0_v$$

De $2(Ax_v - \lambda x_v) = 0_v$, resulta: $(A - \lambda I)x_v = 0_v$. Então:

$Ax_v - \lambda x_v = 0_v$, onde $Ax_v = \lambda x_v$, tal que pré-multiplicando por x'_v , tem-se:

$$x'_v A x_v = \lambda x'_v x_v, \text{ mas como } x'_v x_v = 1, \text{ resulta: } x'_v A x_v = \lambda.$$

Conforme visto no estudo de autovalores e autovetores, $(A - \lambda I)x_v = 0_v$ é o sistema homogêneo que define os autovalores e os vetores próprios da matriz A , onde os autovalores ou raízes características, ou valores próprios da matriz A são obtidos da equação determinantal $|A - \lambda I| = 0$.

Dada a matriz A positiva definida e as suas raízes características colocadas na ordem decrescente, isto é, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$, então o máximo de $f(x_1, \dots, x_p) = x'_v A x_v$ corresponderá ao maior autovalor λ_1 da matriz. O valor mínimo de $f(x_1, \dots, x_p) = x'_v A x_v$ corresponderá ao menor autovalor λ_p da matriz, pois $x'_v A x_v = \lambda$.

Seja A uma matriz definida positiva $p \times p$ com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ e associados aos autovetores normalizados $a_{v1}, a_{v2}, \dots, a_{vp}$. Tem-se, então:

$$\max_{x_v \neq 0} \frac{x'_v A x_v}{x'_v x_v} = \lambda_1, \text{ atendendo } x_v = a_{v1}$$

$$\min_{x_v \neq 0} \frac{x'_v A x_v}{x'_v x_v} = \lambda_p, \text{ atendendo } x_v = a_{vp}$$

A variância de uma função linear $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p$, de um conjunto de variáveis aleatórias $x_1, x_2, \dots, x_p$, é a forma quadrática $\sigma_{yy} = a'_v \Sigma a_v$, tal que Σ é a matriz de covariância.

Sejam as variáveis aleatórias $x_1, x_2, \dots, x_p$ observadas em um determinado experimento. Deseja-se obter a variância σ_{yy} da função linear $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p$. Então:

$$Var(y) = \sigma_{yy} = Var(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p)$$

$$\sigma_{yy} = E\{[(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p) - E(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p)]^2\}$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{i=1}^p a_{ii}^2 \sigma_{ii} + 2a_i a_j \sum_{i < j}^p \text{cov}(x_i, x_j)$$

Se $\sum_{i < j}^p \text{cov}(x_i, x_j) = 0$, resulta que x_i e x_j são independentes, então σ_{yy} é uma forma quadrática, escrita sob a forma matricial $\sigma_{yy} = a'_v \Sigma a_v$, donde $a'_v = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]$ e Σ é a matriz de covariância das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Matriz de covariância é a matriz simétrica que contém na diagonal principal as variâncias de cada uma das variáveis, e fora da diagonal as covariâncias combinadas aos pares de variáveis. Na análise multivariada a matriz de covariância é o elemento de ponderação que permite estudar a estrutura de dependência das variáveis. Utilizar-se-á a notação Σ para representar a matriz de covariância populacional e S para representar a matriz amostral.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

Deve-se observar que para $(i \neq j)$: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $s_{ij} = s_{ji}$.

2.10. MATRIZ HELMERT

A matriz Helmert é uma matriz quadrada ortogonal, de ordem $p \times p$, de aplicação muito importante na álgebra linear e na teoria de matrizes. Ela foi introduzida por Lancaster (1965), sendo muito utilizada em cálculos matemáticos, em processos estocásticos, na análise de variância e, em especial, em ensaios com parcelas subdivididas. A matriz Helmert (H_p) apresenta a seguinte formatação:

$$H_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} & \frac{1}{\sqrt{p}} & \frac{1}{\sqrt{p}} & \frac{1}{\sqrt{p}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{p}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 \times 2}} & \frac{-1}{\sqrt{1 \times 2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} & \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} & \frac{-2}{\sqrt{2 \times 3}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3 \times 4}} & \frac{1}{\sqrt{3 \times 4}} & \frac{1}{\sqrt{3 \times 4}} & \frac{-3}{\sqrt{3 \times 4}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} & \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} & \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} & \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} & \dots & \frac{-(p-1)}{\sqrt{(p-1)p}} \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz Helmert de ordem p tem a seguinte composição:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{p}} \quad \frac{1}{\sqrt{p}} \quad \cdots \quad \frac{1}{\sqrt{p}} \right]$$

As demais linhas, ou seja, $2 \leq i \leq p$, são formadas por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \quad \cdots \quad \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \quad \frac{-(i-1)}{\sqrt{i(i-1)}} \right]$$

Verifica-se que $1/\sqrt{i(i-1)}$ está alocado em $(i-1)$ itens da i -ésima linha e $0, \dots, 0$ em $(p-i)$ itens da i -ésima linha.

Seja o exemplo da matriz Helmert de quinta ordem:

$$H_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

Seja, por exemplo, a composição da terceira linha. Ela terá $(i-1=2)$ itens iguais a $\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} = \frac{1}{\sqrt{3(3-1)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, depois o item $\frac{-(i-1)}{\sqrt{i(i-1)}} = \frac{-(3-1)}{\sqrt{3(3-1)}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$ e finalizando a composição da terceira seria alocado $(p-i) = 2$ (zeros).

As matrizes Helmert são ortogonais, então: $H'H = HH' = I$, $H^{-1} = H'$, $\det H = 1$. Lemma (1982) cita que as matrizes de Helmert são ortogonais e sustentam as propriedades necessárias para a decomposição ortogonal de matrizes definidas não negativas.

Farhadian & Asadian (2017) mostram que é possível construir uma matriz estocástica a partir de uma matriz Helmert. Eles mostram que se $H = [h_{ij}]$ é uma matriz Helmert, então $P = [h_{ij}^2]$ é uma matriz estocástica, ou seja, $h_{i1}^2 + h_{i2}^2 + \cdots + h_{ip}^2 = 1 \quad \forall i, j \in (1, 2, \dots, p)$.

Lemma (1982) considerando o estreito relacionamento entre as matrizes ortogonais P_p , $P_p'VP_p = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, e as matrizes H_p de Helmert, $H_pSH_p' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $k=1, 2, \dots, p$, achou mais conveniente utilizar a matriz Helmert na decomposição da matriz uniforme de covariância V_p , e assim evitar o uso de algum processo que envolva o uso determinante. A uniformidade de V_p garante sua simetria. Por outro lado, o estudo considerou apenas o caso em que V_p é positiva definida, donde σ^2 é a variância e ρ é o coeficiente de correlação constante.

Na tabela C1, do apêndice C, está apresentado o programa SAS com a aplicação das principais operações com vetores e matrizes.

$$V_p = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

Multinormalidade e estruturas de matrizes de covariâncias

Neste capítulo serão apresentados os testes para algumas pressuposições aplicadas na análise de inventário florestal contínuo, com parcelas permanentes, medidas em ocasiões equidistantes. Destarte, vários temas serão abordados tais como: testes de multinormalidade das extensões multivariadas de assimetria e de curtose de Mardia; teste de multinormalidade de Henze-Zirkler (HZ); teste de uniformidade da matriz de covariância de Wilks; teste de homogeneidade de matrizes de covariâncias; o critério de Mauchly sobre circularidade (esfericidade) de uma matriz; a correção de Greenhouse-Geisser ($g-g$) e a de Huynh e Feldt ($h-f$).

3. INTRODUÇÃO

Diz-se que um vetor aleatório $y'_v = [y_1, y_2, \dots, y_p]$ possui distribuição multinormal de probabilidade, se a função de densidade de probabilidade (*f.d.p.*) de $y_1, y_2, \dots, y_p$ for do tipo:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (y_v - \mu_v)' \Sigma^{-1} (y_v - \mu_v)\right]$$

Σ ($p \times p$): é denominada de matriz de covariância do vetor y_v .

Matriz de covariância é a matriz simétrica que contém na diagonal principal as variâncias de cada uma das variáveis, e fora da diagonal as covariâncias combinadas aos pares de variáveis. Na análise multivariada a matriz de covariâncias é o elemento de ponderação que permite considerar a estrutura de dependência das variáveis.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

No caso de duas variáveis y_1 e y_2 , a função densidade normal bivariada, será:

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]\right\}$$

Johnson & Wichern (1992) apresentam os seguintes exemplos de gráficos de duas distribuições normais bivariadas:

Caso (a): Variâncias iguais ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$) e correlação igual a zero ($\rho_{12} = 0$):

Caso (b): Variâncias iguais ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$) e correlação igual a 0,75 ($\rho_{12} = 0,75$).

Existem vários testes para verificar a multinormalidade de um conjunto de dados. Neste livro, serão empregados os testes de Mardia (1970) que desenvolveu extensões multivariadas de assimetria e de curtose; o teste de Henze-Zirkler (HZ) que se baseia numa distância funcional não negativa e que mede a distância entre as duas funções de distribuição. Se os dados são distribuídos como uma normal multivariada, a estatística do teste HZ é aproximadamente distribuída como uma lognormal.

Johnson & Wichern (1992) citam que algumas técnicas multivariadas assumem que o vetor das observações para grandes amostras possui distribuição multinormal, principalmente as que utilizam distâncias que envolvem vetores de médias. Contudo, a qualidade das inferências feitas por esses métodos depende da proximidade da aderência dos dados à multinormalidade.

A análise multivariada clássica baseia-se no pressuposto de que os dados vêm de uma distribuição normal multivariada. De acordo com Silva (2009), o desenvolvimento de testes multivariados começou com o trabalho de Wayle, em 1968, intitulado “Distribuição beta multivariada e teste para normalidade multivariada”.

3.1. TESTE DE MULTINORMALIDADE DE MARDIA

Mardia (1970, 1974, 1980) introduziu as medidas multivariadas de assimetria e de curtose para testar a multinormalidade. Os testes de Mardia de assimetria e de curtose multivariados são baseados nos terceiro e quarto momentos padronizados. A construção da estatística do teste de Mardia é invariável, os vetores de dados são primeiro padronizados, sendo usado o vetor de médias e a matriz de covariância amostral. A assimetria e a curtose de Mardia são funções de distâncias quadráticas de Mahalanobis, o que torna essas medidas úteis na verificação de dados discrepantes.

Considerando o caso univariado, onde y é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , têm-se:

- a. $\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$: é o coeficiente de assimetria;
- b. $\sqrt{\beta_2} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$: é o coeficiente de curtose;
- c. $\mu_k = E(y - \mu)^k$: são os momentos de ordem k centrados na média μ ;
- d. $\sqrt{\beta_1} = 0$ e $\sqrt{\beta_2} = 3$: no caso da variável y seguir a distribuição normal.

Sejam y_{v1} e y_{v2} dois vetores aleatórios independentes e originários de uma população p -dimensional, apresentando a mesma função densidade de probabilidade com vetor de médias $E(y_v) = \mu_v$ e matriz de covariâncias $E(S) = \Sigma$. Mardia (1970) definiu os coeficientes multivariados de assimetria $\beta_{1,p}$ e o de curtose $\beta_{2,p}$, como uma generalização dos coeficientes de assimetria e de curtose univariados. De acordo com Kankainen, A; Taskinen, S; Oja, H (1991), Kollo (2008), Koizumi, K; Sumikawa, T; Pavlenko, T. (2014), têm-se:

$$\beta_{1,p}(y_v) = E[(y_{v1} - \mu_v)' \Sigma^{-1} (y_{v2} - \mu_v)]^3 \quad \beta_{2,p}(y_v) = E[(y_v - \mu_v)' \Sigma^{-1} (y_v - \mu_v)]^2$$

De acordo com Pontes (2005), na distribuição normal multivariada, a assimetria é nula, ou seja, $\beta_{1,p} = 0$ e a curtose é dada por $\beta_{2,p} = p(p+2)$. As fórmulas para estimar a assimetria e a curtose de um conjunto de dados multivariados são dadas por:

$$\hat{\beta}_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^3 \quad \hat{\beta}_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{ii}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^4$$

Ou,

$$\hat{\beta}_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(y_{vi} - \bar{y})' S_n^{-1} (y_{vj} - \bar{y})]^3 \quad \hat{\beta}_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{vi} - \bar{y}_v)' S_n^{-1} (y_{vi} - \bar{y}_v)]^2$$

n : número de repetições ($y_{v1}, y_{v2}, \dots, y_{vn}$);

$g_{ij} = (y_{vi} - \bar{y}_v)' S_n^{-1} (y_{vj} - \bar{y}_v)$;

$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{vi} - \bar{y}_v)(y_{vi} - \bar{y}_v)'$: é o estimador da matriz de covariância populacional;

$d_i = \sqrt{g_{ii}}$: é a distância amostral de Mahalanobis entre y_{vi} e $\bar{y}$.

Sendo:

- a. $E(\hat{\beta}_{1,p}) = 0$ e $Var(\hat{\beta}_{1,p}) = 6/n$
- b. $E(\hat{\beta}_{2,p}) = p(p+2)(n-1)/(n+1)$ e $Var(\hat{\beta}_{2,p}) = 8p(p+2)/n$

Denotando que o estimador do coeficiente de curtose populacional $\beta_{2,p}$ é viesado, o que não ocorre com o estimador do coeficiente de assimetria $\beta_{1,p}$.

Seja a hipótese H_0 para testar a assimetria: $H_0 : \beta_{1,p} = 0$.

A estatística $n \frac{\hat{\beta}_{1,p}}{6}$ é usada para testar $H_0 : \beta_{1,p} = 0$, a qual é assintoticamente distribuída como uma variável aleatória qui-quadrado com $p(p+1)(p+2)/6$ graus de liberdade.

$$\frac{n\hat{\beta}_{1,p}}{6} \sim \chi^2_{[p(p+1)(p+2)/6]}$$

Seja a hipótese H_0 para testar os desvios de curtose:

$$H_0 : \beta_{2,p} = p(p+2).$$

A estatística $\frac{\hat{\beta}_{2,p} - p(p+2)(n-1)/(n+1)}{\sqrt{8p(p+2)n}}$ é usada para testar $H_0 : \beta_{2,p} = p(p+2)$, a qual é assintoticamente distribuída segundo uma distribuição $N(0,1)$. No caso de grandes amostras, tem-se:

$$\frac{\hat{\beta}_{2,p} - p(p+2)}{\sqrt{8p(p+2)n}} \sim N(0,1)$$

De acordo com Kankainen, A; Taskinen, S; Oja, H (1991), sob multinormalidade $\beta_{1,p}$ e $\beta_{2,p}$ são invariantes afins, todos os terceiro e quarto momentos padronizados são normais assintoticamente independentes e, conseqüentemente, as distribuições são limitantes de n .

3.2. TESTE DE MULTINORMALIDADE DE HENZE-ZIRKLER

De acordo Korkmaz, Goksuluk e Zararsiz (2014), o teste de Henze-Zirkler (HZ) é baseado em uma distância funcional não negativa que mede a distância entre duas funções de distribuição. Se os dados são distribuídos como uma normal multivariada, a estatística do teste tem distribuição aproximadamente log-normal. Inicialmente, são calculados a média, a variância e o parâmetro de suavidade. Em seguida, a média e a variância são log-normalizadas e o p -valor é estimado. Seja HZ a estatística de teste descrita por esses autores:

$$HZ = \frac{1}{n} \sum_i^n \sum_j^n e^{-\frac{\beta^2}{2} D_{ij}} - 2(1 + \beta^2)^{-\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)} D_i} + n(1 + 2\beta^2)^{-\frac{p}{2}} \quad (3.2.1)$$

Onde p é o número de variáveis.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{n(2p+1)}{4} \right]^{\frac{1}{p+4}}$$

$$D_{ij} = (y_{vi} - y_{vj})' S^{-1} (y_{vi} - y_{vj})$$

$$D_i = (y_{vi} - \bar{y}_v)' S^{-1} (y_{vi} - \bar{y}_v)$$

Na equação 3.2.1, D_i é a distância de Mahalanobis ao quadrado da i -ésima observação ao centroide e D_{ij} expressa a distância ao quadrado de Mahalanobis entre a i -ésima e a j -ésima observações. Se os dados são multivariados normais, a estatística do teste (HZ) é aproximadamente log-normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 .

$$\mu = 1 - \frac{a^{-\frac{p}{2}} [1 + p\beta^{\frac{2}{a}} + p(p+2)\beta^4]}{2a^2}$$

$$\sigma^2 = 2(1 + 4\beta)^{-\frac{p}{2}} + \frac{2a^{-p}(1 + 2p\beta^4)}{a^2} + \frac{3p(p+2)\beta^8}{4a^4} - 4\omega_\beta^{-\frac{p}{2}} \left[1 + \frac{3p\beta^4}{2\omega_\beta} + \frac{p(p+2)\beta^8}{2\omega_\beta^2} \right]$$

Donde $a = 1 + 2\beta^2$ e $\omega_\beta = (1 + \beta^2)(1 + 3\beta^2)$. Então, a média e a variância da estatística HZ log-normalizada podem ser calculadas:

$$\log(\mu) = \log \left(\sqrt{\frac{\mu^4}{\sigma^2 + \mu^2}} \right) \quad \log(\sigma^2) = \log \left(\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\sigma^2} \right)$$

Usando os parâmetros da distribuição log-normal, μ e σ , testa-se a normalidade multivariada dos dados. A estatística de teste de Wald, que é simplesmente um teste de escore (z) para normalidade multivariada, é dada por: $z = \frac{\log(HZ) - \log(\mu)}{\log(\sigma)}$.

Existem na literatura outros procedimentos que objetivam verificar a normalidade multivariada, tal como o teste de Kolmogorov-Von-Mises, citados em Pontes (2005), que são baseados no teorema que diz: se um vetor aleatório y_v (p -dimensional) com distribuição normal multivariada, ou seja, $y_v \sim N_p(\mu_v, \Sigma)$, então $(y_v - \mu_v)' \Sigma^{-1} (y_v - \mu_v)$ tem distribuição χ^2 com p graus de liberdade.

$$(y_v - \mu_v)' \Sigma^{-1} (y_v - \mu_v) \sim \chi_p^2$$

As técnicas gráficas univariadas, denominadas de Q-Q plots, podem ser ampliadas para o espaço multidimensional. A generalização é fundamentada no teorema acima descrito.

Melo (2016) cita que a verificação da normalidade de uma distribuição, tanto univariada quanto multivariada, pode ser feita por meio de gráfico, como o denominado de quantil-quantil (Q-Q plot). O gráfico Q-Q plot é uma ferramenta importante para visualizar os valores discrepantes, embora esse procedimento contemple certa subjetividade na sua avaliação, não sendo suficiente para fazer inferência sobre a normalidade dos dados, sendo necessário a aplicação de testes estatísticos. Uma desvantagem do Q-Q plot clássico é que os quantis observados não são independentes, mas apenas identicamente distribuídos, tornando-se independentes apenas assintoticamente.

Nesses gráficos são plotados os percentis amostrais esperados pelo ajuste de uma distribuição normal. Se os pontos estiveram localizados próximos a uma reta de mínimos quadrados a suposição de normalidade deve ser aceita. No caso multivariado, as observações são transformadas em distâncias de Mahalanobis para o vetor de médias amostral, sendo os quantis amostrais e os esperados dessas distâncias plotados para a obtenção do gráfico de quantil-quantil.

Melo (2016) apresenta os passos para a construção do gráfico quantil-quantil:

a) Calcular cada distância de Mahalanobis:

$$D_j^2 = (y_{vj} - \bar{y}_v)' S^{-1} (y_{vj} - \bar{y}_v)$$

b) Efetuar a ordenação dos valores das distâncias (estatísticas de ordem):

$$D_{(1)}^2, D_{(2)}^2, \dots, D_{(j)}^2, \dots, D_n^2$$

c) Calcular χ_j^2 para $(j=1, 2, \dots, n)$:

$$\chi_j^2 = F_{\chi_v^2}^{-1} \left(\frac{j - \frac{1}{2}}{n} \right)$$

$F_{\chi_v^2}^{-1}$: é a função inversa da distribuição qui-quadrado com $v = p$ graus de liberdade.

d) Plotar as coordenadas:

$$(D_{(j)}^2, \chi_{(j)}^2)$$

Deve ser observado que o gráfico só precisa ser usado para grandes amostras, haja vista a distribuição marginal de D_j^2 , sob a hipótese nula, não ser precisamente um qui-quadrado para pequenas amostras.

Melo (2016) apresenta outro método para construção do gráfico de quantil-quantil para dados multivariados, não baseados em distâncias quadráticas, mas usando a transformação “t” de Student.

As análises de multinormalidade, realizadas nas aplicações práticas apresentadas neste livro, foram feitas no programa SAS: % Multinorm Macro: Mardia tests of multivariate normality, version 1.1, disponibilizado pelo SAS Institute Inc., no link: <http://homepages.wmich.edu/~applegab/EMR675/SASFiles/multnorm.sas>

A linguagem de programação “Macro %Multinorm” realiza os testes de normalidade multivariada de Mardia, com base nas estatísticas de assimetria e de curtose, e o de Henze-Zirkler (HZ), assim como, para cada uma das variáveis respostas, executa alguns testes de normalidade univariado. Apresenta o gráfico qui-quadrado quantil-quantil das observações ao quadrado das distâncias de Mahalanobis, o que permite obter uma avaliação visual da normalidade multivariada.

3.3. TESTE DE HOMOGENEIDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIAS CONSIDERANDO P OCASIÕES

Dada a hipótese de nulidade $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$, que representa a pressuposição de homogeneidade de matrizes de covariâncias, considerando g populações normais p dimensionais com vetores de médias μ_{vi} e matrizes de covariâncias Σ_i , assim como a hipótese alternativa $H_A : \Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, donde $i \neq i'$ e n_i é o número de repetições por tratamento.

Seja o teste estatístico desenvolvido por Box (1950), a partir da razão de máxima verossimilhança generalizada:

$$M = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S| - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S_i|$$

S_i e $n_i - 1$ são respectivamente a matriz de covariância amostral e o número de graus de liberdade correspondente ao tratamento i . Então:

$$S = \frac{1}{\sum_{i=1}^g (n_i - 1)} \left[\sum_{i=1}^g (n_i - 1) S_i \right]$$

S : é a matriz de covariância comum amostral e obtida como uma matriz de ponderação das matrizes S_i .

No teste os determinantes das matrizes de covariâncias assumem o conceito de variâncias generalizadas. O teste de Box é uma generalização do teste de Bartlett, citado

em Steel & Torrie (1960), que é utilizado, no caso univariado, para testar a homogeneidade de variâncias:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_g^2$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) L n S^2 - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) L n S_i^2$$

De acordo com BOX (1949), citado por MORRISON (1976), a estatística MC^{-1} é aproximadamente distribuída, quando n_i tende para infinito, como uma variável qui-quadrado (χ^2 assintótico) com $\nu = \frac{1}{2}(g-1)p(p+1)$ graus de liberdade. Onde:

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)} \left[\sum_{i=1}^g \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^g (n_i - 1)} \right]$$

Caso os tratamentos apresentem o mesmo número de repetições, $n_1 = n_2 = \dots = n_g = n$, a fórmula de C^{-1} será dada por:

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g + 1)}{6(p + 1)g \times (n - 1)}$$

Exercício 3.3.1. Dado um experimento bidimensional com três tratamentos A, B e C e dez repetições. Testar se as matrizes de covariâncias S_A , S_B e S_C são homogêneas.

$$H_0 : \Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma_C = \Sigma$$

$$S_A = \begin{bmatrix} 0,0520107626 & 0,0318025028 \\ 0,0318025028 & 0,0316255055 \end{bmatrix} \quad S_B = \begin{bmatrix} 0,0751199608 & 0,0027858932 \\ 0,0027858932 & 0,0249834745 \end{bmatrix}$$

$$S_C = \begin{bmatrix} 0,0212345752 & 0,0020700814 \\ 0,0020700814 & 0,0152507080 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{S_A + S_B + S_C}{3} = \begin{bmatrix} 0,0494551 & 0,0122195 \\ 0,0122195 & 0,0239532 \end{bmatrix}$$

$$M = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) L n |S| - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) L n |S_i|$$

$$DetA = -7,36430 \quad DetB = -6,28235 \quad DetC = -8,04857 \quad DetS = -6,87307$$

$$M = -185,57289 + 195,25698 = 9,68409$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)} \left[\sum_{i=1}^g \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^g (n_i - 1)} \right]$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g+1)}{6(p+1)g(n-1)} = 1 - \frac{52}{486} = 0,893004115 \quad (n_1 = n_2 = n_3 = n = 10)$$

$$MC^{-1} = 8,647932219$$

$$v = \frac{1}{2}(g-1)p(p+1) = 6$$

Dado que $\chi^2_{6;0,01} = 16,8$ e $MC^{-1} = 8,647932219$, a conclusão é pela não rejeição de $H_0 : \Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma_C = \Sigma$, isto é, as matrizes de covariância dos tratamentos A, B e C podem ser consideradas homogêneas.

3.4. TESTE DE UNIFORMIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA CONSIDERANDO P OCASIÕES

É possível analisar um inventário florestal contínuo usando a técnica univariada de parcelas subdivididas, mas, neste caso, a matriz de covariância considerando as p ocasiões deverá ser uniforme. Caso não ocorra a uniformidade, então deve ser aplicado o método multivariado.

A matriz uniforme, ou a que tem a forma simétrica composta, possui variâncias iguais e, também covariâncias iguais entre os pares de ocasiões. No caso de um inventário florestal contínuo, com parcelas permanentes, significa que existe homogeneidade de variâncias considerando as p ocasiões, assim como as covariâncias ou correlações lineares entre as ocasiões são estatisticamente iguais. A hipótese H_0 a ser testada é:

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com Greenhouse & Geisser (1959), na análise de dados de medidas repetidas (análise de perfil), as razões de quadrados médios calculados, usando o modelo misto, só terão uma distribuição exata de F , se as observações no tempo forem normalmente distribuídas com variâncias iguais e mutuamente independentes, ou seja, igualmente correlacionadas. Mas, consideram que essas pressuposições são muito restritivas, então recomendam que as medições no tempo sejam consideradas como um vetor de observações com uma distribuição normal multivariada e matriz de covariância arbitrária.

No caso do inventário contínuo com parcelas permanentes significa que a covariância ou correlação linear entre as ocasiões são estatisticamente iguais. Pode-se verificar a uniformidade da matriz de covariâncias pelo critério de Mauchly (estatística W) ou pelo critério de Wilks (1946).

3.4.1. TESTE DE UNIFORMIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DE WILKS

A pressuposição de igualdade de variâncias e covariâncias, considerando as medidas nas p ocasiões, pode ser testada pelo critério (Δ) de Wilks (1946). Seja a hipótese de nulidade:

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

O teste consiste em obter a estatística $M = -(N - g)Ln\Delta$, onde $(N - g)$ são os graus de liberdade da matriz de covariância que está sendo testada, donde $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_g$.

$$\Delta = \frac{|S|}{|S^*|} = \frac{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & \hat{\rho}s^2 & \cdots & \hat{\rho}s^2 \\ \hat{\rho}s^2 & s^2 & \cdots & \hat{\rho}s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\rho}s^2 & \hat{\rho}s^2 & \cdots & s^2 \end{vmatrix}}$$

$$s^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_{ij} \quad (i = j) \quad \hat{\rho}s^2 = \frac{1}{p(p-1)} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p s_{ij} \quad (i \neq j) \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

s_{ij} : se $(i = j)$ são as variâncias dentro de cada ocasião;

s_{ij} : se $(i \neq j)$ são as covariâncias entre as ocasiões;

S e S^* : são matrizes simétricas, s^2 e $\hat{\rho}s^2$ são as estimativas não tendenciosas de σ^2 e $\rho\sigma^2$.

Calcula-se então a estatística $M = -(N - g)Ln\Delta$, donde $(N - g)$ é o número de graus de liberdade da matriz de covariâncias testada.

A estatística $(1 - A_1)M$, sob a hipótese de nulidade, é aproximadamente distribuída como χ^2 com $v = (p^2 + p - 4)/2$ graus de liberdade.

Então H_0 será aceita se $(1 - A_1)M < \chi^2_{\alpha; (p^2 + p - 4)/2}$. Onde:

$$A_1 = \frac{p(p+1)^2(2p-3)}{6(N-g)(p-1)(p^2 + p - 4)}$$

Exercício 3.4.1.1. Verificar se a matriz S pode ser considerada uma matriz uniforme, ou seja, apresenta homogeneidade de variâncias e correlações iguais entre as ocasiões, donde S é a matriz de covariância comum dos quatro métodos de manejo florestal M1, M2, M3 e M4, referente ao experimento apresentado no capítulo 7, seção 7.7.1, na análise de um inventário florestal com trinta parcelas permanentes e cinco ocasiões. Programa SAS (Proc IML) desenvolvido e apresentado na tabela C2 do apêndice C.

$$S = \begin{bmatrix} 2,1061385 & 2,2793064 & 2,2381011 & 2,1368150 & 1,9697176 \\ 2,2793064 & 4,7718804 & 5,5400208 & 5,8451530 & 5,5819684 \\ 2,2381011 & 5,5400208 & 7,2915454 & 7,9891048 & 7,9497102 \\ 2,1368150 & 5,8451530 & 7,9891048 & 9,3602169 & 9,5140274 \\ 1,9697176 & 5,5819684 & 7,9497102 & 9,5140274 & 10,1532850 \end{bmatrix}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 6,736613 & 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 \\ 5,104392 & 6,736613 & 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 \\ 5,104392 & 5,104392 & 6,736613 & 5,104392 & 5,104392 \\ 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 & 6,736613 & 5,104392 \\ 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 & 5,104392 & 6,736613 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{|S|}{|S^*|} = \frac{\det(S)}{\det(S^*)} = \frac{0,6097049}{192,73143} = 0,00316349$$

$$M = -(N - g) \ln \Delta = -(120 - 4) \ln \Delta = 667,7052$$

$$A_1 = \frac{p(p+1)^2(2p-3)}{6(N-g)(p-1)(p^2+p-4)}$$

$$A_1 = \frac{p(p+1)^2(2p-3)}{6(N-g)(p-1)(p^2+p-4)} = \frac{5(5+1)^2(2 \times 5 - 3)}{6 \times (120 - 4)(5 - 1)(5^2 + 5 - 4)} = \frac{1260}{72384} = 0,0174072$$

$$(1 - A_1)M = (1 - 0,0174072) \times 667,7052 = 656,0823$$

$$\chi_{Cal}^2 = 656,0823 \quad \chi_{(13;0,01)}^2 = 27,7$$

$$v = (p^2 + p - 4) / 2 = (5^2 + 5 - 4) / 2 = 13$$

Dado que $\chi_{Cal}^2 > \chi_{(13;0,01)}^2$, conclui-se que a matriz de covariância comum (S) referente aos quatro métodos de manejo não é uniforme.

3.4.2. CIRCULARIDADE OU ESFERICIDADE DE UMA MATRIZ

Huynh & Feldt (1970) mostram as condições para que as razões de quadrados médios, nos delineamentos de medidas repetidas, possuam distribuições exatas de F . Considerando que os tratamentos sejam multinormais com matrizes de covariâncias $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_g$, em vez de uma matriz comum Σ , estes autores concluem que os testes de significância sobre os efeitos de ocasião e de interação são exatos se, e somente se, os elementos das matrizes dos tratamentos Σ_i ($i = 1, 2, \dots, g$) atendam a seguinte condição, denominada de circularidade ou esfericidade, considerando as $k = 1, 2, \dots, p$ ocasiões:

$$\sigma_{kk'} \begin{cases} a_k + a_{k'} + \lambda & (k = k') \\ a_k + a_{k'} & (k \neq k') \end{cases} \quad (3.4.2.1)$$

A condição 3.4.2.1 é denominada de condição $H-F$. O padrão de uniformidade é um caso particular de circularidade quando $a_k = a_{k'} = \sigma^2 \rho / 2$ e $\lambda = \sigma^2(1 - \rho)$, ou seja:

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

O padrão de uniformidade ou de simetria composta consiste ter igualdade de variâncias no decorrer do tempo, assim como todas as covariâncias sejam iguais. Toda matriz uniforme é circular, mas a recíproca não é verdadeira. As matrizes de covariâncias que possuem variâncias iguais e correlações nulas são casos especiais da condição $H-F$.

Conforme citado em Leal (1979), no caso de uma matriz de covariância, a expressão 3.4.2.1 pode ser escrita também da seguinte forma:

$$\sigma_{kk'} \begin{cases} \bar{\sigma}_{k.} + \bar{\sigma}_{k'.} - \bar{\sigma}_{..} + \lambda(1 - \frac{1}{p}) & (k = k') \\ \bar{\sigma}_{k.} + \bar{\sigma}_{k'.} - \bar{\sigma}_{..} - \frac{\lambda}{p} & (k \neq k') \end{cases} \quad (3.4.2.2)$$

$\bar{\sigma}_{k.}$: é a média dos elementos da k -ésima linha (ou k -ésima coluna) de Σ ($p \times p$);

$\bar{\sigma}_{k'.}$: é a média dos elementos da k' -ésima linha (ou k' -ésima coluna) de Σ ($p \times p$);

$\bar{\sigma}_{..}$: é a média de todos os elementos de Σ ($p \times p$);

A constante λ é a diferença entre as médias das variâncias e as médias das covariâncias. As expressões 3.4.2.1 e 3.4.2.2 também são equivalentes à equação $P' \Sigma P = \lambda I_{(p-1)}$. Onde, ${}_p \Sigma_p$ é a matriz de covariância considerando as p ocasiões e P é uma matriz contraste ortonormal de ordem $p \times (p-1)$.

Tem-se, também, da condição $H-F$, que:

$$\sigma_{kk'}^2 = \frac{\sigma_k^2 + \sigma_{k'}^2}{2} - \lambda \quad (k \neq k')$$

A condição $H-F$ ou condição de esfericidade (ou circularidade) da matriz Σ , também equivale a especificar que as variâncias das diferenças entre pares de ocasiões sejam todas iguais (constante), ou seja: $\sigma^2(y_k - y_{k'}) = 2\lambda \quad (\forall k \neq k')$.

Exercício 3.4.2.1. Para melhor entendimento da condição de $H-F$, seja o exemplo fictício de um experimento com $g = 4$ tratamentos e $n = 30$ parcelas permanentes medidas em $p = 4$ ocasiões, onde $N = ng = 120$, e apresentando a matriz não uniforme A de covariância comum. Usando o programa desenvolvido no SAS, tabela C2 do apêndice C, o resultado do teste de uniformidade de Wilks foi significativo para a matriz A , pois $\chi_{Cal}^2 = 143,15 > \chi_{8,0,01}^2 = 20,1$, tal que: $v = (p^2 + p - 4)/2 = (4^2 + 4 - 4)/2 = 8$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 & 1,2 & 1 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 1,6 \end{bmatrix}$$

a. Calcular o valor da constante λ :

$$\lambda = \frac{10+20+30+40}{4} - \frac{2(5+10+15+15+20+25)}{12} = 25 - 15 = 10$$

b. Calcular os valores:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{..} &= (100 + 2 \times 90) / 16 = 17,5 \\ \lambda(1 - 1/p) &= 7,5 \quad \lambda/p = 2,5 \\ \bar{\sigma}_{1.} &= 10 \quad \bar{\sigma}_{2.} = 15 \quad \bar{\sigma}_{3.} = 20 \quad \bar{\sigma}_{4.} = 25 \end{aligned}$$

c. Obter a matriz atendendo a condição:

$$\sigma_{kk'} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{k.} + \bar{\sigma}_{k'.} - \bar{\sigma}_{..} + \lambda(1 - \frac{1}{p}) & (k = k') \\ \bar{\sigma}_{k.} + \bar{\sigma}_{k'.} - \bar{\sigma}_{..} - \frac{\lambda}{p} & (k \neq k') \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 10 + 10 - 17,5 + 7,5 = 10 & \sigma_{22} &= 15 + 15 - 17,5 + 7,5 = 20 \\
 \sigma_{33} &= 20 + 20 - 17,5 + 7,5 = 30 & \sigma_{44} &= 25 + 25 - 17,5 + 7,5 = 40 \\
 \sigma_{12} &= 10 + 15 - 17,5 - 2,5 = 5 & \sigma_{13} &= 10 + 20 - 17,5 - 2,5 = 10 \\
 \sigma_{14} &= 10 + 25 - 17,5 - 2,5 = 15 & \sigma_{23} &= 15 + 20 - 17,5 - 2,5 = 15 \\
 \sigma_{24} &= 15 + 25 - 17,5 - 2,5 = 20 & \sigma_{34} &= 20 + 25 - 17,5 - 2,5 = 25
 \end{aligned}$$

Resultando:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}$$

Concluindo-se que a matriz A atende a condição $H-F$.

Exercício 3.4.2.2. Verificar se matriz A atende a condição: $\sigma_{kk'}^2 = \frac{\sigma_k^2 + \sigma_{k'}^2}{2} - \lambda$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} &= \frac{10+20}{2} - 10 = 5 & \sigma_{14} &= \frac{10+40}{2} - 10 = 15 & \sigma_{13} &= \frac{10+30}{2} - 10 = 10 \\
 \sigma_{23} &= \frac{20+30}{2} - 10 = 15 & \sigma_{24} &= \frac{20+40}{2} - 10 = 20 & \sigma_{34} &= \frac{30+40}{2} - 10 = 25
 \end{aligned}$$

Conclui-se que a matriz A atende a condição $H-F$.

Exercício 3.4.2.3. Verificar se A atende a condição: $\sigma^2(y_k - y_{k'}) = 2\lambda \quad (\forall k \neq k')$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 V(y_1 - y_2) &= \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12} = 10 + 20 - 2 \times 5 = 2\lambda = 20 \\
 V(y_1 - y_3) &= \sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{13} = 10 + 30 - 2 \times 10 = 20 \\
 V(y_1 - y_4) &= \sigma_{11} + \sigma_{44} - 2\sigma_{14} = 10 + 40 - 2 \times 15 = 20 \\
 V(y_2 - y_3) &= \sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\sigma_{23} = 20 + 30 - 2 \times 15 = 20 \\
 V(y_2 - y_4) &= \sigma_{22} + \sigma_{44} - 2\sigma_{24} = 20 + 40 - 2 \times 20 = 20 \\
 V(y_3 - y_4) &= \sigma_{33} + \sigma_{44} - 2\sigma_{34} = 30 + 40 - 2 \times 25 = 20
 \end{aligned}$$

Conclui-se que a matriz A atende a condição $H-F$.

3.4.3. O CRITÉRIO DE MAUCHLY PARA TESTAR A ESFERICIDADE DE UMA MATRIZ

O método de esfericidade de Mauchly (1940) objetiva verificar se uma população normal multivariada possui uma matriz de covariância esférica, ou seja, suas variâncias são iguais e suas correlações nulas.

O método utiliza, para que a esfericidade seja medida pelo teste, uma matriz C de contrastes ortonormais para transformar a matriz de covariância Σ em uma forma ortonormalizada Σ^* . Caso aceite a hipótese de que Σ^* seja esférica, então a matriz original Σ atenderá a condição $H-F$ que seria a garantia de que, caso a opção seja de usar a análise pelo método univariado de parcelas subdividida, os testes F sejam exatos.

Seja $H_0 : C\Sigma C' = \lambda I_{p-1}$, a hipótese de que a matriz de covariância satisfaz à condição de esfericidade. Seja a estatística W de Mauchly (1940) para testar essa hipótese.

$$W = \frac{(p-1)^{p-1} |CSC'|}{(trCSC')^{p-1}}$$

Donde S é a estimativa da matriz de covariância considerando as p ocasiões e C uma submatriz semiortogonal $(p-1) \times p$ de uma matriz ortogonal Helmert (H) e λ é um dos $p+1$ parâmetros definido na matriz padrão.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{j'}{\sqrt{p}} \\ C \end{bmatrix}$$

Para grandes amostras, quando o número de parcelas permanentes é igual ou superior a 30 unidades, pode-se aplicar a seguinte estatística qui-quadrado:

$$\chi_f^2 = -[v - \frac{2p^2 - 3p + 3}{6(p-1)}] \ln W$$

que apresenta uma distribuição qui-quadrado com $f = \frac{1}{2} p(p-1) - 1$ graus de liberdade.

Onde v é o número de graus de liberdade usado para obter a matriz S .

Para o caso de não atingir a uniformidade desejada e a opção seja de aplicar o método de parcelas subdivididas, pode-se usar a correção de Greenhouse-Geisser ($g-g$) e/ou a de Huynh e Feldt ($h-f$), objetivando corrigir os graus de liberdades correspondentes. Neste caso, corre-se o risco de perder uma boa precisão nas estimativas dos resultados.

Exercício 3.4.3.1. Seja (S) a matriz de covariância comum originada de um inventário florestal com cinco ocasiões e trinta parcelas permanentes. Testar pelo critério de Mauchly se a matriz de covariância (S) pode ser considerada esférica, onde S é a matriz de covariância comum dos quatro métodos de manejo florestal M1, M2, M3 e M4, referente ao experimento apresentado no capítulo 7, seção 7.7.1. A tabela C3, do apêndice C, mostra o programa desenvolvido no SAS para calcular o teste de Mauchly, e obter as correções de Greenhouse-Geisser e de Huynh e Feldt.

$$S = \begin{bmatrix} 2,1061385 & 2,2793064 & 2,2381011 & 2,1368150 & 1,9697176 \\ 2,2793064 & 4,7718804 & 5,5400208 & 5,8451530 & 5,5819684 \\ 2,2381011 & 5,5400208 & 7,2915454 & 7,9891048 & 7,9497102 \\ 2,1368150 & 5,8451530 & 7,9891048 & 9,3602169 & 9,5140274 \\ 1,9697176 & 5,5819684 & 7,9497102 & 9,5140274 & 10,1532850 \end{bmatrix}$$

De acordo com o capítulo 2, seção 2.10, seja a matriz Helmert H (5×5).

$$H_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j' \\ C \end{bmatrix}$$

C: é a submatriz (p-1)×p semiortogonal originada da matriz ortogonal Helmert H (p×p).

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{-4}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071068 & -0,7071068 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4082483 & 0,4082483 & -0,816497 & 0 & 0 \\ 0,2886751 & 0,2886751 & 0,2886751 & -0,866025 & 0 \\ 0,2236068 & 0,2236068 & 0,2236068 & 0,2236068 & -0,894427 \end{bmatrix}$$

$$CSC' = \begin{bmatrix} 1,597031 & 1,13683181 & 0,05273930 & 0,7546776 \\ 1,13683181 & 1,58172321 & 0,53962401 & 0,3209349 \\ 0,05273931 & 0,53962401 & 0,89165881 & 0,7056839 \\ 0,75467761 & 0,32093491 & 0,70568391 & 0,8957967 \end{bmatrix}$$

$$|CSC'| = 0,0599928 \quad tr(CSC') = 6,5288818$$

$$W = \frac{(p-1)^{p-1} |CSC'|}{(trCSC')^{p-1}} = \frac{4^4 \times 0,0599928}{6,5288818^4} = 0,0084525$$

$$\chi_{Cal}^2 = -[v - \frac{2p^2 - 3p + 3}{6(p-1)}] \ln W = -[116 - \frac{2 \times 5^2 - 3 \times 5 + 3}{6(5-1)}] \times -3,459709 = 546,1448$$

$$\chi_{9;0,05}^2 = 21,7 \quad f = \frac{1}{2} p(p-1) - 1 = 9$$

Dado que $\chi_{Cal}^2 > \chi_{9;0,05}^2$, então há razão para considerar que a matriz comum, referente aos quatro métodos de manejo M1, M2, M3 e M4 não é esférica.

3.4.4. CORREÇÃO DE GREENHOUSE-GEISSER (G-G)

Greenhouse e Geisser (1959) mostram que para o caso da matriz de covariância Σ ter a forma geral, as estatísticas F_2 (teste de significância sobre o efeito de ocasião) e F_3 (teste de significância da interação tratamentos versus ocasiões) terem distribuições aproximadas de F central, implica na necessidade de corrigir os correspondentes graus de liberdade, isto é, F_2 deverá ter $(p-1)\epsilon_{gg}$ e $(N-g)(p-1)\epsilon_{gg}$, enquanto que F_3 com $(g-1)(p-1)\epsilon_{gg}$ e $(N-g)(p-1)\epsilon_{gg}$. Tal que:

$$\epsilon_{gg} = \frac{[tr(CSC')]^2}{(p-1)tr[(CSC')^2]} \quad (3.4.4.1)$$

Sendo a condição de circularidades dada por: $C\Sigma C' = \lambda I_{(p-1)}$.

A matriz C de ordem $(p-1) \times p$ define os $p-1$ contrastes ortonormais entre as p medidas no tempo. $I_{(p-1)}$ é a matriz identidade de ordem $p-1$ e λ é um valor maior que zero.

Substituindo $C\Sigma C' = \lambda I_{(p-1)}$, em 3.4.4.1, tem-se que:

$$\epsilon_{gg} = \frac{[tr(\lambda I_{(p-1)})]^2}{(p-1)tr[(\lambda I)^2]} = \frac{[\lambda(p-1)]^2}{(p-1)\lambda^2(p-1)} = 1$$

Como consequência, tem-se que não é necessário fazer correções nos graus de liberdade de F_2 e F_3 , haja vista serem distribuições exatas.

Exercício 3.4.4.1. Verificar se matriz A atende a condição: $CAC' = \lambda I_{(p-1)}$.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}$$

Seja a matriz Helmert H (4×4) e a submatriz semiortogonal C de ordem $(p-1) \times p$.

$$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$$

$$CAC' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \\ 15 & 20 & 25 & 40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$$

$$CAC' = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = 10I_3$$

Conclui-se que a matriz A , onde $\lambda = 10$, atende a condição: $CAC' = \lambda I_{(p-1)}$. Logo a matriz A satisfaz a condição de esfericidade.

Verificação de: $\varepsilon_{gg} = \frac{[tr(\lambda I_{(p-1)})]^2}{(p-1)tr[\lambda I_{(p-1)}]} = \frac{[\lambda(p-1)]^2}{(p-1)\lambda^2(p-1)} = 1$

$$\varepsilon_{gg} = \frac{[tr(\lambda I_{(p-1)})]^2}{(p-1)tr[\lambda I_{(p-1)}]} = \frac{(30)^2}{3 \times 300} = 1$$

$$\varepsilon_{gg} = \frac{[\lambda(p-1)]^2}{(p-1)\lambda^2(p-1)} = \frac{(10 \times 3)^2}{3 \times 10^2 \times 3} = 1$$

$$(tr \lambda I_3)^2 = \lambda^2 tr \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \times tr \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 300$$

O estimador de verossimilhança de ε_{gg} , citado em Leal (1979), também pode ser dado por:

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{p^2 (\bar{s}_d - \bar{s}_{..})^2}{(p-1) \left[\sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p (s_{kk'})^2 - 2p \sum_{k=1}^p (\bar{s}_{k.})^2 + p^2 (\bar{s}_{..})^2 \right]}$$

Seja S a matriz de covariância considerando as p condições ($k = 1, 2, \dots, p$):

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$\bar{s}_d$: média das variâncias da diagonal da matriz de covariância amostral S ;

$\bar{s}_{..}$: média geral considerando todas as variâncias e covariâncias ($p \times p$) elementos de S ;

$\sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p (s_{kk'})^2$: soma de quadrados de todos os elementos (variâncias e covariâncias) da matriz S ($k, k' = 1, 2, \dots, p$);

$\sum_{k=1}^p (s_{k.})^2$: soma de quadrados das médias dos elementos da k -ésima coluna da matriz de covariância amostral (S). Box (1954) mostra que: $\frac{1}{(p-1)} \leq \varepsilon_{gg} \leq 1$.

Greenhouse & Geisser (1959) sugerem utilizar o seguinte procedimento de três estágios descritos da seguinte forma:

- Considerar $\varepsilon_{gg} = 1$ e usar o teste exato F , ou seja, não usar as correções dos graus de liberdade. No caso de o teste não ser significativo, ou seja, não rejeitar a hipótese H_0 , o procedimento é encerrado; caso contrário, isto é, se houver rejeição de H_0 , aplicar o próximo estágio (b);
- Como houve rejeição de H_0 no primeiro estágio, então usar a correção $\varepsilon_{gg} = 1/(p-1)^{-1}$, fazendo com que haja uma grande redução nos números de graus de liberdade. No caso de o teste ser significativo, isto é, se a hipótese for rejeitada, o procedimento é encerrado. Caso contrário, passar para o último estágio (c);
- Usar o teste aproximado F com $\hat{\varepsilon}_{gg}$ estimado a partir da matriz de covariância amostral.

Exercício 3.4.4.2. Seja a matriz comum de covariância S originada de um inventário florestal contínuo com cinco ocasiões e trinta parcelas permanentes. Obter a correção de Greenhouse-Geisser, sendo S a matriz de covariância comum dos quatro métodos de manejo florestal M1, M2, M3 e M4 referente ao experimento apresentado no capítulo 7, seção 7.7.1, exemplo de um inventário florestal contínuo para fins de manejo florestal.

$$S = \begin{bmatrix} 2,1061385 & 2,2793064 & 2,2381011 & 2,1368150 & 1,9697176 \\ 2,2793064 & 4,7718804 & 5,5400208 & 5,8451530 & 5,5819684 \\ 2,2381011 & 5,5400208 & 7,2915454 & 7,9891048 & 7,9497102 \\ 2,1368150 & 5,8451530 & 7,9891048 & 9,3602169 & 9,5140274 \\ 1,9697176 & 5,5819684 & 7,9497102 & 9,5140274 & 10,1532850 \end{bmatrix}$$

a) Usando a expressão:

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{p^2 (\bar{s}_d - \bar{s}_{..})^2}{(p-1) \left[\sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p (s_{kk'})^2 - 2p \sum_{k=1}^p (\bar{s}_{k.})^2 + p^2 (\bar{s}_{..})^2 \right]}$$

$$\bar{s}_d = 6,7366134 \quad \bar{s}_{..} = 5,43083662 \quad \sum_{k=1}^p (s_{k.})^2 = 164,182995 \quad \sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p (s_{kk'})^2 = 935,489194$$

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{5^2 (6,7366134 - 5,43083662)^2}{4(935,489194 - 2 \times 5 \times 164,182995 + 5^2 \times 5,43083662^2)} = 0,3437$$

b) No caso da expressão:

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{[tr(CSC')]^2}{(p-1)tr[(CSC')^2]}$$

$$CSC' = \begin{bmatrix} 1,15970311 & 1,13683181 & 0,05273930 & 0,7546776 \\ 1,13683181 & 1,58172321 & 0,53962401 & 0,3209349 \\ 0,05273931 & 0,53962401 & 0,89165881 & 0,7056839 \\ 0,75467761 & 0,32093491 & 0,70568391 & 0,8957967 \end{bmatrix}$$

$$(CSC')^2 = \begin{bmatrix} 4,31509635 & 7,3424346 & 2,4982375 & 6,032386 \\ 5,73424347 & 9,0954608 & 7,9758728 & 0,776307 \\ 6,24982378 & 7,9758729 & 9,6643269 & 2,884236 \\ 5,60323868 & 0,7763079 & 2,8842368 & 8,178098 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{[tr(CSC')]^2}{(p-1)tr[(CSC')^2]} = \frac{(6,5288818)^2}{4 \times 31,008885} = 0,3437$$

c) Utilizando a expressão:

$$\hat{\varepsilon}_{gg} = \frac{(\sum_{i=1}^q a_{ii})^2}{(p-1) \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q a_{ij}^2} = \frac{6,5288818^2}{4 \times 31,0088847} = 0,3437$$

Sendo $(CSC') = [a_{ij}]$. Note que: $1 \geq \varepsilon_{gg} \geq \frac{1}{p-1} = 0,25$.

3.4.5. CORREÇÃO HUYNH E FELDT (H-F)

Collier et al. (1967) e Stoloff (1970) efetuando simulações verificaram que a correção ε_{gg} é negativamente viesada para valores próximos de um e também negativamente viesada para valores baixos de ε_{gg} , principalmente quando o número de observações é pequeno. Huynh & Feldt (1976) desenvolveram a correção ε_{hf} que é menos viesada do que quando $\varepsilon_{gg} \geq 0,75$. Esta correção pode atingir valores maiores do que um, mas, neste caso, se considera $\varepsilon_{hf} = 1$.

$$\varepsilon_{hf} = \frac{N(p-1)\varepsilon_{gg} - 2}{(p-1)[N - g - (p-1)\varepsilon_{gg}]}$$

Exercício 3.4.5.1. Seja a matriz de covariância S, citada no exercício 3.4.4.2, originada de um inventário florestal contínuo com cinco ocasiões e trinta parcelas permanentes. Obter a correção de Huynh e Feldt (h-f). Dado que $\hat{\varepsilon}_{gg} = 0,3436619662$. Então:

$$\hat{\varepsilon}_{hf} = \frac{120 \times (5-1) \times 0,3436619662 - 2}{(5-1)[120 - 4 - (5-1) \times 0,3436619662]} = \frac{162,95774378}{458,50140854} = 0,3554$$

Capítulo 4

Análise de variância multivariada

Este capítulo aborda definições, conceitos e aplicações da análise de experimentos multidimensionais que são importantes subsídios no estudo de análise perfil. Apresenta também os seguintes temas: análise multivariada para testar um vetor de médias de tratamento versus um vetor padrão populacional; análise para testar vetores de médias de dois tratamentos independentes; análise de variância multivariada do ensaio inteiramente ao acaso; princípio da união-intersecção de Roy; estatísticas para testar a hipótese linear geral $H: C\beta U = \phi$, lambda de Wilks, a maior raiz característica de Roy, traço de Pillai e o traço de Hotelling-Lawley; análise de variância univariada e teste de Tukey usando a função discriminante ou variável canônica.

4. INTRODUÇÃO

A estatística multivariada é o ramo da estatística devotado ao estudo das amostras e distribuições multidimensionais, consistindo em planejar a coleta de dados das parcelas, analisar e interpretar as observações, de modo que em cada unidade amostral são feitas mensurações para duas ou mais variáveis respostas.

$$\langle PARCELA \rangle \Rightarrow y'_v = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]$$

y'_v : é o vetor resposta considerando p variáveis.

KENDALL (1950) classifica as técnicas multivariadas em dois grupos:

a) Técnicas que estudam as interdependências de um conjunto de variáveis:

- a1) Análise de agrupamento;
- a2) Análise de componentes principais;
- a3) Análise de fatores.

b) Técnicas que estudam as dependências de uma ou mais variáveis em relação às outras:

- b1) Análise discriminante;
- b2) Análise de variância multivariada;
- b3) Análise de medidas repetidas;
- b4) Análise de regressão multivariada;
- b5) Análise de correlação canônica.

4.1. ANÁLISE MULTIVARIADA PARA TESTAR UM VETOR DE MÉDIAS DE TRATAMENTO VERSUS UM VETOR PADRÃO POPULACIONAL

Dado um vetor y_v de variáveis com distribuição normal p -dimensional, apresentando vetor de médias μ_v e matriz de covariância não singular Σ .

Seja $H_0 : \mu_v = \mu_{0v}$ vs $H_A : \mu_v \neq \mu_{0v}$:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \vdots \\ \mu_{0p} \end{bmatrix} \text{ versus } H_A : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \vdots \\ \mu_{0p} \end{bmatrix}$$

Seja uma combinação linear arbitrária $\mathbf{a}'_v \mathbf{y}_v$ das p variáveis, sendo $\mathbf{a}_v \neq \mathbf{0}_v$, donde $\mathbf{a}_v \in \mathbf{R}$.

Então:

$$\begin{aligned} E(a'_v y_v) &= a'_v \mu_v \\ V(a'_v y_v) &= a'_v \sum a_v \\ a'_v y_v &\sim N(a'_v \mu_v, a'_v \sum a_v) \end{aligned}$$

Na construção do teste para verificar se o vetor de médias de interesse é diferente de um vetor padrão, pode-se usar o princípio de união-intersecção de Roy (1953,1957).

$$H_0(a_v): a'_v \mu_v = a'_v \mu_{v0}$$

$a'_v \mu_{v0}$: é uma combinação linear das médias populacionais (padrão).

$$t(a_v) = \frac{a'_v \bar{y}_v - a'_v \mu_{v0}}{\sqrt{\frac{a'_v S a_v}{n}}} = \frac{a'_v (\bar{y}_v - \mu_{v0}) \sqrt{n}}{\sqrt{a'_v S a_v}}$$

A significância ocorrerá quando: $t_{(a_v)}^2 > t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)}^2$, tal que n é o número de repetições.

No princípio da união-intersecção de Roy, a hipótese $H_0: a'_v \mu_v = a'_v \mu_{v0}$ será verdadeira se, somente se, $H_0: a'_v \mu_v = a'_v \mu_{v0}$ for verdadeira para todo $a_v \neq 0$. A não rejeição de $H_0: a'_v \mu_v = a'_v \mu_{v0}$ é equivalente a aceitar todas as possíveis hipóteses univariadas efetuadas, variando os elementos que constituem o vetor a_v , ou seja, consiste em procurar a combinação linear das variáveis que melhor discrimine os tratamentos. A combinação linear melhor indicada é aquela que produz o maior valor para a estatística univariada utilizada, por exemplo, t de Student ou F de Snedecor.

Morrison (1976) cita que pelo princípio de união-intersecção de Roy, a região multivariada de aceitação de H_0 é a intersecção de todas as possíveis regiões de aceitação das hipóteses univariadas e simbolicamente representada por: $\bigcap_{a_v} [t_{(a_v)}^2 \leq t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)}^2]$,

significando que todas as estatísticas $t_{(a_v)}^2$ pertencem à região de aceitação de H_0 para qualquer vetor a_v , o que equivale a dizer que o máximo valor de $t_{(a_v)}^2$ também pertence à região de aceitação de H_0 , isto é, $T^2 = \max[t_{(a_v)}^2 \leq t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)}^2]$. Esta estatística é chamada de T^2 de Hotelling.

Dado que, na expressão 4.1.1, $t_{(a_v)}^2$ é invariante a mudança de escala do vetor a_v , então, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange com a restrição $a'_v S a_v = 1$, para obter o valor máximo, tem-se a equação 4.1.2.

$$t^2(a_v) = \frac{a'_v(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'a_v \times n}{a'_v S a_v} \quad (4.1.1)$$

$$Z = a'_v(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'a_v \times n - \lambda(a'_v S a_v - 1) \quad (4.1.2)$$

Diferenciando 4.1.2 em relação ao vetor a_v e anulando a equação resultante, tem-se:

$$[(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n - \lambda S]a_v = 0$$

Pré-multiplicando por a'_v , então:

$$\lambda = \frac{a'_v(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'a_v n}{a'_v S a_v} = \frac{[a'_v(\bar{y}_v - \mu_{v0})]^2 n}{a'_v S a_v} = t^2(a_v)$$

MORRISON (1976) mostra que λ é também a única raiz não nula da equação determinantal.

$$|S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n - \lambda I| = 0$$

Então, desde que λ é a única raiz não nula, o máximo para a estatística $t^2_{(a_v)}$, é:

$$\lambda = \text{tr}[S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n]$$

Com efeito, têm-se:

$$\lambda = n(\bar{y}_v - \mu_{v0})'S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})$$

$$T^2 = n(\bar{y}_v - \mu_{v0})'S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0}) \quad (4.1.3)$$

A forma quadrática 4.1.3 é denominada de estatística de Hotelling. Da estatística multivariada quando a hipótese H_0 é verdadeira, tem-se:

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2, \text{ tal que } F_{(\alpha; p, n-p)}$$

A natureza da estatística T^2 de Hotelling permite verificar quais variáveis possibilitam a rejeição de H_0 .

$$[a'_v \bar{y}_v - \sqrt{\frac{1}{n} a'_v S a_v T^2_{(\alpha; p, n-p)}} \leq a'_v \mu_v \leq a'_v \bar{y}_v + \sqrt{\frac{1}{n} a'_v S a_v T^2_{(\alpha; p, n-1)}}]$$

$a'_v = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]$, tal que, a localização do valor 1 (um) no vetor a_v caracteriza a i -ésima variável resposta.

Se o intervalo incluir o valor correspondente à combinação linear das médias em estudo, há razão para concluir que a mesma não contribui para a rejeição de H_0 .

Morrison (1976) demonstra que a estatística T^2 de Hotelling não é afetada apenas por mudanças de unidade da variável resposta, mas é invariante sob todas as transformações da forma $y = Cx + d_v$ das observações e de hipóteses, donde C é qualquer matriz não singular $p \times p$ e d_v é um vetor de ordem $p \times 1$.

4.1.1. Exercício. Uma determinada espécie florestal (E1) possui em seu país de origem, com respeito às variáveis y_1 = volume de madeira em $m^3/0,10$ ha e y_2 = produção de sementes em kg, o comportamento aos sete anos de idade de $\mu'_0 = [\bar{y}_1, \bar{y}_2] = [4,5 \ 0,9]$. O objetivo é verificar o seu desempenho em outro país (teste de procedência). Foram instaladas dez parcelas de 0,10 ha que após sete anos apresentaram os resultados (tabela 4.1.1). Testar o vetor de médias do tratamento contra o vetor padrão $\mu'_0 = [4,5 \ 0,9]$. Mostrar que λ é a única raiz não nula da equação determinantal:

$$|S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n - \lambda I| = 0.$$

Tabela 4.1.1 - Volume de madeira e produção de sementes de E1.

Parc.	E1		Parc.	E1	
	y_1	y_2		y_1	y_2
1	4,59461	1,01091	6	4,49093	1,03807
2	4,83847	1,09984	7	4,34527	1,01440
3	4,63485	1,36393	8	4,76123	1,24293
4	4,13427	0,75682	9	4,85951	1,28071
5	4,41401	0,99222	10	4,54754	0,96189

a) Testar $H_0 : \mu_v = \mu_{v0}$ versus $H_A : \mu_v \neq \mu_{v0}$:

Dado que $T^2 = n(\bar{y}_v - \mu_{v0})'S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})$ e $F = \frac{n-p}{(n-1)p}T^2$ que sob H_0 possui $(p,n-p)$ graus de liberdade, tem-se:

$$\bar{y}_v = \begin{bmatrix} 4,5621 \\ 1,0762 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0,0520108 & 0,0318025 \\ 0,0318025 & 0,0316255 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_v - \mu_{v0} = \begin{bmatrix} 0,0621 \\ 0,1762 \end{bmatrix}$$

$$\det S = 0,0006334685$$

$$S^{-1} = \frac{1}{0,0006334685} \begin{bmatrix} 0,0316255055 & -0,0318025028 \\ -0,0318025028 & 0,0520107626 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49,924341 & -50,20376 \\ -50,20376 & 82,04787 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = n(\bar{y}_v - \mu_{v0})'S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})$$

$$T^2 = 10 \begin{bmatrix} 0,0621 & 0,1762 \\ -50,20376 & 82,104787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49,924341 & -50,20376 \\ -50,20376 & 82,104787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0621 \\ 0,1762 \end{bmatrix} = 16,429291$$

$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2$ que sob H_0 possui p e $n-p$ graus de liberdade.

$$F = \frac{10-2}{2(10-1)} \times 16,429291 = 7,3019$$

Conclui-se pela rejeição de H_0 , pois $F_{2;8;0,05} = 4,46$.

b) Verificar se λ é a única raiz não nula da equação determinantal:

$$|S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n - \lambda I| = 0$$

Seja $A = S^{-1}(\bar{y}_v - \mu_{v0})(\bar{y}_v - \mu_{v0})'n$, então:

$$A = \begin{bmatrix} 49,924341 & -50,20376 \\ -50,20376 & 82,104787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0621 \\ 0,1762 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,178 & 0,104 \end{bmatrix} \times 10 = \begin{bmatrix} -3,568018 & -10,12375 \\ 7,0478595 & 19,997308 \end{bmatrix}$$

Tem-se que $\det(A) = 0$ e $tr(A) = -3,568018 + 19,997308 = 16,42929$. Então: $T^2 = 16,42929$.

Seja $|A - \lambda I| = 0$, logo:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -3,568018 & -10,12375 \\ 7,0478595 & 19,997308 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} -3,568018 - \lambda & -10,12375 \\ 7,0478595 & 19,997308 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-71,35076 + 3,568018\lambda - 19,997308\lambda + \lambda^2 + 71,35076 = 0$$

$$\lambda^2 - 16,42929\lambda = 0 \rightarrow \lambda - 16,42929 = 0 \rightarrow T^2 = \lambda = 16,42929$$

Conclui-se que a estatística T^2 de Hotelling é igual ao único autovalor da matriz A e, obviamente, é igual ao seu traço.

4.2. ANÁLISE MULTIVARIADA PARA TESTAR VETORES DE MÉDIAS PARA DOIS TRATAMENTOS INDEPENDENTES

Sejam duas amostras aleatórias independentes, observações de p variáveis mensuradas em uma mesma unidade amostral, originárias de duas populações multinormais e com matrizes de covariâncias homogêneas.

Muitas vezes durante as pesquisas desenvolvidas na engenharia florestal, o pesquisador pode ter interesse em comparar se dois povoamentos possuem características semelhantes, com respeito a um conjunto de p variáveis, como por exemplo, as variáveis florísticas, dendrométricas, produção de sementes, de resinas e etc,

Seja a hipótese: $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2}$ versus $H_A : \mu_{v1} \neq \mu_{v2}$. Para testar a igualdade de dois vetores de médias provenientes de duas populações independentes, aplica-se a estatística:

$$T^2 = \frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})$$

A estatística T^2 pode ser escrita em função da estatística F , que sob $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2}$ possui distribuição F com p e $(n_1 + n_2 - p - 1)$ graus de liberdade, através da expressão:

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2$$

A verificação da contribuição de cada variável na significância dos tratamentos, no caso da rejeição de $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2}$, pode ser obtida pelo intervalo de confiança, através da seguinte expressão.

$$[a'_v (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) - \sqrt{a'_v S a_v \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} T^2_{(\alpha; p, n_1 + n_2 - p - 1)}} \leq a'_v (\mu_{v1} - \mu_{v2}) \leq a'_v (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) + \sqrt{a'_v S a_v \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} T^2_{(\alpha; p, n_1 + n_2 - p - 1)}}]$$

$a'_v = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]$, tal que, a localização do valor 1 (um) no vetor a_v caracteriza a i -ésima variável resposta.

Se o intervalo incluir o valor correspondente à combinação linear das médias em estudo, há razão para concluir que a mesma não contribui para a rejeição de H_0 .

Exercício 4.2.1. Comparar as espécies florestais E1 e E2, com 10 anos de idade, com respeito às variáveis $y1$ = produção de sementes em kg/ha e $y2$ = produção de resinas em kg/ha. O ensaio consistiu de 10 parcelas que apresentaram os resultados mostrados na tabela 4.2.1.

Tabela 4.2.1 - Produção de sementes e de resina de E1 e E2.

Parc.	E1		E2		Parc.	E1		E2	
	y1	y2	y1	y2		y1	y2	y1	y2
1	4,5946	1,0109	4,6276	1,1316	6	4,4909	1,0381	4,5962	0,8952
2	4,8385	1,0998	4,5779	0,8095	7	4,3453	1,0144	4,7396	1,1269
3	4,6348	1,3639	4,6314	0,9600	8	4,7612	1,2429	4,5621	0,9993
4	4,1343	0,7568	4,3747	0,8520	9	4,8595	1,2807	4,7066	0,9983
5	4,4140	0,9922	4,5553	0,8244	10	4,5475	0,9619	4,9366	0,8054

$$H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} \text{ versus } H_A : \mu_{v1} \neq \mu_{v2}$$

$$\bar{y}_{v1} = \begin{bmatrix} 4,5621 \\ 1,0762 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_{v2} = \begin{bmatrix} 4,6308 \\ 0,9403 \end{bmatrix} \quad (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) = \begin{bmatrix} -0,0687 \\ 0,1359 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,0520108 & 0,0318025 \\ 0,0318025 & 0,0316255 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0,0212346 & 0,0020701 \\ 0,0020701 & 0,0152506 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \begin{bmatrix} 0,0366227 & 0,0169363 \\ 0,0169363 & 0,0234381 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 41,009566 & -29,63345 \\ -29,63345 & 64,078753 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})$$

$$T^2 = \left(\frac{10 \times 10}{10 + 10} \right) \begin{bmatrix} -0,0687 & 0,1359 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 41,009566 & -29,63345 \\ -29,63345 & 64,078753 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,0687 \\ 0,1359 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 9,6517305$$

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2 \text{ que sob } H_0 \text{ possui } p, n_1 + n_2 - 2 \text{ graus de liberdade:}$$

$$F = \frac{(10 + 10 - 2 - 1)}{(10 + 10 - 2)2} \times 9,6517305 = 4,56^* \quad (F_{2,18;0,05} = 3,55)$$

Conclui-se que as espécies E1 e E2 apresentam vetores de médias diferentes.

4.3. MODELO LINEAR UNIVARIADO PARA MAIS DE DOIS TRATAMENTOS

Sejam y_{ij} observações independentes de um ensaio inteiramente ao caso com g tratamentos, apresentando efeitos fixos, com distribuição normal com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$ e variância comum desconhecida.

Seja o modelo linear: $y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$.

μ : média geral comum a todos os tratamentos;

τ_i : efeito devido ao i = ésimo tratamento ($i = 1, \dots, g$);

e_{ij} : erro residual com distribuição normal com média zero e variância σ^2 .

Seja a hipótese de efeitos iguais de tratamentos para o modelo $y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g$$

Reparametrizado o modelo para $y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$, tal que $\mu_i = \mu + \tau_i$, a hipótese passa a ser escrita como: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$. Matricialmente, o modelo reparametrizado, apresenta a seguinte forma: $Y_v = X\beta_v + \varepsilon_v$.

$${}_N X_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \beta'_v = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g] \quad \varepsilon'_v = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]$$

Considerando n_i repetições por tratamentos e $N = n_1 + n_2 + \dots + n_g$, tem-se:

$${}_N Y_1 = {}_N X_g \times_g \beta_1 + {}_N \varepsilon_1.$$

${}_N Y_1$: vetor dos dados;

${}_N X_g$: denominada de matriz de planejamento.

A combinação linear dos parâmetros $a'_v \beta_v$, considerando o modelo reparametrizado, é estimável se existir uma função linear $a'_v \hat{\beta}_v$ das observações, tal que: $E(a'_v \hat{\beta}_v) = a'_v \beta_v$. Seja $\hat{\beta}_v = (X'X)^{-1} X'Y_v$ o estimador de mínimos quadrados ou de máxima verossimilhança de β_v . A estimativa do componente $a'_v \beta_v$ de variância mínima pelos métodos de quadrados mínimos e de máxima verossimilhança é:

$$a'_v \hat{\beta}_v = a'_v (X'X)^{-1} X'Y_v \quad \hat{\beta}'_v = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_g]$$

Para o modelo reparametrizado, tem-se:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n_g} \end{bmatrix}$$

Resultando: $\hat{\beta}'_v = (X'X)^{-1} X'Y_v = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_g]$.

Portanto, considerando a'_v como um vetor unitário, sendo $\hat{\beta}_v$ o vetor das médias amostrais dos g tratamentos, então, se $a'_v \beta_v$ é uma função qualquer estimável, logo sua estimativa não tendenciosa de variância mínima será a combinação linear ($a'_v \hat{\beta}_v$) das médias amostrais dos (g) tratamentos. Se o vetor a'_v tiver a configuração $a'_v = [0, \dots, 1, \dots, 0]$, ou seja, com o número 1 em uma posição caracterizando o i -ésimo tratamento, então a média μ_i populacional é estimável, tendo $\bar{y}_i$ como sua estimativa de variância mínima.

Destarte, então, qualquer contraste $\theta = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_g \mu_g$ é estimável e sua estimativa de variância mínima é $\hat{\theta} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \dots + c_g \bar{y}_g$. O contraste $\theta = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_g \mu_g = 0$, sob H_0 , pode ser escrito matricialmente como: $H_0 : C\beta_v = 0$, donde C ($r \times g$) de posto r é a matriz responsável pelo estabelecimento dos contrastes. A hipótese alternativa é dada por $H_A : C\beta_v \neq 0$. A estatística para testar $H_0 : C\beta_v = 0$, será:

$$F = \frac{(N - g)[Y'_v X (X'X)^{-1} C'][C(X'X)^{-1} C']^{-1}[C(X'X)^{-1} X'Y_v]}{rY'_v[I - X(X'X)^{-1} X']Y_v} \quad (4.3.1)$$

O valor calculado F , se a hipótese H_0 é verdadeira, terá distribuição F com r e $N - g$ graus de liberdade. Então, não se rejeita H_0 se $F_{(a)} \leq F_{(\alpha; r, N - g)}$.

A hipótese H_0 pode se escrita nas formas: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$, ou, $H_0 : C\beta_v = 0_v$. Os valores de $F_{(a)} \leq F_{(\alpha; r, N - g)}$ serão os mesmos considerando as seguintes matrizes C .

a) Usando contrastes entre tratamentos consecutivos:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Considerando os contrastes sempre em relação ao primeiro tratamento:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Utilizando os contrastes sempre em relação ao último tratamento:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para a estatística F , considerando as três matrizes citadas, será usado na expressão 4.3.1 o valor $r = g - 1$, haja vista que os resultados serão os mesmos qualquer que seja a maneira de construir os contrastes.

4.4. ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA DO ENSAIO INTEIRAMENTE AO ACASO

A análise de variância multivariada (MANAVA) é uma generalização da análise de variância univariada (ANOVA), então, para facilitar o entendimento, é importante estudar o caso do ensaio inteiramente ao acaso. O objetivo da análise de variância multivariada é efetuar a comparação de tratamentos experimentais, onde cada tratamento é composto por n_i parcelas ou repetições que são medidas considerando p variáveis ou respostas.

Os tratamentos devem ser estabelecidos de forma independentes e apresentar uma matriz comum de covariância Σ de ordem $p \times p$, assim como atender a pressuposição básica de que os vetores das observações devem possuir uma distribuição multinormal p -dimensional.

Seja o modelo matemático tal que y_{ijk} representa cada observação:

$$y_{ijk} = \mu_j + t_{ij} + e_{ijk}$$

$i = 1, 2, \dots, g$: indicando o i -ésimo tratamento (g : número de tratamentos);

$j = 1, 2, \dots, n_i$: caracterizando a j -ésima repetição dentro do i -ésimo tratamento (n_i : número de repetições em g_i);

$k = 1, 2, \dots, p$: representando a k -ésima variável resposta (p : número de variáveis);

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_g.$$

Seja o modelo na forma matricial para o conjunto de todas as observações:

$${}_N Y_p = {}_N X_g \beta_p + {}_N \epsilon_p$$

$Y (N \times p)$: matriz das observações dos g tratamentos, onde cada linha representa uma parcela ou indivíduo e as colunas as p variáveis respostas;

$X (N \times g)$ matriz de planejamento formada por números 1 e 0 que associam cada parcela com seu respectivo tratamento;

$\beta (g \times p)$: matriz dos parâmetros desconhecidos, onde cada linha representa o i -ésimo tratamento e cada coluna a k -ésima variável resposta;

$\epsilon (N \times p)$: é a matriz dos efeitos residuais, onde os elementos representam o desvio entre os valores esperados de acordo com o modelo e os valores observados no experimento.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1p} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{g1} & \mu_{g2} & \cdots & \mu_{gp} \end{bmatrix}$$

As hipóteses de nulidade serão construídas na forma matricial $H_0 : C\beta U = \phi$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$C (c \times g)$: matriz de posto c responsável para efetuar os contrastes entre os tratamentos;
 $U (p \times u)$: matriz de posto u encarregada de estabelecer os contrastes entre as variáveis respostas.

No caso da hipótese $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \cdots = \mu_{vg}$, a matriz U será uma identidade $U = I_p$.

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \cdots \\ \mu_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \cdots \\ \mu_{2p} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \mu_{g1} \\ \mu_{g2} \\ \cdots \\ \mu_{gp} \end{bmatrix}$$

Para testar $H_0 : C\beta U = \phi$ calcula-se a matriz H que corresponde às somas de quadrados e de produtos cruzados de tratamentos e a matriz E que corresponde às somas de quadrados e de produtos cruzados devido ao resíduo.

Pelo princípio da união-intersecção de Roy (1953,1957), a hipótese $H_0 : C\beta U = \phi$, será verdadeira, se e somente se, todas as hipóteses univariadas da forma $H_0 : C\beta U a_v = 0$ também o forem. O vetor $a_v = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]$ composto por um número 1 na posição k ($k = 1, \dots, p$) será o responsável para escolher a variável resposta.

A estatística $F_{(a)}$ para testar essas hipóteses univariadas, $H_0 : C\beta U a_v = 0$, é:

$$F_{(a)} = \frac{(N-g)a'_v U' Y' X (X'X)^{-1} C' [C'X'X]^{-1} C (X'X)^{-1} X' Y U a_v}{(g-1)a'_v U' Y' [I - X(X'X)^{-1} X'] Y U a_v}$$

A hipótese univariada, $H_0: C\beta U a_v = 0$, não será rejeitada se $F_{(a)} \leq F_{(\alpha; g-1, N-g)}$.

Então a análise de variância multivariada para um fator consiste em procurar uma combinação linear das variáveis que melhor discrimine os g grupos (tratamentos). A combinação linear melhor indicada é aquela que produz o maior valor para a estatística univariada F . De acordo com o princípio da união-intersecção de Roy, tem-se:

$$F_{(a_v)} = \frac{a'_v H a_v / (g-1)}{a'_v E a_v / (N-g)} = \frac{a'_v H a_v}{a'_v E a_v} \left(\frac{N-g}{g-1} \right)$$

Tal que: H ($p \times p$) e E ($p \times p$).

Dada restrição, $a'_v E a_v = 1$, para que a_v seja único. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} Z &= a'_v H a_v - \lambda(a'_v E a_v - 1) \\ dZ &= (2H a_v - 2\lambda E a_v) da_v \end{aligned}$$

Dado que $dZ \equiv 0$, então: $2(H a_v - \lambda E a_v) = 0_v$, tal que: $(H - \lambda E) a_v = 0_v$.

Pré-multiplicando $(H - \lambda E) a_v = 0_v$ por E^{-1} , tem-se $[E^{-1}H - \lambda I] a_v = 0_v$. Pós-multiplicando $(H - \lambda E) a_v = 0_v$ por E^{-1} , resulta $[HE^{-1} - \lambda I] a_v = 0_v$. A solução não trivial é obtida por $|E^{-1}H - \lambda I| = 0$ ou $|HE^{-1} - \lambda I| = 0$.

Pré-multiplicando $H a_v - \lambda E a_v = 0_v$ por a'_v :

$$a'_v H a_v - \lambda a'_v E a_v = 0 \rightarrow \lambda = \frac{a'_v H a_v}{a'_v E a_v}$$

$$F_{(a_v)} = \frac{a'_v H a_v}{a'_v E a_v} \left(\frac{N-g}{g-1} \right) \rightarrow \lambda = \frac{a'_v H a_v}{a'_v E a_v} = \frac{g-1}{N-g} F_{(a_v)} \rightarrow F_{(a_v)} = \lambda \left(\frac{N-g}{g-1} \right)$$

Conclui-se que a maior raiz característica da matriz $E^{-1}H$ ou de HE^{-1} corresponde à solução de máximo. Qualquer que seja o vetor não nulo, o máximo valor de $F_{(a_v)}$ também será proporcional à maior raiz característica de $|H - \lambda E| = |HE^{-1} - \lambda I| = 0$.

$$H_{p \times p} = U'Y'X(X'X)^{-1}C'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}C(X'X)^{-1}X'YU \quad E_{p \times p} = U'Y'[I - X(X'X)^{-1}X']YU$$

H ($p \times p$): matriz de soma de quadrados e de produtos cruzados de tratamentos devido à hipótese H_0 ;

E ($p \times p$): matriz das somas de quadrados e de produtos cruzados do resíduo devido à hipótese H_0 .

Tabela 4.4.1 - Análise de variância multivariada inteiramente ao acaso.

CV	GL	Matrizes (SQPC)
Tratamentos	$g - 1$	$H = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{y}_{vi} - \bar{y}_v)(\bar{y}_{vi} - \bar{y}_v)'$
Resíduo	$N - g$	$E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{vij} - \bar{y}_{vi})(y_{vij} - \bar{y}_{vi})'$
Total	$N - 1$	$H + E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{vij} - \bar{y}_v)(y_{vij} - \bar{y}_v)'$

$i = 1, 2, \dots, g$: indicando o i -ésimo tratamento (g : número de tratamentos);

$k = 1, 2, \dots, p$: representando a k -ésima variável resposta (p : número de variáveis);

$j = 1, 2, \dots, n_i$: caracterizando a j -ésima repetição dentro do i -ésimo tratamento.

A hipótese $H_0 : C\beta_v U = 0$ não será rejeitada para um nível α de significância, se a maior raiz característica λ_h de $|H - \lambda E| = |HE^{-1} - \lambda I| = 0$ for $\lambda_h \leq \lambda_{(\alpha)}$. A maior raiz característica $\lambda_{(\alpha)}$ é o valor crítico ao nível α da distribuição da maior raiz característica quando a hipótese de nulidade for verdadeira. O teste fica mais bem definido por $\theta_k = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k corresponde a k -ésima raiz característica de HE^{-1} .

4.5. TESTES DE HIPÓTESES MULTIVARIADOS E APROXIMAÇÕES PARA A DISTRIBUIÇÃO F

Ferreira (2011) cita as estatísticas para testar as hipóteses do modelo linear geral multivariado $H : C\beta U = \phi$, que são as baseadas no princípio da união-intersecção de Roy e da razão de verossimilhança de Wilks, respectivamente, critério do máximo autovalor de Roy (θ_R) e de lambda de Wilks (Λ). Outras duas estatísticas muito utilizadas são o critério do traço de Lawley-Hotelling (T_{LH}) e o critério de Pillai (V_p). Também apresenta as suas aproximações para a estatística F .

As distribuições exatas dessas estatísticas, sob a hipótese nula, dependem unicamente dos parâmetros (M , N^* e S) e são encontradas em Morrison (1976). Anderson (1958) apresenta as aproximações assintóticas para as distribuições χ^2 e F .

$$M = \frac{(|u - c| - 1)}{2} \quad N^* = \frac{(N - g - u - 1)}{2} \quad S = \min(u, c)$$

u : é posto da matriz da matriz U ;

c : é o posto da matriz C ;

g : é o posto da matriz X .

No caso da hipótese $H_0: \mu_{v1} = \mu_{v2} = \dots = \mu_{vg}$, a matriz U será uma identidade $U = I_p$, então o posto de U será p que é o número de variáveis. Sejam as estatísticas usadas para testar a hipótese de igualdade de vetores de médias de tratamentos, onde λ_k ($k=1,2,\dots,p$) satisfazem as equações $|H - \lambda(E + H)| = 0$ e $|H - \lambda E| = |HE^{-1} - \lambda I| = 0$:

a) Critério lambda de Wilks (Λ):

$$\Lambda = \prod_{k=1}^p (1 - \theta_k) = \frac{|E|}{|E + H|}$$

Onde: $\theta_k = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k corresponde a k -ésima raiz característica de HE^{-1} .

Valor aproximado da transformação de Λ em F :

p : número de variáveis;

v_H : graus de liberdade (tratamentos);

v_E : graus de liberdade (resíduo).

a1) Caso 1: $p = 2$, v_H e v_E quaisquer:

$$F[2v_H, 2(v_E - 1)] = \frac{v_E - 1}{v_H} \times \frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}$$

a2) Caso 2: $v_H = 1$, p e v_E quaisquer:

$$F(p, v_E - p + 1) = \frac{v_E - p + 1}{p} \cdot \frac{1 - \Lambda}{\Lambda}$$

a3) Caso 3: $v_H = 2$, p e v_E quaisquer:

$$F[2p, 2(v_E - p + 1)] = \frac{v_E - p + 1}{p} \cdot \frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}$$

a4) Caso 4 (geralmente aproximado):

$$F(pv_H, ab - c) = \left[\left(\frac{1}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{b}} - 1 \right] \frac{ab - c}{pv_H} \quad a = v_E - \frac{1}{2}(p - v_H + 1) \quad c = \frac{1}{2}(pv_H - 2)$$

$$\text{Se } p^2 + v_H^2 - 5 > 0 \rightarrow b = \sqrt{\frac{p^2 v_H^2 - 4}{p^2 + v_H^2 - 5}}, \text{ caso contrário } \rightarrow b = 1$$

b) Critério de Pillai (V_p):

$$V_p = \sum_{k=1}^p \theta_k = \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} = \text{tr}[H(H + E)^{-1}]$$

Valor aproximado da transformação de V_p em F :

$$F(v_1, v_2) = \left(\frac{V_p}{s - V_p} \right) \left(\frac{2f + s + 1}{2m + s + 1} \right)$$

$$f = (v_E - p - 1)/2 \quad s = \min(p, v_H) \quad m = (|p - v_H| - 1)/2$$

$$v_1 = s(2m + s + 1) \quad v_2 = s(2f + s + 1)$$

c) Critério do traço de Lawley-Hotelling (T_{LH}):

$$T_{LH} = \text{tr}(E^{-1}H) = \sum_{k=1}^p \lambda_k, \text{ ou } T_{TL} = \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - \theta_k)^{-1}$$

Valor aproximado da transformação de T_{LH} em F :

$$F(v_1 = a, v_2 = b) = \frac{T_{LH}}{c} \quad c = \frac{a(b-2)}{b(v_E - p - 10)} \quad a = pv_H \quad b = 4 + \frac{(a+2)}{\varphi - 1}$$

$$\varphi = \frac{(v_E + v_H - p - 1)(v_E - 1)}{[(v_E - p - 3)(v_E - p)]}$$

d) Critério do máximo autovalor de Roy (θ_R): $\theta_R = \max(\lambda_k)$ (Roy, 1953).

Valor aproximado da transformação de θ_R em F :

$$F(v_1 = d, v_2 = v_E - d + v_H) = \frac{(v_E - d + v_H)\lambda_1}{d} \quad d = \max(p, v_H)$$

Godoi (1985) enfatiza que não existe um teste melhor para todas as situações, acrescentando que o tipo de alternativa vai decidir qual teste é o mais poderoso.

4.6. A FUNÇÃO DISCRIMINANTE OU VARIÁVEL CANÔNICA (Z_1)

Quando a hipótese $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \dots = \mu_{vg}$ é rejeitada, então significa que pelo menos um dos vetores de médias é diferente dos demais. Neste caso, é aconselhável obter uma função linear das variáveis respostas originais, a qual pode ser usada, dentro do modelo de uma análise de variância univariada, como uma nova variável resposta representando o contexto multivariado. Esta função é denominada de função discriminante ou variável canônica, sendo obtida maximizando o valor da estatística F .

O procedimento consiste, então, na obtenção da função linear das variáveis respostas, $Z_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_p y_p$, que será aplicada a cada parcela do experimento. A função discriminante ou variável canônica Z_1 é a função cujos valores de $a'_v = [a_1, a_2, \dots, a_p]$ maximizam o valor do teste F devido a tratamento. A função $Z_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_p y_p$ terá

como coeficientes os valores do autovetor correspondente ao maior autovalor da matriz HE^{-1} .

4.7. ANÁLISE DE UM EXPERIMENTO INTEIRAMENTE AO ACASO BIVARIADO

Exercício 4.7.1 Seja um ensaio de comparação de crescimento de três espécies E1, E2 e E3, cujas variáveis respostas são y1 (volume de madeira) e y2 (produção de sementes). Considerando parcelas de 0,10 ha e os dados apresentados na tabela 4.7.1. As análises foram realizadas pelo programa, desenvolvido na linguagem do SAS, apresentado na tabela C4 do apêndice C.

- Testar a hipótese de igualdade dos vetores de médias e obter a função discriminante ou variável canônica (Z_1) no caso de sua rejeição;
- No caso de rejeição da igualdade dos vetores de médias efetuar, considerando a variável canônica ou função discriminante (Z_1), efetuar a análise de variância univariada e o teste de Tukey.

Tabela 4.7.1 - Dados: y1(volume de madeira) e y2 (produção de sementes).

Parc.	E1		E2		E3	
	y1	y2	y1	y2	y1	y2
1	4,5946	1,0109	5,8933	1,3060	4,6276	1,1316
2	4,8385	1,0998	6,3927	1,0245	4,5779	0,8095
3	4,6348	1,3639	6,0489	0,9511	4,6314	0,9600
4	4,1343	0,7568	5,8370	1,1856	4,3746	0,8520
5	4,4140	0,9922	5,9015	0,8214	4,5553	0,8244
6	4,4909	1,0381	6,2968	1,2887	4,5962	0,8952
7	4,3453	1,0144	5,7785	1,0970	4,7396	1,1269
8	4,7612	1,2429	5,5181	0,9897	4,5621	0,9993
9	4,8595	1,2807	5,6938	1,2463	4,7066	0,9983
10	4,5475	0,9619	6,1735	1,1230	4,9366	0,8054

a) Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,05201076 & 0,03180250 \\ 0,03180250 & 0,03162555 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0,07511990 & 0,00278582 \\ 0,00278582 & 0,02498347 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0,02123457 & 0,00207008 \\ 0,00207008 & 0,01525070 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0,0494551 & 0,0122195 \\ 0,0122195 & 0,0239532 \end{bmatrix}$$

$$DetS_1 = -7,36430 \quad DetS_2 = -6,28235 \quad DetS_3 = -8,04857 \quad DetS = -6,87307$$

$$M = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S| - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S_i|$$

$$M = -185,57289 + 195,25698 = 9,68409$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)} \left[\sum_{i=1}^g \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^g (n_i - 1)} \right]$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g+1)}{6(p+1)g(n-1)} = 1 - \frac{52}{486} = 0,893004115 \quad (n_i = n)$$

Dado $MC^{-1} = 8,647932219$ e $\chi^2_{\frac{1}{2}(g-1)p(p+1);0,01} = \chi^2_{6;0,01} = 16,8$ conclui-se que, como

$\chi^2_{6;0,01} < MC^{-1}$ (p -valor = 0,1944), tabela 4.7.2, não há razão para rejeitar a hipótese $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$, isto é, as matrizes de covariâncias das espécies E1, E2 e E3 são homogêneas.

Tabela 4.7.2 - Teste de homogeneidade de matrizes de covariâncias (SAS).

Qui-quadrado	GL	Pr > χ^2
8,648003	6	0,1944

b) Testes de multinormalidade

A análise de multinormalidade foi realizada pelo programa SAS, denominado % Multinorm Macro: Mardia tests of multivariate normality, version 1.1, disponibilizado pelo SAS Institute Inc., através do link:

<http://homepages.wmich.edu/~applegab/EMR675/SASFiles/multnorm.sas>

Tabela 4.7.3 - Teste de multinormalidade de Mardia.

Testes Estatísticos	Valores	Prob.
Mardia Skewness	3,78	0,4360
Mardia Kurtosis	-1,15	0,2486

Os resultados do teste de multinormalidade de Márdia para simetria (p -valor = 0,4360) e para curtose (p -valor = 0,2486) deram não significativos, tabela 4.7.3, então, conclui-se que há razão afirmar que as variáveis y_1 e y_2 aderem a uma distribuição normal bivariada. A Figura 4.7.1 mostra o “Gráfico Qui-Quadrado Q-Q”, apresentando uma configuração linear sem valores discrepantes dos “Quantil Qui-Quadrado” versus as “Distâncias Quadradas”, indicando uma aderência dos dados à normalidade multivariada.

Figura 4.7.1 – Gráfico de macro multnorm Qui-Quadrado Q-Q

c) Análise de variância multivariada do experimento

$$H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \mu_{v3} \text{ versus } H_A : \text{Não } H_0$$

Vetores das médias e matrizes de somas de quadrados e de produtos cruzados:

$$\hat{\mu}_{v1} = \begin{bmatrix} 4,5621 \\ 1,0762 \end{bmatrix} \quad \hat{\mu}_{v2} = \begin{bmatrix} 5,9533 \\ 1,1033 \end{bmatrix} \quad \hat{\mu}_{v3} = \begin{bmatrix} 4,6308 \\ 0,9403 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} SQ_{TOTAL}(y1) = 13,633173\text{B} \\ SQ_{TOTAL}(y2) = 0,79940037 \\ SQP_{TOTAL}(y1, y2) = 1,143639776\text{€} \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} 13,633173\text{B} & 1,143639776\text{€} \\ 1,143639776\text{€} & 0,79940037 \end{bmatrix}$$

Matriz de somas de quadrados e de produtos cruzados de tratamentos (H):

$$\begin{cases} SQ_{TRAT}(y1) = 12,2978860 \\ SQ_{TRAT}(y2) = 0,15266318 \\ SQP_{TRAT}(y1y2) = 0,15266318 \end{cases} \quad H = \begin{bmatrix} 12,2978860 & 0,813713486 \\ 0,813713486 & 0,15266318 \end{bmatrix}$$

Matriz de somas de quadrados e de produtos cruzados do resíduo (E).

$$E = T - H = \begin{bmatrix} 1,33528769 & 0,3299262965 \\ 0,3299262965 & 0,6467371922 \end{bmatrix}$$

Tabela 4.7.4 - Análise de variância multivariada.

CV	GL	Matrizes (SQPC)
Tratamentos	$\nu_H = 2$	$H = \begin{bmatrix} 12,2978860 & 0,8137134816 \\ 0,8137134826 & 0,1526631758 \end{bmatrix}$
Resíduo	$\nu_E = 27$	$E = \begin{bmatrix} 1,33528769 & 0,3299262965 \\ 0,3299262965 & 0,6467371922 \end{bmatrix}$
Total	$N-1 = 29$	$T = \begin{bmatrix} 13,63317373 & 1,1436397766 \\ 1,1436397766 & 0,799400370 \end{bmatrix}$

d) Cálculo das raízes características da matriz HE^{-1}

$$H = \begin{bmatrix} 12,2978860 & 0,8137134816 \\ 0,8137134826 & 0,1526631758 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1,33528769 & 0,3299262965 \\ 0,3299262965 & 0,6467371922 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8569133 & -0,437145 \\ -0,437145 & 1,7692284 \end{bmatrix} \quad E^{-1}H = \begin{bmatrix} 10,182511 & 0,6305459 \\ -3,93632 & -0,085615 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } |E^{-1}H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 10,182511 - \lambda & 0,6305459 \\ -3,93632 & -0,085615 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10,182511 - \lambda) \times (-0,085615 - \lambda) - (0,6305459 \times -3,93632) = 0$$

$$\lambda^2 - 10,096896\lambda + 1,610254 = 0, \text{ resultando: } \lambda_1 = 9,934814 \text{ e } \lambda_2 = 0,16208$$

e) Testes multivariados e aproximações para distribuição F

e1) Critério de Wilks (Λ):

Dado que $|E| = 0,7547288$ e $|T| = |H + E| = 9,5904522$. Então:

$$\Lambda = \frac{\det E}{\det(H + E)} = \frac{\det E}{\det T} = \frac{0,7547288}{9,5904522} = 0,07869585 \quad \Lambda = \prod_{k=1}^p (1 - \theta_k) = 0,07869585$$

Donde $\theta_k = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k é k -ésima raiz característica de HE^{-1} , ou seja, $\lambda_1 = 9,934814$ e $\lambda_2 = 0,16208$. Então:

$$\theta_1 = 9,934814 \div (1 + 9,934814) = 0,908549 \quad \theta_2 = 0,16208 \div (1 + 0,16208) = 0,139474$$

Valor aproximado da transformação de Λ em F :

p = número de variáveis;

$\nu_H = 2$: graus de liberdade (tratamentos);

$\nu_E = 27$: graus de liberdade (resíduo).

Caso 1: $p = 2$, v_H e v_E quaisquer:

$$F[2v_H, 2(v_E - 1)] = \frac{v_E - 1}{v_H} \times \frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \quad F_{(4;52)} = \frac{26}{2} \times \frac{1 - \sqrt{0,0786958512}}{\sqrt{0,0786958512}} = 33,3412^{**}$$

Caso 2: $v_H = 1$, p e v_E quaisquer (não aplicado):

$$F(p, v_E - p + 1) = \frac{v_E - p + 1}{p} \cdot \frac{1 - \Lambda}{\Lambda}$$

Caso 3: $v_H = 2$, p e v_E quaisquer:

$$F[2p, 2(v_E - p + 1)] = \frac{v_E - p + 1}{p} \cdot \frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \quad F(4;52) = \frac{26}{2} \times \frac{1 - \sqrt{0,0786958512}}{\sqrt{0,0786958512}} = 33,3412^{**}$$

Caso 4: (geralmente aproximado):

$$F(pv_H, ab - c) = \left[\left(\frac{1}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{b}} - 1 \right] \frac{ab - c}{pv_H}$$

$$a = v_E - \frac{1}{2}(p - v_E + 1) = 27 - \frac{1}{2}(2 - 2 + 1) = 26,5 \quad c = \frac{1}{2}(pv_H - 2) = \frac{1}{2}(2 \times 2 - 2) = 1$$

$$\text{Se } p^2 + v_H^2 - 5 > 0 \rightarrow b = \sqrt{\frac{p^2 v_H^2 - 4}{p^2 + v_H^2 - 5}}, \text{ caso contrário } \rightarrow b = 1$$

$$p^2 + v_H^2 - 5 = 4 + 4 - 5 = 3 > 0 \rightarrow b = \sqrt{\frac{2^2 \times 2^2 - 4}{2^2 + 2^2 - 5}} = 2$$

$$F(4;52) = \left[\left(\frac{1}{0,0786958512} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \frac{52}{4} = 33,3412^{**}$$

e2) Critério do traço de Lawley-Hotelling (T_{LH}):

$$T_{LH} = \text{tr}(E^{-1}H) = \sum_{k=1}^p \lambda_k$$

$$HE^{-1} = \begin{bmatrix} 10,182511 & -3,93632 \\ 0,6305459 & -0,085615 \end{bmatrix} \quad \text{tr}(HE^{-1}) = 10,182511 - 0,085615 = 10,09689$$

$$T_{LH} = \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - \theta_k)^{-1}$$

Sendo $\theta_k = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k é k -ésima raiz característica de HE^{-1} , donde: $\lambda_1 = 9,934814$ e $\lambda_2 = 0,16208$. Então:

$$\theta_1 = 9,934814 \div (1 + 9,934814) = 0,908549 \quad \theta_2 = 0,16208 \div (1 + 0,16208) = 0,139474$$

$$\theta_1 \div (1 - \theta_1) = 9,93481 \quad \theta_2 \div (1 - \theta_2) = 0,162080$$

$$T_{LH} = 9,93481 + 0,162080 = 10,09689$$

Valor aproximado da transformação de T_{LH} em F :

$$F(v_1 = a, v_2 = b) = \frac{T_{LH}}{c}$$

$$a = pv_H = 2 \times 2 = 4 \quad b = 4 + \frac{(a+2)}{\varphi-1} = 4 + \frac{(4+2)}{(1,22909090-1)} = 30,19047723$$

$$\varphi = \frac{(v_E + v_H - p - 1)(v_E - 1)}{(v_E - p - 3)(v_E - p)} = \frac{(27 + 2 - 2 - 1)(27 - 1)}{(27 - 2 - 3)(27 - 2)} = \frac{26 \times 26}{550} = 1,22909090$$

$$c = \frac{a(b-2)}{b(v_E - p - 1)} = \frac{4(30,19047723 - 2)}{30,19047723(27 - 2 - 1)} = 0,15562566$$

$$F(v_1 = 4, v_2 = 30,19) = \frac{T_{LH}}{c} = \frac{10,096896}{0,155625661} = 64,88$$

e3) Roy Greatest Root (θ_R):

$$\theta_R = \max(\lambda_k)$$

Autovalores de HE^{-1} : $\lambda_1 = 9,934814$ e $\lambda_2 = 0,16208$. Então: $\theta_R = 9,934814$

Valor aproximado da transformação de θ_R em F :

$$F(v_1 = d, v_2 = v_E - d + v_H) = \frac{(v_E - d + v_H)\lambda_1}{d}$$

$$d = \max(p, v_H) = \max(2, 2) \quad v_2 = v_E - d + v_H = 27 - 2 + 2$$

$$F(2, 27) = \frac{(v_E - d + v_H)\lambda_1}{d} = \frac{(27 - 2 + 2)}{2} \times 9,934814 = 134,12$$

e4) Pillai Trace (Tp):

Sendo $\theta_i = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k é i-ésima raiz característica de HE^{-1} , donde:

$$\lambda_1 = 9,934814 \quad \lambda_2 = 0,162089934814$$

$$\theta_1 = 9,934814 \div (1 + 9,934814) = 0,908549 \quad \theta_2 = 0,16208 \div (1 + 0,16208) = 0,139474$$

$$T_p = \sum_{k=1}^p \theta_k = 0,908549 + 0,139474 = 1,048024$$

$$T_p = \text{tr}[H(E+H)^{-1}] = \text{tr} \begin{bmatrix} 0,9280417 & -0,309772 \\ 0,0496213 & 0,1199827 \end{bmatrix} = 1,048024$$

Valor aproximado da transformação de T_p em F :

$$F(v_1, v_2) = \left(\frac{V}{s-V} \right) \left(\frac{2f+s+1}{2m+s+1} \right) = \frac{1,0480244}{2-1,0480244} \left(\frac{2 \times 12 + 2 + 1}{2 \times -0,5 + 2 + 1} \right) = 14,86$$

$$f = (v_E - p - 1) / 2 = (27 - 2 - 1) / 2 = 12$$

$$s = \min(p, v_H) = \min(2, 2)$$

$$m = (|p - v_H| - 1) / 2 = (|2 - 2| - 1) / 2 = -0,5$$

$$v_1 = s(2m + s + 1) = 2(2 \times -0,5 + 2 + 1) = 4$$

$$v_2 = s(2f + s + 1) = 2(2 \times 12 + 2 + 1) = 54$$

$$F(4, 54) = 14,86$$

Na tabela 4.7.5 estão os resultados dos testes multivariados e das aproximações para a estatística F realizados pelo programa desenvolvido no SAS.

$$M = \frac{(|u-c|-1)}{2} = -0,5$$

$$N^* = \frac{(N-g-u-1)}{2} = \frac{(30-3-2-1)}{2} = 12$$

$$S = \min(u, c) = \min(2, 2) = 2$$

$u = p = 2$: é posto da matriz da matriz U ;

$c = g - 1 = 2$: é o posto da matriz C .

Tabela 4.7.5 - Resultados dos testes para $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \mu_{v3}$.

Testes e aproximações de F para a hipótese de ausência de efeito de tratamento ($S=2$; $M = -0,5$; $N^*=12$) H = Tratamento SQPC E = Error SQPC					
Testes multivariados	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,07869586	33,34	4	52	< 0,0001
Pillai Trace	1,04802442	14,86	4	54	< 0,0001
Hotelling-Lawley Trace	10,09689587	64,88	4	30,19	< 0,0001
Roy Greatest Root	9,93481398	134,12	2	27	< 0,0001

De acordo com a tabela 4.7.5, conclui-se que os testes foram significativos (p -valor < 0,0001), assim como, sendo $F_{4,52;0,01} \cong 3,65$, então se rejeita $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \mu_{v3}$.

f) Função discriminante ou variável canônica Z_1

Como a hipótese $H_0 : \mu_{v1} = \mu_{v2} = \mu_{v3}$ foi rejeitada, então ocorre que pelo menos um dos vetores de médias é diferente dos demais. Neste caso, serão calculados os valores de uma nova variável resposta $Z_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2$, denominada de função discriminante ou variável canônica, que é função linear das variáveis respostas originais y_1 e y_2 . Esta variável Z_1 maximiza o valor da estatística F .

O procedimento consistirá na obtenção da função linear $Z_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2$ das variáveis respostas que será aplicada a cada parcela do experimento. Esta função terá como coeficientes os valores do autovetor correspondente ao maior autovalor ($\lambda_1 = 9,934814$) da matriz HE^{-1} .

f1) Cálculo da primeira variável canônica Z_1 ou $Can1$:

$$E^{-1}H = \begin{bmatrix} 10,182511 & 0,6305459 \\ -3,93632 & -0,085615 \end{bmatrix}$$

$$[E^{-1}H - \lambda_1 I]a_v = 0_v \rightarrow [E^{-1}H - 9,934814] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} a_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,247697 & 0,630559 \\ -3,93632 & -10,020429 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,247697a_1 + 0,630559a_2 = 0 \\ -3,93642a_1 - 10,020429a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } a_2 = 1 \rightarrow a_1 = \frac{-0,630559}{0,247697} = -2,545687$$

O ideal é obter uma função normalizada $Z_1^* = a_1^* y_1 + a_2^* y_2$ que significa que a soma dos quadrados dos coeficientes seja igual a um. Então:

$$a_1^* = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{-2,545687}{\sqrt{(-2,545687)^2 + 1^2}} = -0,930763$$

$$a_2^* = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-2,545687)^2 + 1^2}} = 0,365623$$

$Z_1^* = Can 1 = -0,930763y_1 + 0,365623y_2$ que é a primeira variável discriminante ou canônica, também, pode ser escrita na forma: $Z_1^* = Can 1 = 0,930763y_1 - 0,365623y_2$.

f2) Cálculo da segunda variável canônica Z_2 ou $Can2$:

Os coeficientes de $Z_2^* = b_1^* y_1 + b_2^* y_2$ correspondem aos elementos do autovetor referente ao segundo autovalor ($\lambda_2 = 0,162082$). O interesse em obter essa segunda variável é construir o gráfico 4.7.2 (Can1 versus Can2). Ele mostra a tendência da representação da discriminação dos tratamentos.

$$E^{-1}H = \begin{bmatrix} 10,182511 & 0,6305459 \\ -3,93632 & -0,085615 \end{bmatrix}$$

$$[E^{-1}H - \lambda_2 I]a_v = 0_v \rightarrow [E^{-1}H - 0,162082 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]a_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10,020429 & 0,630559 \\ -3,93632 & -0,247697 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 10,020429b_1 + 0,630559b_2 = 0 \\ -3,93632b_1 - 0,247697b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } b_1 = 1 \rightarrow b_2 = \frac{-10,020429}{0,630559} = -15,891342$$

Normalizando o vetor dos coeficientes:

$$b_1^* = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-15,891342)^2 + 1^2}} = 0,062803$$

$$b_2^* = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{-15,891342}{\sqrt{(-15,891342)^2 + 1^2}} = -0,998026$$

$Z_2^* = Can2 = 0,062803y_1 - 0,998026y_2$ é a segunda variável discriminante ou canônica.

Tabela 4.7.6 - Resultados dos coeficientes das duas variáveis canônicas.

	Coeficientes Canônicos			
	Estandartizados		Não Estandartizados	
	Can1	Can2	Can1	Can2
X1	3,28548871	-0,28692473	4,79181998	-0,41847402
X2	-0,31252716	1,10413276	-1,88236826	6,65025230

A tabela 4.7.6 apresenta os resultados, calculados pelo programa desenvolvido no SAS, dos coeficientes para as duas variáveis canônicas. É importante verificar que normalizando os autovetores obtidos, resultam os mesmos valores alcançados anteriormente.

a) Primeira variável canônica Can1: normalização do vetor (dados não estandartizados):

$$a_1^* = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{4,79181998}{\sqrt{(4,79181998)^2 + (-1,88236826)^2}} = 0,930763$$

$$a_2^* = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{-1,88236826}{\sqrt{(4,79181998)^2 + (-1,88236826)^2}} = -0,365623$$

b) Segunda variável canônica Can2: normalização do vetor (dados não estandartizados):

$$b_1^* = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{-0,41847402}{\sqrt{(-0,41847402)^2 + (6,65025230)^2}} = -0,062803$$

$$b_2^* = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{6,65025230}{\sqrt{(-0,41847402)^2 + (6,65025230)^2}} = 0,998026$$

g) Análise de variância da função discriminante variável canônica Z_1^* (Can1)

Tabela 4.7.7 - Valores para $Can1 = 0,930763y_1 - 0,365623y_2$.

Parc.	E1	E2	E3	Parc.	E1	E2	E3
1	3,90688	5,00777	3,89346	6	3,80044	5,38966	3,95062
2	4,10134	5,57551	3,96502	7	3,67353	4,97733	3,99940
3	3,81526	5,28235	3,95974	8	3,97714	4,77420	3,88083
4	3,57131	4,99840	3,76026	9	4,05480	4,84387	4,01569
5	3,74562	5,19262	3,93852	10	3,88099	5,33548	4,30031

A tabela 4.7.7 apresenta os valores para a variável $Can1 = 0,930763y_1 - 0,365623y_2$. Estes foram obtidos a partir dos dados das variáveis respostas y_1 e y_2 que estão disponíveis na tabela 4.7.1.

Tabela 4.7.8 - ANAVA da variável $Can1 = 0,930763y_1 - 0,365623y_2$.

Causas	Gl	SQ	QM	F
Tratamentos	2	10,1205	5,0602	134,12
Resíduo	27	1,0187	0,0377	
Total	29	11,1391		

O valor da estatística F (134,12) obtido na ANAVA para a variável $Can1$, tabela 4.7.8, é o mesmo calculado pela equação deduzida pelo princípio da união-intersecção de Roy.

$$F_{(a_r)} = \lambda_1 \left(\frac{N-g}{g-1} \right) = 9,934814 \times \frac{30-3}{3-1} = 134,12$$

Como $F_{2;27;0,01=3,40}$, então se rejeita a hipótese $H_0 : \mu_{E1} = \mu_{E2} = \mu_{E3}$. A função $Can1 = 0,930763y_1 - 0,365623y_2$ maximiza F , atendendo ao princípio da união-intersecção de Roy. Resultado importante é que a variável y_1 tem uma significativa contribuição na construção da função Z_1^* , haja vista o valor absoluto de seu coeficiente ser igual a 0,930763, enquanto a variável y_2 possui um coeficiente igual a 0,365623.

i) Teste de comparação múltipla de Tukey para a variável resposta ($Can1$)

Tabela 4.7.10 - Teste de Tukey para ($Can1 = -0,930763y_1 + 0,365623y_2$).

Tukey (Grupos)	Médias	N	Tratamentos
G1	5,13772	10	B
G2	3,96638	10	C
G2	3,85273	10	A

A figura 4.7.2 apresenta a distribuição dos tratamentos, segundo as variáveis $Can1$ e $Can2$, confirmando o resultado do teste de Tukey, ou seja, o tratamento B forma o grupo (G1), enquanto que os tratamentos A e C representam o grupo (G2). O teste de Tukey mostra a existência de não significância entre os tratamentos A e C.

Figura 4.7.2 - Distribuição dos tratamentos: Can1 vs Can2. Nota SAS: 3 obs. ocultas.

Capítulo 5

Noções sobre regressão não linear

Neste capítulo é dada uma breve abordagem sobre a teoria de regressão não linear com o objetivo de obter curvas de crescimento para os métodos de manejo e de espécies. Aborda os seguintes conteúdos: teorema de Taylor; estimadores de máxima verossimilhança; teste da razão de verossimilhança; teste para verificar a igualdade de parâmetros e de identidade de modelos de regressão não linear; análise de resíduos; regressão não linear pelo método de Gauss-Newton; avaliação da adequacidade dos modelos testados; validação da predição do modelo de regressão pelo teste de Graybill.

5. INTRODUÇÃO

Considerando que será apresentado o emprego do modelo de regressão não linear de Mitscherlich para ajustar os perfis de crescimento de florestas e de espécies, então, para um melhor entendimento dos procedimentos, serão apresentados alguns temas que são importantes no ajuste de modelos não lineares, tendo como enfoque principal a aplicação do método de Gauss-Newton.

5.1. TEOREMA DE TAYLOR

Qualquer função $f(X)$ que seja contínua e derivável, e que tenha uma derivada de n -ésima ordem, pode ser aproximada em torno de um ponto $X = X_0$ por uma função polinomial e um resto (R). A equação 5.1.1 é denominada de expansão da série de Taylor $f(X)$ em torno do ponto $X=X_0$. Quanto maior a ordem, melhor será a aproximação da função original.

$$f(X) = \frac{f(X_0)}{0!} + \frac{f'(X_0)(X - X_0)}{1!} + \frac{f''(X_0)(X - X_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(X_0)(X - X_0)^n}{n!} + \dots + R \quad (5.1.1)$$

$f'(X_0), f''(X_0), \dots, f^n(X_0)$: são as derivadas da função $f(X)$ de ordem de $1, 2, \dots, n$ avaliadas em $X = X_0$.

Se $n = 1$ tem-se uma aproximação linear;

Se $n = 2$ tem-se uma aproximação polinomial de segundo grau.

Seja o exemplo da função $f(X) = e^X$, tal que $X_0 = 0$, aproximar até o polinômio de sexto grau.

$$\begin{aligned} f'(X_0) &= 1 & f''(X) &= e^X & f''(X_0) &= 1 & f'''(X) &= e^X & f'''(X_0) &= 1 \\ f^4(X) &= e^X & f^4(X_0) &= 1 & f^5(X) &= e^X & f^5(X_0) &= 1 & f^6(X) &= e^X & f^6(X_0) &= 1 \end{aligned}$$

$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!} + \frac{X^6}{6!}$ é o polinômio do sexto grau que aproxima $f(X) = e^X$. Se $f(X = 2) = e^2 = 7,3890561$, então:

$$f(X = 2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + R = 7,3555555 + 0,0335005 \quad (R = 0,0335005)$$

O objetivo do uso da expansão de Taylor na regressão não linear é aproximar, em alguns casos, a função a ser ajustada para uma função linear excluindo os termos de ordens elevadas. O método de Gauss-Newton consiste na linearização da equação não linear em torno de alguns valores iniciais dos parâmetros. A equação linearizada é, então, estimada pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) e os valores escolhidos inicialmente são ajustados. Esses valores ajustados são usados para relinearizar o modelo e novamente são estimados por MQO. O processo continua até que, a partir das

últimas iterações, não haja mais alterações substanciais nos valores estimados. A principal técnica usada para a linearização de uma equação não linear é a expansão de Taylor.

Gujarati & Porter (2011) citam que a estimação de modelos intrinsecamente não lineares está basicamente sistematizada em dois algoritmos, o método iterativo de Gauss-Newton e o método de Newton-Raphson, os quais já estão incorporados a vários programas de análise estatística.

5.2. ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O método da máxima verossimilhança adota como estimativas dos parâmetros os valores que maximizam a probabilidade (no caso de variável discreta) ou a densidade de probabilidade (no caso de variável contínua) de ser obtida a amostra observada. É necessário conhecer a distribuição da variável em estudo.

Seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x, \theta)$, sendo θ o parâmetro desconhecido. Considere uma amostra aleatória simples de X de tamanho n e $x_1, x_2, \dots, x_n$ os valores observados.

A função de verossimilhança L é definida como:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (5.2.1)$$

O estimador de máxima verossimilhança de θ é o valor que maximiza a função 5.2.1 e pode ser encontrado, na maioria dos casos, seguindo as seguintes etapas:

- a) Encontrar a função de verossimilhança;
- b) Obter o logaritmo natural (neperiano) da função;
- c) Derivar em relação ao parâmetro θ ;
- d) Igualar o resultado a zero;
- e) Verificar se o estimador representa um ponto de máximo.

Seja a determinação dos estimadores de máxima verossimilhança da média μ e da variância σ^2 de uma variável aleatória (X) com distribuição normal, com base em uma amostra de n elementos.

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Considerando que as observações são independentes, a densidade de probabilidade de obter os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ da amostra é:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu, \sigma^2) = f(X_1) \cdot f(X_2) \cdot \dots \cdot f(X_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (5.2.2)$$

A função 5.2.2 é denominada de função de verossimilhança da amostra e os estimadores de máxima verossimilhança de μ e de σ^2 são os valores que maximizam esta função.

Como o logaritmo é uma função monotônica crescente, os valores de μ e σ^2 que maximizam 5.2.2 também maximizam $\ln[L(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu, \sigma^2)]$.

$$\ln[L(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu, \sigma^2)] = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Derivando e igualando a zero as derivadas parciais em relação a μ e a σ^2 , obtêm-se o sistema de equações:

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})}{2\hat{\sigma}^2} = 0 \quad -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^4} = 0$$

Resultando:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$$

Seja $\bar{X}$ o estimador de mínimos quadrados não tendencioso e de variância mínima, então como $\bar{X} = \hat{\mu}$ e a variável X tem distribuição normal, logo $\bar{X}$ também é um estimador de máxima verossimilhança.

Nota-se que o estimador $\hat{\sigma}^2$ de máxima verossimilhança da variância é tendencioso (viesado), uma vez que o estimador não tendencioso é:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n-1}$$

5.3. TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Seja $X_1, X_2, \dots, X_N$ uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída de uma população com função densidade de probabilidade $f(x/\theta)$, donde θ é o parâmetro ou vetor paramétrico de interesse. A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_N; \theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta)$$

De acordo com Regazzi & Silva (2004), denotando $\hat{\theta}$ como o estimador de máxima verossimilhança de θ sobre o espaço Ω e $\hat{\theta}_0$ o estimador de máxima verossimilhança de θ sobre o espaço de ω , e considerando o problema geral de testar a hipótese de nulidade dada por $H_0: \theta \in \omega$ versus $H_a: \theta \in \omega^c$, donde ω é um subconjunto do espaço paramétrico Ω e ω^c é o complemento de ω , tal que $\Omega = \omega \cup \omega^c$, a estatística do teste da razão de verossimilhanças terá a seguinte forma:

$$L = \left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2} \right)^{\frac{N}{2}}$$

Ω : é o espaço paramétrico irrestrito e ω é o espaço paramétrico restrito à hipótese nula;

$\hat{\sigma}_{\Omega}^2$: é a estimativa de máxima verossimilhança de σ^2 , sem restrição, no espaço paramétrico (modelo completo);

$\hat{\sigma}_{\omega}^2$: é a estimativa de máxima verossimilhança de σ^2 , com as restrições, definidas em H_0 (modelo reduzido).

Conforme Rao (1973), para grandes amostras, tem-se:

$$-2 \ln L = -N \ln \left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

E a estatística de máxima verossimilhança para testar H_0 será:

$$\chi_{cal}^2 = -N \ln \left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2} \right) = -N \ln \left[\frac{SQRR(\Omega)}{SQRR(\omega)} \right]$$

Com efeito, rejeita-se H_0 se $\chi_{cal}^2 \geq \chi_v^2$, sendo $v = p_{\Omega} - p_{\omega}$ o número de graus de liberdade, onde p_{Ω} é o número de parâmetros estimados no modelo completo, enquanto p_{ω} é o número de parâmetros estimados no modelo reduzido. SQRR é a soma de quadrados do resíduo da regressão.

5.4. TESTE PARA VERIFICAR A IGUALDADE DE PARÂMETROS E A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR

Na análise de regressão aplicada, por exemplo, em estudos de florestas naturais, na obtenção de equações de crescimento, geralmente se considera uma equação para cada espécie, ou seja, um número de equações correspondente à quantidade de espécies existentes é ajustado, resultando na necessidade de agrupar as espécies com perfis de crescimentos semelhantes.

Graybill (1976) apresentou um modelo geral para testar a igualdade de um conjunto de modelos lineares usando o teste F .

Steel & Torrie (1980) apresentaram testes para verificar a igualdade entre dois coeficientes de regressão e, também, entre mais de dois coeficientes de regressão simples.

Neter et al. (1996) testaram, utilizando o teste F , se duas equações de regressão simples eram idênticas.

Regazzi (2003) usou o teste da razão de máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear, aplicando o modelo logístico para dois tratamentos em uma cultura de milho, medindo a variável matéria seca total em nove ocasiões equidistantes de 15 dias.

Regazzi & Silva (2004) aplicaram, usando o modelo Michaelis-Menten, o teste da razão de máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear para dados de um delineamento inteiramente ao acaso. Estudaram a velocidade da reação versus seis doses equidistantes de concentração de substrato de um experimento com Puromycin, considerando dois tratamentos: enzima tratada e não tratada.

Sejam, por exemplo, as hipóteses considerando g tratamentos (espécies ou métodos de manejo):

- a) H_0 : as g equações são idênticas versus H_1 : Não H_0 ;
- b) H_0 : um determinado subconjunto de parâmetros apresenta igualdade nos g tratamentos versus H_1 : Não H_0 .

Seja o modelo de Mitscherlich com erro aditivo e a seguinte parametrização:

$$Y_{ij} = \beta_{0i} [1 - 10^{-\beta_{1i}(X_{ij} + \beta_{2i})}] + e_{ij} \quad (i = 1, \dots, g) \quad (j = 1, \dots, n_i)$$

Y_{ij} : valor observado na j -ésima parcela permanente do i -ésimo tratamento;

X_{ij} : valor da variável independente (tempo ou ocasião);

$\beta_{0i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}$: parâmetros do modelo e $\hat{\beta}_{0i}, \hat{\beta}_{1i}, \hat{\beta}_{2i}$ seus estimadores;

e_{ij} : erro aleatório com as pressuposições usuais: $e_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$;

$N = n_1 + n_2 + \dots + n_g$: é o número total de observações dos g tratamentos.

Algumas hipóteses que podem ser consideradas:

- a) $H_0^{(1)} : \beta_{01} = \beta_{02} = \dots = \beta_{0g} = B_0$ vs. $H_a^{(1)} : \text{nem todos } \beta_{0i} \text{ são iguais}$;
- b) $H_0^{(2)} : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{1g} = \beta_1$ vs. $H_a^{(2)} : \text{nem todos } \beta_{1i} \text{ são iguais}$;
- c) $H_0^{(3)} : \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{2g} = \beta_2$ vs. $H_a^{(3)} : \text{nem todos } \beta_{2i} \text{ são iguais}$;
- d) $H_0^{(4)} : \beta_{01} = \beta_{02} = \dots = \beta_{0g} = \beta_0; \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{1g} = \beta_1; \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{2g} = \beta_2$
vs. $H_a^{(4)} : \text{pelo menos uma igualdade não ocorre}$.

Variáveis dummy são as variáveis binárias que só assumem dois valores distintos, normalmente 0 e 1. Elas são importantes na representação de variáveis qualitativas; existência de mudanças na análise; ocorrência de estratos; etc.

$$D_i = \begin{cases} D_i = 1: & \text{se a observação } Y_{ij} \text{ pertence tratamento } (i) \\ D_i = 0: & \text{(em caso contrário)} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, g)$$

Tem-se que: $Y_{ij} = \sum_{i=1}^g D_i \beta_{0i} [1 - 10^{-\beta_{1i}(X_{ij} + \beta_{2i})}] + e_{ij}$.

As hipóteses formuladas acima podem ser testadas, usando o teste da razão de verossimilhança, pela estatística:

$$L = \left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2} \right)^{\frac{N}{2}}$$

$\hat{\sigma}_{\Omega}^2$: estimativa de máxima verossimilhança de σ^2 quando nenhuma restrição é feita no espaço paramétrico;

$\hat{\sigma}_{\omega}^2$: estimativa de verossimilhança de σ^2 quando as restrições lineares colocadas em H_0 são impostas no espaço paramétrico.

A distribuição de $-2LnL$, para grandes amostras, é aproximadamente um qui-quadrado com $v = p_{\Omega} - p_{\omega}$ graus de liberdade, tal que p_{Ω} é o número de parâmetros estimados em Ω , e p_{ω} é o número de parâmetros estimados em ω .

Para grandes amostras, Rao (1973):

$$-2LnL = -NLn\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

Sejam os seguintes passos para testar a identidade de modelos:

- a) Ajustar o modelo completo Ω e obter $\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N}$, sendo $SQRR_{\Omega}$ a soma de quadrados residual para o modelo completo Ω , onde p_{Ω} é o número de parâmetros estimados em Ω ;
- b) Ajustar o modelo reduzido ω , sob a restrição dada por H_0 , e obter $\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N}$, sendo $SQRR_{\omega}$ a soma de quadrados residual para o modelo reduzido ω , donde p_{ω} é o número de parâmetros estimados em ω ;
- c) Obter a estatística $\chi_{Cal}^2 = -N \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right)$, ou seja:

$$\chi_{Cal}^2 = -N \ln\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -N \ln\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right);$$

- d) Estabelecer a regra de decisão: se $\chi_{Cal}^2 \geq \chi_{Tab}^2 \Rightarrow \text{rejeitar } H_0$, caso contrário, não rejeitar H_0 . O valor tabelado é função do nível de significância α e do número de graus de liberdade $v = p_{\Omega} - p_{\omega}$.

A estimativa de máxima verossimilhança de σ^2 , isto é, $\hat{\sigma}^2$, é obtida pela soma de quadrados residual dividida por $(N = n_1 + n_2 + \dots + n_g)$.

5.5. ANÁLISE DE RESÍDUOS

Na análise de regressão linear simples ou múltipla, as pressuposições assumidas precisam ser validadas para que os resultados sejam confiáveis. A análise de resíduo pode ser definida como um conjunto de técnicas que objetiva investigar a adequabilidade de um modelo de regressão com base nos resíduos.

A análise de resíduos é um procedimento fundamental na verificação da qualidade do ajuste do modelo e objetiva avaliar a influência das observações no modelo ajustado. A análise de resíduo permite diagnosticar possíveis evidências de violações nas suposições estabelecidas, tais como:

- a) Falta de algum componente no modelo;
- b) Existência de homocedasticidade, ou seja, se a variância (σ^2) é a mesma para todos os Y_j ;
- c) Se as suposições de normalidade e independência são válidas para os erros.

Seja o modelo de regressão com p variáveis:

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \dots + \beta_p X_{pj} + e_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

O resíduo é definido como a diferença entre o valor observado da variável resposta Y_j e o seu valor estimado pela regressão $\hat{Y}_j$, ou seja, $e_j = Y_j - \hat{Y}_j$.

$$e_j = Y_j - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1j} + \hat{\beta}_2 X_{2j} + \dots + \hat{\beta}_p X_{pj})$$

A concepção básica é que, se o modelo for adequado, os resíduos devem refletir as propriedades impostas pelo componente denominado erro do modelo. Seja o modelo na forma matricial $Y_v = X\beta_v + e_v$, donde:

$Y'_v = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$: vetor das n observações;

X : matriz $n \times (p+1)$ do modelo das derivadas parciais de Y_j em relação aos parâmetros;

$e'_v = [e_1, e_2, \dots, e_n]$: vetor dos erros;

$\beta'_v = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]$: vetor dos parâmetros.

Pressuposições:

- a) $e_{j'}$ e e_j são independentes ($j' \neq j$);
- b) $Var(e_j) = \sigma^2$ (constante);
- c) $e_j \sim N(0, \sigma^2)$;
- d) O modelo é linear;
- e) Não existem dados discrepantes (outliers).

No caso do uso de um modelo de regressão múltipla, também, é necessário diagnosticar a existência de colinearidade e de multicolinearidade entre as variáveis regressoras. As técnicas para diagnosticar as suposições sobre o modelo podem ser gráficas ou através de testes. As técnicas gráficas são subjetivas. O ideal é combinar técnicas gráficas com testes estatísticos para verificar a existência de problemas nas suposições sobre o modelo.

Ferreira (2013) cita que na literatura existem os seguintes tipos de resíduos: ordinário, padronizado, estudentizado internamente e estudentizado externamente (resíduo Jackknife).

O resíduo ordinário, que é definido como $e_j = Y_j - \hat{Y}_j$, não é recomendado para construção dos gráficos. É mais adequado utilizar os resíduos padronizados ou os estudentizados.

O problema básico dos resíduos ordinários é que, por possuírem variâncias distintas, eles não são comparáveis entre si, então, para obter a mesma dispersão em todos os n resíduos preditos, há a necessidade de estabelecer alguma forma de padronização.

Seja $\hat{\sigma}^2 = QM_{Res}$ o estimador da variância σ^2 . O resíduo padronizado (z_j) é a divisão do resíduo ordinário pelo desvio padrão. Este resíduo reduz a variabilidade dentro de uma determinada faixa, mas não elimina o problema de ocorrência de variâncias diferentes.

$$z_j = \frac{e_j}{\sqrt{QM_{Res}}} = \frac{e_j}{\hat{\sigma}}$$

Os resíduos estudentizados internamente são obtidos por meio da razão entre o resíduo ordinário e o seu estimador do erro padrão específico, ou seja:

$$z_j = \frac{e_j}{\sqrt{(1-h_{jj})QM_{Res}}} \quad H = [h_{jj'}] \quad H = X(X'X)^{-1}X'$$

O uso do resíduo estudentizado internamente é mais recomendável do que o resíduo padronizado, haja vista considerar a variância individual de cada resíduo ordinário. Por outro lado, se ocorrer da j -ésima observação ser uma observação discrepante, a estimativa da variância poderá ser afetada por esse valor.

O resíduo estudentizado externamente, também denominado de resíduo de jackknife, foi proposto com o propósito de contornar o problema acima citado, além de possuir algumas propriedades mais interessantes do que as demais formas de padronização. O procedimento consiste em eliminar a j -ésima observação e obter o estimador da variância $\hat{\sigma}_{(j)}^2$. O subscrito j escrito entre parênteses significa tratar-se de um estimador aplicado para as $(n-1)$ observações resultantes da eliminação da j -ésima da amostra.

$$z_j = \frac{e_j}{\sqrt{(1-h_{jj})\hat{\sigma}_{(j)}^2}}$$

De acordo com Ferreira (2013), a matriz $X(X'X)^{-1}X'$ é denominada de projetor e representada por P , pois projeta o vetor n -dimensional das observações (Y_v) no subespaço $(p+1)$ -dimensional. Aplicando esta matriz ao vetor das observações (Y_v) é obtido o vetor dos valores preditos ($\hat{Y}_v$), ou seja, $\hat{Y}_v = PY_v$. A matriz P é denominada na análise de regressão simples de matriz Hat e representada por H . Os elementos da diagonal da matriz H são designados por (h_{jj}) .

Seja o modelo na forma matricial $Y_v = X\beta_v + e_v$. As equações preditoras de erros, $e_v = Y_v - X\hat{\beta}_v$ e $e_v = (I - H)Y_v$, são equivalentes.

Dado que: $\hat{\beta}_v = (X'X)^{-1}X'Y_v$ e $\hat{Y}_v = X\hat{\beta}_v$. Então: $e_v = Y_v - X\hat{\beta}_v$, logo:

$$e_v = Y_v - X(X'X)^{-1}X'Y_v = (I - H)Y_v$$

$$Var(e_v) = (I - H)Var(Y_v)(I - H)'$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_v) &= (I - H)(I\sigma^2)(I - H)' \\ \text{Var}(e_v) &= (I - H)(I - H)'\sigma^2 \\ \text{Var}(e_v) &= [(I - H) - (I - H)H']\sigma^2 \\ \text{Var}(e_v) &= (I - H - H' + HH')\sigma^2 \end{aligned}$$

Dado que $HH' = H'$, então: $\text{Var}(e_v) = (I - H)\sigma^2$.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{e}_v) &= (I - H)\hat{\sigma}^2; \\ \text{Var}(\hat{e}_j) &= (1 - h_{jj})\hat{\sigma}^2 \text{ (para } j\text{-ésima observação)}. \end{aligned}$$

Prudente (2009) cita que a distribuição dos resíduos ordinários, no modelo não linear, é matematicamente intratável, principalmente para pequenas amostras. Em geral, esses resíduos possuem esperanças diferentes de zero e distribuição dependente, grandemente dos valores ajustados, o que pode conduzi-los a não refletirem exatamente a distribuição dos erros. Então, nesse caso, os critérios de diagnósticos da regressão normal linear podem falhar quando utilizados na regressão não linear.

As técnicas utilizadas no diagnóstico na regressão não linear, com exceção dos resíduos, são simples adaptações da regressão linear. Na regressão não linear, os resíduos usuais (ordinário, padronizado e estudentizado) formam uma base de utilização significativa na construção de métodos de diagnósticos, mas é necessário cautela ao usá-los.

De acordo com Cook & Tsai (1985), pode-se empregar uma expansão em série de Taylor até a segunda ordem, expandindo $\mu(\hat{\beta}_v)$, tal que, $Y = \mu(\beta_v) + e_v$ e $\hat{e}_j = y_j - \mu_j(\hat{\beta}_v)$, em torno de β_v para investigar o comportamento dos resíduos na regressão não linear. A função $\mu(\beta_v) = g(\beta_v; X)$ é diferenciável em β_v e X representa a matriz dos valores das variáveis explicativas ou regressoras. Particularmente, derivam aproximações quadráticas para a média e variância dos resíduos ordinários, e para as covariâncias entre os resíduos ordinários e os valores ajustados.

A conclusão da pesquisa é que os resíduos comumente usados nas análises de regressão linear podem produzir resultados enganosos, quando aplicados na regressão não linear, não refletindo de forma correta a distribuição dos erros, então sugerem um novo tipo de resíduo, denominado resíduo projetado, o qual supera muitas das deficiências potenciais dos resíduos ordinários.

Martins (2013) utiliza a análise de resíduos projetados, desenvolvida por Cook & Tsai (1985), em modelos não lineares de regressão, em uma aplicação no estudo de crescimento de frutos, utilizando o modelo logístico e de Gompertz na análise dos resíduos ordinários e dos resíduos projetados, a fim de verificar as suas vantagens. Os resíduos projetados se mostraram viáveis para o diagnóstico dos modelos e descartaram possíveis tendências apresentadas pelos resíduos padronizados.

Em geral, na regressão não linear, os resíduos projetados apresentam maior precisão nos diagnósticos do que os resíduos ordinários. Prudente (2009) e Martins (2013)

mostram com mais profundidade a teoria e os procedimentos para a obtenção dos resíduos projetados.

Figura 5.5.1 - Algumas formas de gráfico de distribuição de resíduos. Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~nancy/Cursos/me104/regressao.pdf> (17 mar. 2021)

O gráfico dos resíduos versus valores ajustados (valores preditos) é uma das principais técnicas utilizadas para verificar as suposições sobre os resíduos. Os gráficos, além de detectar heteroscedasticidade, podem indicar a não existência de uma relação linear entre as variáveis regressoras ou explicativas com a variável dependente ou resposta. A figura 5.5.1 mostra diversas formas de gráficos configurando vários tipos de distribuições de resíduos em torno do valor zero.

Caso o gráfico apresente uma distribuição dos resíduos aleatória, não demonstrando nenhum tipo de tendência aparente, ou seja, mostrando que a faixa de variação dos resíduos ao longo dos valores ajustados é constante, há indícios de que a variância dos resíduos é homocedástica. Entretanto, se o gráfico apresentar uma forma de funil há o indicativo da presença de heterocedasticidade.

No caso de a variância do erro não ser constante, a solução é fazer uma transformação na variável dependente Y ou usar o método dos mínimos quadrados ponderados.

No caso de uma regressão linear, por exemplo, se os pontos do gráfico formam uma parábola, então há indicativo de seja necessário incluir termos de segundo grau.

5.6. REGRESSÃO NÃO LINEAR

A classificação de um modelo como linear, muitas vezes, é interpretada de acordo com o tipo de curva matemática que o modelo descreve.

Ferreira (2013) sugere utilizar um conceito filosófico para esclarecer e definir se um modelo é linear ou não linear, ou seja, classificar se é linear ou não linear nos parâmetros. Formalmente, diz que um modelo é linear se as derivadas parciais da

variável dependente, em relação a cada parâmetro, não são funções dos próprios parâmetros.

Na verificação, para melhor entendimento, se o modelo é linear ou não linear, sejam os seguintes modelos para estimar o volume (V) de uma árvore em função do seu DAP (D):

$$\text{a) } V_j = \beta_0 + \beta_1 D_j + \beta_2 D_j^2 + e_j \quad \text{b) } V_j = \beta_0 D_j^{\beta_1} + e_j$$

Examinando o modelo (a):

$$\frac{\partial V_j}{\partial \beta_0} = 1 \quad \frac{\partial V_j}{\partial \beta_1} = D_j \quad \frac{\partial V_j}{\partial \beta_2} = D_j^2$$

Denotando que o modelo (a) é linear, haja vista que nenhuma das derivadas parciais depende dos próprios parâmetros.

Considerando o modelo (b):

$$\frac{\partial V_j}{\partial \beta_0} = D_j^{\beta_1} \quad \frac{\partial V_j}{\partial \beta_1} = \beta_0 D_j^{\beta_1}$$

O modelo (b) é não linear nos parâmetros, pois as duas derivadas parciais são funções dos próprios parâmetros.

As equações normais do modelo não linear, ao contrário das equações do modelo de regressão linear, apresentam incógnitas nos dois lados das equações, impossibilitando obter as soluções explícitas para as incógnitas com base nos valores conhecidos. De acordo com Gujarati & Porter (2011), existem vários procedimentos ou algoritmos para estimar os parâmetros para os modelos não lineares. Destacam-se os seguintes:

- a) Método da busca direta ou da tentativa e erro ou método da livre derivada;
- b) Método da otimização direta;
- c) Método da linearização iterativa.

Neste livro, será utilizado o método de linearização de Gauss-Newton, o qual consiste em linearizar uma função não linear em torno de alguns valores iniciais dos parâmetros. Pelo método dos mínimos quadrados ordinários (MQO) é estimada a função linear e os valores escolhidos inicialmente são ajustados. Estes valores ajustados são utilizados para relinearizar o modelo e novamente são estimados pelo MQO e os valores estimados são reajustados. O processo continua até que não haja mais alterações substanciais nos valores estimados a partir das últimas iterações. O método de Gauss Newton usa a expansão de séries de Taylor para a linearização da função não linear.

5.6.1. DETERMINAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS, PARA O MODELO DE MITSCHERLICH, PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

Seja X a variável, simbolizando as ocasiões, para caracterizar unidades de tempo no modelo de regressão de Mitscherlich.

$$Y_j = \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}] + e_j$$

Supondo que os erros e_j ($j=1, \dots, n$) sejam não correlacionados entre si e possuindo distribuição normal com média zero e variância σ^2 . Usando o método dos mínimos quadrados ordinários (MQO), para obter os estimadores de mínimos quadrados, têm-se:

$$Z = \sum_{j=1}^n e_j^2 = \sum_{j=1}^n \{Y_j - \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}]\}^2$$

$$a) \frac{\partial Z}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{j=1}^n \{Y_j - \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}]\} \times -[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}] \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}]^2$$

$$b) \frac{\partial Z}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{j=1}^n \{Y_j - \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}]\} [\beta_0 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}] \times -(X_j + \beta_2) \ln 10 \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n [Y_j (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n (X_j + \hat{\beta}_2) [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \times 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}$$

$$c) \frac{\partial Z}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{j=1}^n \{Y_j - \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}]\} [\beta_0 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}] (-\beta_1) \ln 10 \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta_2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}$$

$$\text{Resultando:} \begin{cases} \sum_{j=1}^n Y_j [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}]^2 \\ \sum_{j=1}^n [Y_j (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \\ \sum_{j=1}^n Y_j 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \end{cases}$$

5.6.2. DETERMINAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS, PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS, USANDO A FORMA MATRICIAL PARA O MODELO DE MITSCHERLICH.

Seja o modelo não linear F definido para o vetor de parâmetros $\beta'_v = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_m]$ e para o vetor de variáveis regressoras da j -ésima unidade amostral $Z'_{vj} = [Z_{1j} \ Z_{2j} \ \dots \ Z_{mj}]$.

$$Y_j = F_j(\beta_v, Z_{vj}) + e_j$$

Na forma matricial: $Y_v = F(\beta_v) + e_v$.

A equação de Mitscherlich possui uma única variável regressora X .

$$Y_j = \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_j + \beta_2)}] + e_j$$

$\beta'_v = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]$: é o vetor de parâmetros;

$e'_v = [e_1, e_2, \dots, e_n]$: é o vetor dos erros.

Obtenção do vetor $F(\beta_v)$ que será representado por F_v :

$F'_v = \{\beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)}] \ \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)}] \ \dots \ \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)}]\}$: é o vetor do modelo.

Na forma matricial: $Y_v = F(\beta_v) + e_v$, onde $Y'_v = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$ é o vetor das n observações.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 - 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)} \\ \beta_0 - 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)} \\ \vdots \\ \beta_0 - 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

De acordo com Ferreira (2013), utilizando o método de mínimos quadrados, tem-se: $L(\beta_v) = e'_v e_v$. Substituindo $e_v = Y_v - F_v$ e derivando em relação ao vetor β_v .

$$L(\beta_v) = e'_v e_v = (Y_v - F_v)'(Y_v - F_v) = Y'_v Y_v - 2Y'_v F_v + F'_v F_v$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_v} = \frac{-2\partial Y'_v F_v}{\partial \beta_v} + \frac{\partial F'_v F_v}{\partial \beta_v}$$

Dado que:

$$\frac{-2\partial Y'_v F_v}{\partial \beta_v} = \frac{-2\partial Y'_v F_v}{\partial F_v} \times \frac{\partial F_v}{\partial \beta_v} = -2Y'_v X$$

Tal que $X = \frac{\partial F_v}{\partial \beta_v}$ é a matriz de derivadas parciais, em que cada coluna é formada pela derivada da função linear em relação aos parâmetros.

Simplificando $\frac{\partial F_v' F_v}{\partial \beta_v}$ para: $\frac{\partial F_v' F_v}{\partial \beta_v} = \frac{\partial F_v' F_v}{\partial F_v} \times \frac{\partial F_v}{\partial \beta_v} = 2F_v' X$.

Portanto: $\frac{\partial L}{\partial \beta_v} = -2Y_v' X + 2F_v' X$.

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_v} = 0 \rightarrow X' F_v = X' Y_v$$

Tal que, $X' F_v = X' Y_v$, é o sistema de equações normais para os modelos não lineares. No entanto, como F_v e X são funções de β_v , um procedimento iterativo deve ser utilizado para obter $\hat{\beta}_v$. No caso da equação de Mitscherlich, têm-se:

$$X = \begin{bmatrix} [1 - 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)}] & \beta_0 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)} (X_1 + \beta_2) \ln 10 & \beta_0 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)} (\beta_1) \ln 10 \\ [1 - 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)}] & \beta_0 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)} (X_2 + \beta_2) \ln 10 & \beta_0 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)} (\beta_1) \ln 10 \\ \dots & \dots & \dots \\ [1 - 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)}] & \beta_0 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)} (X_n + \beta_2) \ln 10 & \beta_0 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)} (\beta_1) \ln 10 \end{bmatrix}$$

$$Y_v' = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_n]$$

$$F_v' = \{\beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(X_1 + \beta_2)}] \quad \beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(X_2 + \beta_2)}] \quad \dots \quad \beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(X_n + \beta_2)}]\}$$

$$X' F_v = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}]^2 \\ \hat{\beta}_0^2 \ln 10 \sum_{j=1}^n 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] (X_j + \hat{\beta}_2) \\ \hat{\beta}_0^2 \hat{\beta}_1 \ln 10 \sum_{j=1}^n 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \end{bmatrix}$$

$$X' Y_v = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n Y_j [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \\ \beta_0 \ln 10 \sum_{j=1}^n Y_j (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} \\ \beta_0 \beta_1 \ln 10 \sum_{j=1}^n Y_j 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} \end{bmatrix}$$

$$X'Y_v = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n Y_j [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \\ \sum_{j=1}^n Y_j (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} \\ \sum_{j=1}^n Y_j 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} \end{bmatrix} = X'F_v = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}]^2 \\ \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \\ \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \end{bmatrix}$$

Tem-se, então, o sistema de equações normais para o modelo de Mitscherlich:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n Y_j [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}]^2 \\ \sum_{j=1}^n [Y_j (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n (X_j + \hat{\beta}_2) 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \\ \sum_{j=1}^n Y_j 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)} [1 - 10^{-\hat{\beta}_1(X_j + \hat{\beta}_2)}] \end{cases}$$

Como não existe uma solução explícita, haja vista, que o vetor F_v e a matriz X são funções do vetor de parâmetros β_v , então há a necessidade de iniciar um processo iterativo. Os métodos iterativos precisam do estabelecimento de um vetor β_v^* com valores iniciais para os parâmetros, tal que, de acordo com o método a ser utilizado, deve ser melhorado até que a soma dos quadrados dos resíduos seja minimizada.

Considerando que $SQ_{Res}(k) = e_v' e_v$ é a soma de quadrados dos resíduos na k -ésima iteração, então a matriz X e o vetor Y_v são usados para calcular o vetor Δ_v , tal que, para um valor constante λ , tem-se: $SQ_{Res}(\beta_{vk}^* + \lambda \Delta_v) < SQ_{Res}(\beta_{vk}^*)$.

No SAS existem quatro métodos disponíveis que diferem na forma de obter o vetor Δ_v , o qual é calculado para propiciar as trocas no vetor de parâmetros. De uma forma geral, de acordo com Ferreira (2013), os critérios básicos para os métodos: Gradiente, Gauss-Newton, Newton e Marquardt, são:

Gradiente: $\Delta_v = X' e_v$

Gauss-Newton: $\Delta_v = (X'X)^- X' e_v$

Newton: $\Delta_v = G^- X' e_v$

Marquardt: $\Delta_v = [X'X + \delta \text{diag}(X'X)]^- X' e_v$

$(X'X)^-$: é uma matriz inversa generalizada que pode ser uma reflexiva (g2). O ideal é usar uma matriz inversa generalizada de Moore-Penrose.

Os métodos Gauss-Newton e Marquardt realizam a regressão de resíduos em relação às primeiras derivadas do modelo não linear em relação aos parâmetros, até que haja convergência. O método de Newton faz a regressão dos resíduos em relação a uma função das segundas derivadas do modelo não linear com relação aos parâmetros (G^-).

O método de Marquardt é uma combinação entre os métodos de Gauss-Newton e o método do gradiente, onde a fórmula para atualização do vetor dos parâmetros é: $\Delta_v = [X'X + \delta \text{diag}(X'X)]^{-1} X'e_v$. Quando $\delta \rightarrow 0$ aproxima-se do método de Gauss-Newton e se $\delta \rightarrow \infty$ tende ao método de gradiente.

5.7. MÉTODO DE GAUSS-NEWTON

O método de Gauss-Newton usa a expansão em séries de Taylor do vetor de funções $F(\beta_v) = F(\beta_v^*) + X(\beta_v - \beta_v^*) + \dots$, donde a matriz das primeiras derivadas X é avaliada no ponto β_v^* .

De acordo com Ferreira (2013), substituindo os dois termos dessa expansão nas equações normais $X'F_v = X'Y_v$, têm-se:

$$\begin{aligned} X'F_v(\beta_v) &= X'Y_v \\ X'[F(\beta_v^*) + X(\beta_v - \beta_v^*)] &= X'Y_v \\ X'X(\beta_v - \beta_v^*) &= X'Y_v - X'F_v(\beta_v^*) \\ X'X\Delta_v &= X'e_v \end{aligned}$$

Portanto: $\Delta_v = (X'X)^{-1} X'e_v$.

Obtido o valor de $\Delta_v = (X'X)^{-1} X'e_v$ para β_v^* , aplica-se as equações $\beta_{v(k+1)}^* = \beta_{vk}^* + \lambda\Delta_v$ e $SQ_{\text{Res}}(\beta_{vk}^* + \lambda\Delta_v) < SQ_{\text{Res}}(\beta_{vk}^*)$, para obter o vetor das estimativas dos parâmetros do primeiro passo. O procedimento é repetido até que o vetor não se altere (convergência) dentro da precisão estipulada.

Para melhor entender o método iterativo de Gauss-Newton, seja o modelo para estimar a altura de árvore (ALT), em função do DAP, utilizando 55 observações da espécie.

$$ALT_j = \beta_0 e^{\beta_1 DAP} + u_j \quad j = 1, \dots, n$$

Para facilitar o desenvolvimento seja $Y_j = ALT$ e $X_j = DAP$.

$$\begin{aligned} Y_j &= \beta_0 e^{\beta_1 X_j} + u_j \quad j = 1, \dots, n \\ Z &= \sum_{j=1}^n u_j^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \beta_0 e^{\beta_1 X_j})^2 \\ \frac{\partial Z}{\partial \beta_0} &= 2 \sum_{j=1}^n (Y_j - \beta_0 e^{\beta_1 X_j}) (-e^{\beta_1 X_j}) \\ \frac{\partial Z}{\partial \beta_1} &= 2 \sum_{j=1}^n (Y_j - \beta_0 e^{\beta_1 X_j}) (-\beta_0 e^{\beta_1 X_j}) (X_j) \end{aligned}$$

Sejam as equações normais considerando $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, como estimadores MMO dos parâmetros β_0 e β_1 .

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n Y_j e^{\hat{\beta}_1 X_j} = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n e^{2\hat{\beta}_1 X_j} \\ \sum_{j=1}^n Y_j X_j e^{\hat{\beta}_1 X_j} = \hat{\beta}_0 \sum_{j=1}^n X_j e^{2\hat{\beta}_1 X_j} \end{cases}$$

Devido à existência de incógnitas em ambos os lados das equações não é possível obter soluções explícitas. Seja a obtenção da aproximação linear dessa função não linear pela expansão de Taylor considerando dois parâmetros. De acordo com Gujarati & Porter (2011), considerando a expansão em torno de $X = a$ e $Z = b$, o teorema de Taylor mostra que:

$$f(X, Z) = f(a, b) + f_x(a, b)(X - a) + f_z(a, b)f(Z - b) + \frac{1}{2!} f_{xx}(a, b)(X - a)^2 - 2f_{xz}(a, b)(X - a)(Z - b) + f_{zz}(a, b)(Z - b)^2 + \dots$$

Tal que:

f_x : derivada parcial da função em relação a X e f_{xx} é a segunda derivada da função em relação a X ;

f_z : derivada parcial da função em relação a Z e f_{zz} é a segunda derivada da função em relação a Z ;

f_{xz} : derivada da função em relação a X e Z .

Como o interesse, de acordo com o método de Gauss-Newton, é obter a aproximação linear da função $Y_j = \beta_0 e^{\beta_1 X_j} + u_j$, então serão utilizados os termos lineares de $f(X, Z)$:

$$f(X, Z) = f(a, b) + f_x(a, b)(X - a) + f_z(a, b)f(Z - b) \quad (5.7.1)$$

Linearizando a função em $\beta_0 = \beta_0^*$ e $\beta_1 = \beta_1^*$, e definindo os valores de β_0^* e de β_1^* como valores fixos dados, ou seja, soluções preliminares, então de 5.7.1:

$$f(\beta_0, \beta_1) = f(\beta_0^*, \beta_1^*) + f_{\beta_0}(\beta_0^*, \beta_1^*)(\beta_0 - \beta_0^*) + f_{\beta_1}(\beta_0^*, \beta_1^*)f(\beta_1 - \beta_1^*) \quad (5.7.2)$$

Supondo $\beta_0^* = 6,6$ e $\beta_1^* = 3,1$, como soluções iniciais propostas, para estimar os valores dos coeficientes, têm-se:

$$f(\beta_0^*, \beta_1^*) = 6,6e^{3,1X_j}$$

Dado que: $f_{\beta_0} = e^{\beta_1 X_j}$ e $f_{\beta_1} = \beta_0 X_j e^{\beta_1 X_j}$. Então:

$$f(\beta_0, \beta_1) = 6,6e^{3,1X_j} + e^{3,1X_j}(\beta_0 - 6,6) + 6,6X_j e^{3,1X_j}(\beta_1 - 3,1)$$

Fazendo $Y_j^* = f(\beta_0, \beta_1) - 6,6e^{3,1X_j}$. Resulta:

$$Y_j^* = e^{3,1X_j} (\beta_0 - 6,6) + 6,6X_j e^{3,1X_j} (\beta_1 - 3,1)$$

Fazendo também: $X_{1j} = e^{3,1X_j}$ $X_{2j} = 6,6X_j e^{3,1X_j}$ $\alpha_1 = \beta_0 - 6,6$ $\alpha_2 = \beta_1 - 3,1$

Tem-se, então, o modelo de regressão linear $Y_j^* = \alpha_1 X_{1j} + \alpha_2 X_{2j} + u_j$.

Dado que Y_j^* , X_{1j} e X_{2j} podem ser obtidos através do banco de dados, logo os valores de α_1 e α_2 podem ser obtidos pelo MQO, possibilitando obter: $\beta_0 = \hat{\alpha}_1 + 6,6$ e $\beta_1 = \hat{\alpha}_2 + 3,1$.

Definindo esses valores como $\beta_0^{**} = \hat{\alpha}_1 + 6,6$ e $\beta_1^{**} = \hat{\alpha}_2 + 3,1$, o procedimento é aplicado sucessivamente na equação 5.7.2 até que haja convergência.

Tabela 5.7.1 - Resultados (SAS) para os valores iniciais $\beta_0^* = 6,0$ e $\beta_1^* = 3,1$

Método: Gauss-Newton/Iterações			
Iteração	$\widehat{\beta}_0$	$\widehat{\beta}_1$	Soma de Quadrados
0	6,0000	3,1000	370,1
1	6,6726	3,0961	303,8
2	6,6723	3,0967	303,8

Na tabela 5.7.1 estão os resultados da regressão não linear pelo método de Gauss-Newton, usando os valores iniciais $\beta_0^* = 6,6$ e $\beta_1^* = 3,1$, onde foram suficientes apenas duas iterações para atingir os valores das estimativas MQO dos parâmetros.

Tabela 5.7.2 - Resultados considerando os valores iniciais ($\beta_0^* = 9,0$ e $\beta_1^* = 5,0$).

Método: Gauss-Newton /Iterações			
Iteração	$\widehat{\beta}_0$	$\widehat{\beta}_1$	Soma de Quadrados
0	9,0000	5,0000	4971,7
1	6,5489	3,8747	391,7
2	6,6776	3,1262	304,0
3	6,6742	3,0951	303,8
4	6,6723	3,0968	303,8
5	6,6724	3,0967	303,8

Verifica-se que os valores iniciais escolhidos estão muito próximos das estimativas MQO, mas caso fosse utilizado os seguintes valores mais distantes ($\beta_0^* = 9,0$ e $\beta_1^* = 5,0$), ver tabela 5.7.2, o número de iterações necessário passa para cinco.

O método iterativo de Gauss-Newton encontra-se disponível no Sistema de Análise Estatística (SAS). Para usar o procedimento NLIN do SAS é necessário estabelecer,

através da opção PARMS, os valores iniciais das estimativas dos parâmetros. No exemplo não linear apresentado, os valores iniciais dos parâmetros estimados poderiam ser os obtidos pela linearização do modelo, ou seja, $\text{Ln}ALT_j = \text{Ln}\beta_0 + \beta_1 DAP_j + \text{Ln}u_j$.

5.8. AVALIAÇÃO DA ADEQUACIDADE DOS MODELOS TESTADOS

Em modelos de regressão linear que incluem o termo constante (intercepto), o coeficiente de determinação R^2 representa a proporção da variação explicada pelo modelo. Neste caso, o quadrado do coeficiente de correlação entre os valores observados e preditos é exatamente o valor do R^2 . Se o modelo é linear e o termo constante não está presente (sem intercepto), o R^2 deve ser redefinido conforme Searle (1971). Muito cuidado deve-se ser tomado na sua interpretação, porque ele não é igual ao quadrado do coeficiente de correlação entre os valores observados e preditos. Pode ocorrer que o valor do coeficiente de determinação na versão sem intercepto, domine em muito, em modelos equivalentes, o valor correspondente ao caso com intercepto.

O coeficiente de determinação (ajustado ou não ajustado) não tem nenhum significado no caso de modelos não lineares, pois muitas vezes ocorrem valores altos mesmo havendo enorme discrepância entre os valores observados e estimados. Segundo Ratkowsky (1990) independentemente de haver ou não termo constante no modelo, o R^2 não tem nenhum significado para modelos não lineares. SOUZA (1998) recomenda que no caso de regressão não linear, atendidas as pressuposições da análise de variância, a adequacidade do ajustamento do modelo pode ser medida pelo quadrado do coeficiente de correlação entre os valores observados e preditos, pela análise gráfica dos resíduos e pela verificação da magnitude da variância residual obtida por máxima verossimilhança.

Para decidir sobre o ajustamento de um modelo não linear é fundamental verificar a discrepância entre os valores observados e preditos. É importante fazer uma análise do gráfico de resíduos e verificar a magnitude da variância residual obtida por máxima verossimilhança. Evidentemente que quanto menor for o valor da variância residual melhor será o ajuste.

Atendidas as pressuposições usuais da análise de variância, pode ser usado o coeficiente de variação ($CV\%$) considerando a raiz quadrada da estimativa de máxima verossimilhança da variância residual ($RQMR$).

$$RQMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}}$$

$$CV\% = \frac{RQMR}{\bar{Y}}$$

5.9. VALIDAÇÃO DA PREDIÇÃO DO MODELO DE REGRESSÃO PELO TESTE DE GRAYBILL

Este procedimento de validação da predição consiste em ajustar um modelo linear de primeiro grau, mas considerando os valores estimados ($\hat{Y}_j$) como variável dependente e os valores observados no experimento (Y_j) como variável independente, isto é, $\hat{Y}_j = \beta_0 + \beta_1 Y_j + e_j$. Conforme Graybill (1976), a significância da regressão é avaliada aplicando o teste $F(H_0)$ para as estimativas dos parâmetros, conforme o seguinte teste de hipótese:

$$H_0 : C'\beta_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ versus, } H_A : C'\beta_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_0 : hipótese nula significando que $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = 1$, ou seja, o intercepto é igual a zero e a inclinação é igual a 1 e H_A : hipótese alternativa de rejeição de H_0 . Não rejeitar H_0 quando $F(H_0)$ é menor do que $F_{\alpha; m; n-p}$.

$$F(H_0) = \frac{(C'\hat{\beta}_v - \theta_v)' [C'(Y'Y)^{-1}C]^{-1} (C'\hat{\beta}_v - \theta_v)}{m\hat{\sigma}^2}$$

$$\theta_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta}_v = (Y'Y)^{-1} (Y'\hat{Y}_v) \quad \hat{\sigma}^2 = QMR_{\text{Res}} = \frac{\hat{Y}_v'\hat{Y}_v - \hat{\beta}_v'Y'\hat{Y}_v}{n-p} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 1 & Y_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & Y_n \end{bmatrix}$$

Y : é a matriz do modelo tendo o número de colunas igual ao número de elementos de β_v e o número de linhas igual ao tamanho da amostra (n);

$\hat{Y}_v$: vetor dos valores estimados pela regressão;

$Y_v = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$: vetor dos dados observados no experimento;

$p = 2$: número de parâmetros estimados;

$m = 2$: número de linhas da matriz C ;

C : é a matriz com m linhas e p colunas;

QM_{Res} : é o quadrado médio do resíduo.

Capítulo 6

Ciclo de corte economicamente aconselhável

Neste capítulo, antes de tratar especificamente sobre o tema em foco, preliminarmente serão abordados alguns tópicos fundamentais de matemática, com o intuito de melhor embasar os estudantes e/ou leitores para o tema principal, que será obter a equação de crescimento da floresta ou das espécies, com base na função de Mitscherlich, visando prever a rotação economicamente aconselhável. Desse modo, os seguintes temas são apresentados: derivadas; máximo e mínimos de uma função com uma variável; máximo e mínimo de uma função com duas variáveis; exemplo de máximo e mínimo de uma função com três variáveis; máximos e mínimos condicionados; multiplicadores de Lagrange; rotação economicamente aconselhável pela equação de Mitscherlich e pela equação de Von-Bertalanffy.

6.1 DERIVADAS

Dada uma função $y = f(x)$ e x_0 um ponto de seu domínio. Tomando a diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, onde $x \neq x_0$, é o acréscimo ou incremento da função e $\Delta x = x - x_0$ como o acréscimo da variável independente x , tem-se a razão incremental definida pelo quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Define-se a derivada de $y = f(x)$ no ponto x_0 e representada por $f'(x_0)$ ou y' , ao limite da razão incremental quando x tende para o ponto x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Desde $\Delta x = x - x_0$, se $x \rightarrow x_0$, então $\Delta x \rightarrow 0$, logo: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

O valor numérico da derivada de uma função $y = f(x)$, no ponto (x_0, y_0) , é o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente no gráfico da função nesse ponto com o eixo das abscissas. Derivadas de algumas funções, sendo $u = f(x)$ e $v = z(x)$:

a) $y = k$ (constante)	$y' = 0$
b) $y = ax^n$	$y' = n \times ax^{n-1}$
c) $y = uv$	$y' = uv' + vu'$
d) $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
e) $y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
f) $y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
g) $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
h) $y = \log_e x$	$y' = \frac{1}{x}$
i) $y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u} u' \log_a e$
j) $y = \log_e u$	$y' = \frac{u'}{u}$
k) $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

l) $y = e^x$	$y' = e^x$
m) $y = a^u$	$y' = a^u u' \ln a$
n) $y = e^u$	$y' = e^u u'$

6.2. MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO COM UMA VARIÁVEL

A figura 6.1 mostra os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3, x_4 . Estes pontos são chamados de pontos extremos da função. Os valores $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados de máximos relativos e $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são denominados de mínimos relativos.

Figura 6.1 - Fonte: Flemming & Gonçalves (2007).

São chamados de pontos de máximos relativos, os pontos onde a função deixa de ser crescente e passa a ser decrescente, enquanto que os pontos denominados de mínimos relativos são os pontos onde a função passa de decrescente para crescente.

O Teorema de Rolle mostra que uma função $f(x)$ definida e contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e se anula em suas extremidades [$f(a) = f(b) = 0$], então existe pelo menos um ponto intermediário $x = x_0$, $a < x_0 < b$, tal que a derivada $f'(x)$ se anula, ou seja, $f'(x_0) = 0$.

- a) (a, b) : significa intervalo aberto: $\{x/a < x < b\}$;
- b) $[a, b]$: significa intervalo fechado: $\{x/a \leq x \leq b\}$.

De acordo com Piskounov (1978):

- a) Se a função $f(x)$ derivável sobre o segmento $[a, b]$ é crescente sobre este segmento, então, a sua derivada não é negativa sobre $[a, b]$, isto é, $f'(x) \geq 0$;
- b) Se a função $f(x)$ é contínua sobre $[a, b]$, derivável no intervalo (a, b) e, mais, se $f'(x) > 0$ para $a < x < b$, então, $f(x)$ é uma função crescente sobre $[a, b]$;
- c) Se $f(x)$ é uma função decrescente sobre $[a, b]$, então, $f'(x) \leq 0$ sobre este segmento. Se $f'(x) < 0$ no intervalo (a, b) , então, $f(x)$ é decrescente sobre $[a, b]$.

Uma função $f(x)$ admite um máximo no ponto x_0 , se o valor da função $f(x)$ é neste ponto maior que em qualquer outro ponto de um determinado intervalo contendo o ponto x_0 , ou seja, $f(x)$ admite um máximo no ponto $x = x_0$, se $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ para todos os Δx (positivos ou negativos) rigorosamente pequenos em valor absoluto.

Uma função $f(x)$ admite um mínimo no ponto $x = x_0$, se $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ para todos os Δx (positivos ou negativos) rigorosamente pequenos em valor absoluto.

Se a função derivável $f(x)$ tem um máximo ou um mínimo no ponto $x = x_0$, então a sua derivada se anula nesse ponto, ou seja, $f'(x) = 0$, significando que a tangente é paralela ao eixo das abscissas nos pontos de máximo ou de mínimo. Entretanto, ressalta-se que, essa condição não é suficiente para concluir se o ponto é máximo ou mínimo.

Piskounov (1979) cita que dada uma função contínua num intervalo contendo o ponto crítico x_0 e derivável em qualquer ponto desse intervalo (exceto, possivelmente, no ponto x_0). Se a derivada muda de sinal de mais para menos quando passa pelo ponto crítico da esquerda para a direita, a função tem um máximo para $x = x_0$. Se a derivada muda de sinal de menos para mais quando passa pelo ponto x_0 da esquerda para direita, a função tem um mínimo nesse ponto, ou seja:

Se $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{para } x > x_0 \end{cases}$: a função admite um máximo no ponto x_0 .

Se $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{para } x > x_0 \end{cases}$: a função admite um mínimo no ponto x_0 .

Gomes & Nogueira (1980) definem os pontos de inflexão de uma função como os pontos de máximo ou de mínimo da sua derivada primeira.

Quando existe $f'(x)$, a condição $f'(x) = 0$ é necessária para a existência de um extremo relativo em x_0 , mas não é suficiente. O ponto x_0 pertencente ao domínio da função tal que $f'(x) = 0$ é chamado ponto crítico.

Seja uma função $f(x)$ derivável no intervalo (a, b) e x_0 um ponto crítico de $f(x)$ nesse intervalo, isto é, $f'(x_0) = 0$, com $a < x_0 < b$, se $f(x)$ admite $f''(x_0)$, em (a, b) , pelo critério da segunda derivada, têm-se:

- a) Se $f''(x_0) < 0$, $f(x)$ tem um valor máximo relativo em x_0 ;
- b) Se $f''(x_0) > 0$, $f(x)$ tem um valor mínimo relativo em x_0 .

Para visualizar os pontos extremos de uma função é muito importante observar o gráfico da função.

Uma função definida em um determinado intervalo pode admitir vários pontos extremos relativos. O maior valor é denominado de máximo absoluto da função nesse intervalo. De forma análoga, o menor valor é chamado de mínimo absoluto.

6.3. MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO COM DUAS VARIÁVEIS

Diz-se que a função $z = f(x, y)$ admite um máximo no ponto $(x = x_0 \text{ e } y = y_0)$, se $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) rigorosamente vizinhos do ponto (x_0, y_0) , mas diferentes deste ponto.

Analogamente, a função $z = f(x, y)$ admite um mínimo no ponto (x_0, y_0) se $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, para todos os pontos (x, y) suficientemente vizinhos do ponto (x_0, y_0) , mas diferentes deste ponto.

Se $z = f(x, y)$ admite um ponto extremo (máximo ou mínimo) para os valores $(x = x_0 \text{ e } y = y_0)$, então, cada derivada parcial de primeira ordem de $z = f(x, y)$ anula-se para esses valores das variáveis independentes ou não existe neste ponto.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

No caso de uma função $z = f(x, y)$ com duas variáveis cujas derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas em um conjunto aberto que contém (x_0, y_0) , sendo (x_0, y_0) um ponto crítico de $z = f(x, y)$, e considerando $\det H(x, y)$ como o determinante da matriz Hessiana H , tem-se:

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

- a) Se $\det H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $f(x_0, y_0)$ é um mínimo de $f(x, y)$;
- b) Se $\det H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então $f(x_0, y_0)$ é um máximo de $f(x, y)$;
- c) Se $\det H(x_0, y_0) < 0$, então $f(x, y)$ não têm máximo nem mínimo. Neste caso é um ponto de sela;
- d) Se $\det H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar (pode ser um ponto de máximo, de mínimo ou de sela).

De acordo com Gonçalves & Flemming (2007), a matriz $H(x, y)$ é denominada de matriz Hessiana e o seu determinante $\det H(x, y)$ é chamado de determinante hessiano da função $f(x, y)$ ou hessiano da função.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\rho^2 f(x, y)}{\rho x^2} & \frac{\rho^2 f(x, y)}{\rho y \rho x} \\ \frac{\rho^2 f(x, y)}{\rho x \rho y} & \frac{\rho^2 f(x, y)}{\rho y^2} \end{bmatrix}$$

Exercício 6.3.1. Seja a função $Z = f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 - 12y + 3$, por meio da qual se deseja obter o ponto crítico.

- a) Tomar as derivadas parciais de primeira ordem e obter o ponto (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 6y - 12 = 0 \quad (x_0, y_0) = (1, 2)$$

- b) Obter a matriz Hessiana H e definir a natureza de $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 6 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \det H = 12 > 0$$

Como $\det H = 12 > 0$ e $f_{xx} = 2$, ou seja, $f_{xx} > 0$, então $(x_0, y_0) = (1, 2)$ é um ponto de mínimo.

6.4. EXEMPLO DE OBTENÇÃO DE MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO COM TRÊS VARIÁVEIS

Exercício 6.4.1. Seja $Z = f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2z^2 + yz + 6x - 2y$. Obter os pontos críticos.

a) Tomar as derivadas parciais de primeira ordem e obter o ponto (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x} &= 2x - 2y + 6 = 0 & x &= -\frac{61}{15} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= -2x + 6y + z - 2 = 0 & y &= -\frac{16}{15} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= 4z + y = 0 & z &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

b) Obter a matriz Hessiana H e definir a natureza do ponto (x_0, y_0, z_0) :

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 6 \quad f_{zz} = 4 \quad f_{xy} = -2 \quad f_{xz} = 0 \quad f_{yz} = 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det H = 30$$

b1) Diagonalizar a matriz Hessiana (H), através de operações elementares, para definir a natureza do ponto (x_0, y_0, z_0) . Resultando:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

Dado que os elementos da diagonal principal são todos positivos, conclui-se que a matriz Hessiana é definida positiva, então a função passa por um mínimo relativo no ponto:

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{61}{15}, -\frac{16}{15}, \frac{4}{15}\right)$$

Entende-se como operações elementares: permutar entre si quaisquer duas linhas (colunas); multiplicar os elementos de uma linha (coluna) por um escalar (constante); adicionar a uma linha (coluna) outra linha (coluna) cujos elementos sejam multiplicados por um escalar (constante).

b2) Diagonalizar a matriz Hessiana, pela decomposição espectral de H , ver capítulo 2, seção 2.8, para definir a natureza do ponto (x_0, y_0, z_0) . Têm-se da álgebra de matrizes: $H = PDP'$ e $D = P'HP$.

P : é a matriz composta pelos autovetores associados aos autovalores segundo a sequência $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3)$ e D é matriz diagonal composta pelos autovalores de H . Usando o programa de operações com vetores e matrizes (Proc IML), tabela C1 do apêndice C, então:

$$P = \begin{bmatrix} -0,349382 & 0,238434 & 0,9061356 \\ 0,8918807 & -0,211794 & 0,3996151 \\ 0,2871955 & 0,947783 & -0,138658 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 7,1054826 & 0 & 0 \\ 0 & 3,7765379 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1179795 \end{bmatrix}$$

A decomposição espectral mostra que a matriz Hessiana H é definida positiva, haja vista os seus autovalores serem todos positivos, então a função passa por um mínimo relativo

no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{61}{15}, -\frac{16}{15}, \frac{4}{15})$.

6.5. MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS

É frequente a ocorrência de problemas de determinação de máximos e mínimos condicionados de funções, como por exemplo, obter os pontos críticos da função $f(x, y)$, mas condicionada a uma (ou várias) restrição sobre os valores das variáveis, tal como a restrição $g(x, y) = c$.

Cita-se, como exemplo, o planejamento de amostragem para a realização de um levantamento florestal, onde a amostra é dimensionada visando a maximizar a precisão, mas condicionada a atender a uma determinada função custo. É também o caso da análise econômica para determinar a data da exploração de uma floresta a ser manejada, mas condicionando obter a maximização da receita líquida.

Marchand (2016) cita que problemas de otimização restrita podem ser muito complexos, não havendo um método geral para determinar a solução de todas essas classes de questões. Em algumas situações simples é possível obter um resultado explicitando uma variável em função das outras na restrição, substituindo o resultado na função objetivo e resolvendo o problema de otimização irrestrita (ou não restrita) resultante.

Gonçalves & Flemming (2007) citam que entre os métodos que permitem analisar situações mais gerais, está o método dos Multiplicadores de Lagrange. Por meio desse método, um problema de otimização restrita com p variáveis e m variáveis de igualdade é transformado em uma solução de otimização não restrita com $(p + m)$ variáveis. Então, o método dos multiplicadores de Lagrange consiste em transformar problemas de otimização com restrição em resoluções sem restrição, através da inserção de um novo parâmetro, denominado de multiplicador de Lagrange (λ).

Um problema de otimização com restrição pode ser escrito da seguinte forma: minimize (ou maximize) uma função real submetida a uma função limitadora (ou restritiva).

6.6. MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (JOSEPH LOUIS LAGRANGE 1736-1813)

O método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar extremos (máximos e mínimos) de uma função com uma ou mais variáveis submetidas a uma ou mais restrições. O método consiste em construir a função (L) de Lagrange, originada pela introdução de novas variáveis (λ_i) chamadas de multiplicadores de Lagrange. Então, as análises são feitas a partir da função de Lagrange.

Seja um problema de uma função com p variáveis $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ e m funções de restrição, $g_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_p)$, definidas e com derivadas parciais contínuas. Então, o método dos multiplicadores de Lagrange se baseia no fato que todo extremo relativo de uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ sujeita às restrições: $g_i(x_1, x_2, \dots, x_p) = c_i$, tal que c_i ($i = 1, m$) são constantes, ocorre em um ponto crítico da função de Lagrange (L).

Seja a função L definida para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_p$:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Os números reais λ_i que tornam compatível o sistema são chamados multiplicadores de Lagrange. Os termos λ_i podem ser adicionados ou subtraídos.

Com efeito, considerando o exemplo da função com duas variáveis $f(x, y)$ com a restrição $g(x, y) = c$, tem-se que, os pontos de máximo e/ou mínimo condicionados de $f(x, y)$ devem satisfazer o sistema de equações 6.6.1:

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g[(x, y) - c]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (6.6.1)$$

Então, resolvendo o sistema de equações 6.6.1, diversas soluções podem ser obtidas. O ponto (x_0, y_0) desejado, onde a função $f(x, y)$ tem seus extremos sujeitos à restrição, estão entre essas soluções.

O método dos multiplicadores de Lagrange apenas fornece os pontos críticos da função sem definir a sua natureza, ou seja, se é de mínimo ou de máximo. Assim sendo, as suas classificações devem ser feitas usando outros argumentos, entre eles os meios geométricos. O método de Lagrange é aplicável também a funções não lineares.

Exercício 6.6.1 - Seja a função $f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 - 12y + 3$, vista no exercício 6.3.1, através da qual se deseja obter o ponto crítico, mas respeitando-se a condição $g(x, y) = x + 2y = 7$.

- a) Como visto no exercício 6.3.1, ocorreu que $\det H = 12 > 0$ e $f_{xx} = 2$, então $(x_0, y_0) = (1, 2)$ é um ponto de mínimo;
- b) Usando o procedimento clássico de substituição de $x = 7 - 2y$ em $f(x, y)$, obter o mínimo condicionado de $f(x, y)$ sob a condição $x + 2y = 7$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (7 - 2y)^2 - 2(7 - 2y) + 3y^2 - 12y + 3 \\ f(x, y) &= 49 - 28y + 4y^2 - 14 + 4y + 3y^2 - 12y + 3 \\ f(x, y) &= 7y^2 - 36y + 38 \end{aligned}$$

$$\frac{df(x, y)}{dy} = 14y - 36 = 0, \text{ onde implica: } y = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

$$\text{Como } x = 7 - 2y, \text{ então: } x = 7 - 2 \times \frac{18}{7} = \frac{13}{7}$$

O mínimo da função $f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 - 12y + 3$, sob a restrição $g(x, y) = x + 2y = 7$, ocorrerá para $x = \frac{13}{7}$ e $y = \frac{18}{7}$.

- c) Obter o mínimo condicionado para $g(x, y) = x + 2y = 7$, mas através do método dos multiplicadores de Lagrange.

Seja, então, a função escrita na forma:

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$L = x^2 - 2x + 3y^2 - 12y + 3 + \lambda(x + 2y - 7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2 + \lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 6y - 12 + 2\lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 7 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = -\lambda \\ 3y - 6 = -\lambda \end{cases} \rightarrow 2x - 3y = -4$$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -14 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \rightarrow y = \frac{18}{7} \quad x = \frac{13}{7}$$

Os resultados confirmam o obtido usando a metodologia convencional vista anteriormente.

Exercício 6.6.2 - Seja a função $Z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x - 2y$, pela qual se deseja obter o ponto crítico, mas respeitando-se a condição $g(x, y) = x + 2y = 2$.

a) Estudar natureza do ponto crítico da função $Z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x - 2y$:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - 2y - 6 = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -2x + 6y - 2 = 0 \quad (x, y) = (5, 2)$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \det H = 8 > 0$$

Como $\det H = 8 > 0$ e $f_{xx} = 2 > 0$, então $(x_0, y_0) = (5, 2)$ é um ponto de mínimo.

b) Obter o mínimo condicionado sob a condição $g(x, y) = x + 2y = 2$, pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$L = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x - 2y + \lambda(x + 2y - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2y - 6 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2x + 2y + 6 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 6y - 2 + 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = x - 3y + 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 2 = 0$$

$$(1) = (2) \quad \rightarrow \quad -2x + 2y + 6 = x - 3y + 1$$

$$\begin{cases} -3x + 5y = -5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -5 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{11} \quad x = \frac{20}{11}$$

Então sob a condição $g(x, y) = x + 2y = 2$, o ponto $(x_0, y_0) = (\frac{20}{11}, \frac{1}{11})$ minimiza a função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x - 2y$.

Exercício 6.6.3 - Seja a função $f(x, y, z)$. Obter pelo método dos multiplicadores de Lagrange o mínimo sob a restrição: $g(x, y, z) = x + 2y + z = 4$.

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2z^2 + yz + 6x - 2y$$

- a) No exercício 6.4.1 é mostrado que $f(x, y, z)$ possui um ponto de mínimo;
 b) Obter o mínimo condicionado da função $f(x, y, z)$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange, sob a restrição $g(x, y, z) = x + 2y + z = 4$.

Seja a função de L de Lagrange:

$$L = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2z^2 + yz + 6x - 2y + \lambda(x + 2y + z - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2y + 6 + \lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 6y + z - 2 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 4z + y + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -4z - y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y + z - 4 = 0$$

Como $\lambda = -4z - y$, então:

$$\begin{cases} 2x - 2y + (-4z - y) = -6 \\ -2x + 6y + z + 2(-4z - y) = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 4z = -6 \\ -2x + 4y - 7z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 11z = -4 \\ 8y - 5z = 10 \end{cases}$$

$$z = \frac{42}{83} \quad y = 11z - 4 = \frac{130}{83} \quad x = -2y - z + 4 = \frac{30}{83}$$

Sob a condição $x + 2y + z = 4$, o ponto $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{30}{83}, \frac{130}{83}, \frac{42}{83})$ minimiza a função:

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2z^2 + yz + 6x - 2y$$

6.7. EQUAÇÃO DE MITSCHERLICH PARA ESTIMAR O CRESCIMENTO DE UMA FLORESTA.

Nas ciências biológicas, na maioria dos casos, é mais recomendável usar equações não lineares para a modelagem de estudos de crescimento de espécies. Neste caso, são referências: Draper & Smith (1981), Ratkowsky (1990), Gallant (1987), Hoffmann (2011), Souza (1998), dentre outros.

Prudente (2009) cita alguns modelos mostrados na tabela 6.7.1. Nesses modelos o parâmetro α é o valor máximo esperado ou assíntota da variável resposta. O parâmetro β está relacionado com o intercepto, isto é, o valor correspondente quando $X = 0$ (ocasião). O parâmetro γ está relacionado com a taxa de crescimento da curva e, finalmente, o parâmetro δ apresentado em alguns modelos é utilizado para aumentar a flexibilidade dos mesmos nos ajustes dos dados. Neste livro, para estabelecer o ciclo de corte de uma floresta manejada e considerando as suas características matemáticas, será usada a equação de Mitscherlich. Esta equação pela sua formulação é muito utilizada no estudo da variação de crescimento de vegetais em ensaios de adubação.

Tabela 6.7.1 - Alguns modelos normais não lineares aplicáveis ao estudo dos processos de recomposição de florestas manejadas.

Modelo	Componente sistemático
Gallant	$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \exp(\gamma X_3)$
Von-Bertalanffy	$\alpha \{1 - \exp[-\gamma(X - \beta)]\}$
Mitscherlich	$\alpha [1 - 10^{-\gamma(X+\beta)}]$
Logístico	$\alpha / [1 + \exp(\beta - \gamma X)]$
Gompertz	$\alpha \exp[-\exp(\beta - \gamma X)]$
Richards	$\alpha / \{ [1 + \exp(\beta - \gamma X)]^{\frac{1}{\delta}} \}$
Morgan-Mercer-Flodin	$(\beta\gamma + \alpha X^\delta) / (\gamma + X^\delta)$
Weibull	$\alpha - \beta \exp(-\gamma X^\delta)$

Fonte: Prudente (2009).

Vários tipos de modelos matemáticos podem ser usados para estudar os processos de dinâmica de recomposição de florestas manejadas, mas os modelos sigmoidais possuem propriedades que podem melhor atender aos objetivos da análise de perfis de crescimento da floresta e das espécies ocorrentes. Os parâmetros dos modelos não lineares são muito mais fáceis de serem interpretados biologicamente.

Seja o modelo não linear:

$$Y_j = \alpha + \beta \rho^{X_j} + e_j \quad (6.7.1)$$

Tal que α, β, ρ são os parâmetros e os e_j são os erros aleatórios independentes com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

A equação $f(X) = \alpha + \beta\rho^X$ (6.7.1), quando $\alpha > 0$, $\beta < 0$ e $|\rho| < 1$ é denominada de função de Spillman. Substituindo, na equação 6.7.1, $\alpha = \beta_0$, $\beta = -\beta_0 10^{-\beta_1 \beta_2}$ e $\rho = 10^{-\beta_1}$, resulta:

$$f(X) = \beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(X + \beta_2)}] \quad (6.7.2)$$

A relação 6.7.2 passa a ser denominada de equação de Mitscherlich.

Na equação 6.7.1, como $|\rho| < 1$, tem-se que: $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = \alpha$. Destarte, também na equação 6.7.2, como $\beta_1 > 0$, resulta $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = \beta_0$.

Figura 6.7.1 - Equação de Mitscherlich ($\beta_0 = b_0$ e $\beta_2 = b_2$).

O valor da função se aproxima assintoticamente de β_0 quando a variável independente X se aproxima do infinito. Analisando o gráfico da figura 6.7.1, dentro do contexto do crescimento de uma floresta manejada, sendo X = unidades de tempo, o parâmetro β_0 representado por (b_0) , corresponderia à produção máxima alcançada considerando um período de tempo muito longo. O parâmetro β_2 , representado por (b_2) , representaria a quantidade de madeira remanescente logo após a exploração florestal, pois se $f(X) = 0$, então, resulta $X = -\beta_2$. Em um experimento de adubação o parâmetro β_1 é denominado de coeficiente de eficácia e está relacionado com a intensidade do efeito do nutriente no desenvolvimento da planta.

No caso de manejo florestal, o coeficiente (β_1) poderia ser expresso como uma característica de eficácia da floresta em termos de crescimento, ou mesmo no caso de espécies, poderia ser dito que esse valor seria o coeficiente de eficácia específico da espécie, ou seja, no manejo de uma floresta natural cada espécie teria o seu respectivo

coeficiente de eficácia. Este coeficiente refletiria uma medida do grau de aceleração do crescimento.

Hoffmann (2011) cita algumas características matemáticas da função $f(X) = \alpha + \beta\rho^X$ que também são válidas para a de Mitscherlich.

$$\frac{df(X)}{dX} = \beta\rho^X (\ln\rho)$$

Como $f(X) - \alpha = \beta\rho^X$:

$$\frac{df(X)}{dX} = [f(X) - \alpha](\ln\rho)$$

$$\frac{df(X)}{dX} = (-\ln\rho)[\alpha - f(X)]$$

Como $|\rho| < 1$, tem-se $(-\ln\rho) > 0$.

A expressão $(-\ln\rho)[\alpha - f(X)]$ mostra que à medida que X cresce, a declividade da curva decresce por que o valor de $f(X)$ se aproxima de α . O valor $[\alpha - f(X)]$, denominado de “fator de contenção”, diminui com o aumento de X (ocasião).

Hoffmann (2011) também mostra que, se for dado acréscimos constantes à variável X , na equação $f(X) = \alpha + \beta\rho^X$, os valores das sucessivas variações no valor da função apresentam modificações percentuais constantes:

$$\begin{aligned} f(X_0) &= \alpha + \beta\rho^{X_0} \\ f(X_0 + \Delta X) &= \alpha + \beta\rho^{X_0 + \Delta X} \\ f(X_0 + 2\Delta X) &= \alpha + \beta\rho^{X_0 + 2\Delta X} \end{aligned}$$

Resultando:

$$\begin{aligned} f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) &= \beta\rho^{X_0 + \Delta X} - \beta\rho^{X_0} = \beta\rho^{X_0}(\rho^{\Delta X} - 1) \\ f(X_0 + 2\Delta X) - f(X_0 + \Delta X) &= \beta\rho^{X_0 + 2\Delta X} - \beta\rho^{X_0 + \Delta X} = \beta\rho^{X_0 + \Delta X}(\rho^{\Delta X} - 1) \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\frac{f(X_0 + 2\Delta X) - f(X_0 + \Delta X)}{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)} = \frac{\beta\rho^{X_0 + \Delta X}(\rho^{\Delta X} - 1)}{\beta\rho^{X_0}(\rho^{\Delta X} - 1)} = \rho^{\Delta X}$$

Demonstrando que, dado um acréscimo ΔX em X , a relação de mudanças sucessivas em $f(X)$ é constante.

Sejam, por exemplo, X_1, X_2, X_3 três valores equiespaçados de X , ou seja, $X_3 - X_2 = X_2 - X_1 = \Delta X$, e sejam Y_1, Y_2, Y_3 os correspondentes valores de Y . Os valores Y_1, Y_2, Y_3 podem fazer parte da amostra ou não, pois, alternativamente, pode-se obtê-los traçando uma curva e ler no gráfico as coordenadas dos três pontos escolhidos.

De acordo com:

$$\frac{f(X_0 + 2\Delta X) - f(X_0 + \Delta X)}{f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)} = \rho^{\Delta X}$$

Pode-se ter uma estimativa preliminar de ρ :

$$\hat{\rho} = \left(\frac{Y_3 - Y_2}{Y_2 - Y_1} \right)^{\frac{1}{\Delta X}}$$

6.8. CICLO DE CORTE ECONOMICAMENTE ACONSELHÁVEL COM A EQUAÇÃO DE MITSCHERLICH.

Para estimar o ciclo ótimo de corte de uma floresta manejada será usada a equação de Mitscherlich (6.7.2). Esta função é sempre crescente, pois sua derivada dada pela fórmula 6.8.1 é sempre positiva, denotando que não tem máximo. No caso florestal, significaria que a produção será sempre crescente no decorrer do tempo.

$$V' = L n 10 \times \beta_0 \beta_1 [10^{-\beta_1(t+\beta_2)}] \quad (6.8.1)$$

Por outro lado, do ponto de vista do manejo florestal, muitas vezes, não é suficiente apenas calcular o máximo de uma função, mas, também levar em consideração o fator econômico. Desta maneira, é importante obter a produção que maximiza a renda líquida.

Gomes & Nogueira (1980) mostram, usando a função de Mitscherlich, a equação para a obtenção da dose economicamente aconselhável de fertilizantes em experimentos de adubação.

Considerando W o preço da madeira (m^3/ha) e V o volume madeira, por hectare, estimado pela função de crescimento, a partir da equação de Mitscherlich, então WV representará a receita bruta. Considerando as despesas, compostas de uma parte fixa (DF) e outras referentes às despesas na execução do plano de manejo, denominada de Custo do Manejo (CM) no tempo t (ocasiões/ano), a fórmula da receita líquida será dada pela função Z .

$$Z = WV - DF - CM \times t$$

Tomando a primeira derivada da função Z em relação a variável tempo (t), tem-se:

$$Z' = \frac{dZ}{dt} = WV' - CM$$

Seja, $y' = ck^u \times Lnk \times u'$, a derivada da função $y = ck^u$, tal que $u = f(t)$.

Dado que $V = \beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}] = \beta_0 - \beta_0 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}$

$$\frac{dV}{dt} = V' = 0 - \beta_0 10^{-\beta_1(t+\beta_2)} \times Ln10 \times -\beta_1$$

$$V' = Ln10 \times \beta_0 \beta_1 [10^{-\beta_1(t+\beta_2)}]$$

Então:

$$Z' = 2,302585W[\beta_0 \beta_1 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}] - CM$$

Anulando a primeira derivada $Z' = 0$, então:

$$Z' = 2,302585W[\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 10^{-\hat{\beta}_1(t_{oti}+\hat{\beta}_2)}] - CM = 0$$

Sendo t_{oti} definido como tempo ótimo para o corte da floresta, ou seja, tempo economicamente aconselhável. Logo:

$$2,302585W\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 10^{-\hat{\beta}_1(t_{oti}+\hat{\beta}_2)} = CM$$

$$10^{-\hat{\beta}_1(t_{oti}+\hat{\beta}_2)} = \frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}$$

Tomando o logaritmo na base dez de ambos os membros, têm-se:

$$-\hat{\beta}_1(t_{oti} + \hat{\beta}_2) = \log_{10}\left(\frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)$$

$$-\hat{\beta}_1 t_{oti} - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 = \log_{10}\left(\frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)$$

$$-\hat{\beta}_1 t_{oti} = \log_{10}\left(\frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_1 t_{oti} = -\log_{10}\left(\frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$t_{oti} = -\frac{1}{\hat{\beta}_1} [\log_{10}\left(\frac{CM}{2,302585 \times W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)] - \hat{\beta}_2$$

Definindo R como uma razão de custo entre a receita obtida pela venda da madeira (W) e o custo do manejo florestal por hectare (CM), tem-se:

$$R = \frac{W}{CM} \rightarrow t_{oti} = -\frac{1}{\hat{\beta}_1} [\log_{10}\left(\frac{1}{2,302585 \times R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)] - \hat{\beta}_2$$

Dada a seguinte propriedade dos logaritmos: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, tem-se:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2,302585 \times R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) = \log_{10} 1 - \log(2,302585 \times R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1)$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2,302585 \times R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) = -\log(2,302585 \times R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1)$$

Resultando a equação 6.8.2 para estimar, utilizando a equação de Mitscherlich, o ciclo de corte economicamente aconselhável de uma floresta manejada em função da razão de custo R .

$$t_{oti} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \log_{10}(2,302585 R \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1) - \hat{\beta}_2 \quad (6.8.2)$$

Exercício 6.8.1. Seja uma área de floresta natural onde foram aplicadas técnicas de manejo. O monitoramento do crescimento foi realizado por meio de inventário florestal contínuo com 30 parcelas permanentes. As medições foram realizadas em cinco ocasiões equidistantes de cinco anos, ou seja, 0 ano, 5 anos, 10 anos, 15 anos e 20 anos. O ano zero (0) corresponde à data logo após a exploração florestal. Obter o ciclo de corte economicamente aconselhável (t_{oti}) e a corresponde produção de madeira (V_{oti}), considerando uma razão de custo $R=3$. A equação de crescimento obtida foi a seguinte:

$$V_{oti} = 145,85[1 - 10^{-0,07475(t+6,377)}]$$

$$t_{oti} = \left(\frac{1}{0,07475}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 145,85 \times 0,07475) - 6,377 = 18,7 \text{ anos}$$

$$V_{oti} = 145,85[1 - 10^{-0,07475(18,7+6,377)}] = 143,90 m^3 / ha$$

O ciclo de corte economicamente aconselhável, para uma razão de custo igual $R = 3$, é de 18,7 anos, correspondendo a uma produção de 143,9 m³/ha.

6.9. CICLO DE CORTE ECONOMICAMENTE ACONSELHÁVEL PELA EQUAÇÃO DE VON-BERTALANFFY

No caso do uso da equação de Von-Bertalanffy, têm-se:

$$V = \beta_0[1 - e^{-\beta_1(t-\beta_2)}] \rightarrow V = \beta_0 - \beta_0 e^{-\beta_1(t-\beta_2)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\beta_0 e^{-\beta_1(t-\beta_2)} \times -\beta_1$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta_0 \beta_1 e^{-\beta_1(t-\beta_2)}$$

$$Z' = \frac{dZ}{dt} = WV' - CM$$

$$Z' = W[\beta_0 \beta_1 e^{-\beta_1(t-\beta_2)}] - CM$$

Anulando a primeira derivada $Z' = 0$, então:

$$W\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 e^{-\hat{\beta}_1(t_{oi}-\hat{\beta}_2)} = CM$$

$$e^{-\hat{\beta}_1(t_{oi}-\hat{\beta}_2)} = \frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}$$

Tomando o logaritmo neperiano de ambos os membros:

$$-\hat{\beta}_1(t_{oi} - \hat{\beta}_2) = \ln\left(\frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)$$

$$-\hat{\beta}_1 t_{oi} + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 = \ln\left(\frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right)$$

$$-\hat{\beta}_1 t_{oi} = \ln\left(\frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_1 t_{oi} = -\ln\left(\frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$$

$$t_{oi} = -\frac{1}{\hat{\beta}_1} \ln\left(\frac{CM}{W \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) + \hat{\beta}_2$$

Definindo R como uma razão de custo entre a receita obtida pela venda da madeira (W) e o custo do manejo florestal por hectare (CM), resulta a equação 6.9.1 para estimar, utilizando a equação de Von-Bertalanffy, o ciclo de corte economicamente aconselhável de uma floresta manejada em função da razão de custo R .

$$R = \frac{W}{CM} \rightarrow t_{oi} = -\frac{1}{\hat{\beta}_1} \ln\left(\frac{1}{R \times \hat{\beta}_0 \times \hat{\beta}_1}\right) + \hat{\beta}_2$$

$$t_{oi} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \ln R \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \quad (6.9.1)$$

No capítulo 7, seção 7.2.1, item f, está apresentado um exemplo de aplicação, usando a equação de Von-Bertalanffy, para obter o ciclo de corte economicamente aconselhável de uma floresta manejada.

Capítulo 7

Análise de inventários florestais contínuos

Este capítulo apresenta a análise multivariada de inventários florestais contínuos (IFC) com parcelas permanentes, expondo exemplos de aplicação, considerando os perfis de crescimento com relação a cinco ocasiões de quatro métodos de manejo florestal. Comenta sobre o uso da análise univariada em inventários florestais com parcelas permanentes pelo método de análise de parcelas subdivididas. Na análise multivariada ou análise de perfil do IFC são apresentados os seguintes tópicos: análise de inventários florestais com parcelas permanentes com apenas um tratamento; análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando dois tratamentos; análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando mais de dois tratamentos. No exemplo de aplicação, considerando os quatro métodos de manejo, os seguintes assuntos são abordados: teste de esfericidade de matriz de covariância pelo critério de Mauchly; cálculo dos valores das correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ϵ_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ϵ_{hf}); teste de homogeneidade de matrizes de covariâncias; teste de multinormalidade de assimetria e de curtose de Mardia; teste de normalidade multivariada de Henze-Zirkler; análise de agrupamento pelo método de Ward; teste de paralelismo e de coincidência de perfil de crescimento segundo a hipótese linear geral $H: C\beta U = \phi$; teste de coincidência de perfil de crescimento pelo teste “ t ” de Student; determinação do ciclo de corte economicamente aconselhável com o uso de regressão não linear de Mitscherlich; análise de resíduos; teste de validade de regressão de Graybill; teste da razão da máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e identidade de modelos de regressão não linear.

7. INTRODUÇÃO

Serão discutidos dois métodos para testar as hipóteses sobre o efeito dos tratamentos e a correspondente tendência de crescimento ao longo do tempo. O primeiro é o procedimento univariado, que trata as observações medidas no tempo como se fossem originadas de subdivisões das unidades experimentais (*split-plot*), analisado conforme o delineamento em parcelas subdivididas. O segundo método, denominado de análise de perfil "*profile analysis*", que adota um procedimento multivariado, ou seja, considera as observações repetidas sobre cada unidade experimental como um vetor de respostas.

Descreve-se o método de Wilks para testar se a matriz de covariância entre as ocasiões é uniforme e o critério de Mauchly (1940) para verificar a ocorrência de esfericidade, assim como as correções de Geisser & Greenhouse (1958) e de Huynh & Heldt (1976) para corrigir os graus de liberdade do teste F , para a igualdade de efeitos de ocasiões e de ocorrência de paralelismo de perfis de crescimento, caso haja a opção pela escolha da análise univariada do delineamento em parcelas divididas.

Apresenta-se, também, o procedimento de análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando apenas um, dois ou vários tratamentos. Em um exemplo aplicativo, analisa-se o problema da multinormalidade dos dados, homogeneidade de matrizes de covariâncias, paralelismo e coincidência de perfis de crescimento, assim como, trata-se do ajuste pela função de Mitscherlich de curvas de crescimento, possibilitando a obtenção do ciclo de corte economicamente aconselhável.

Os programas desenvolvidos na linguagem do Sistema de Análise Estatística (SAS) para as análises realizadas estão apresentados no apêndice C.

O inventário florestal contínuo com parcelas permanentes enquadra-se, no contexto da análise estatística, no grupo dos denominados experimentos com medidas repetidas (EMR). Os EMR constituem um problema de população multivariada, em que as variáveis aleatórias, como por exemplo, o volume de madeira em p -ocasiões, que possui uma distribuição de probabilidade com vetor de médias $\mu' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]$ e matriz de covariâncias Σ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

O procedimento adotado é selecionar e medir as parcelas na primeira ocasião, tornando as unidades de amostra permanentes, sendo remedidas nas ocasiões seguintes. Neste procedimento ocorrerão correlações entre as medições nas diversas ocasiões, significando, em termos da ciência florestal, importante mecanismo para a interpretação do comportamento dos parâmetros envolvidos na dinâmica da floresta.

A aplicação da análise univariada pelo método de parcelas subdivididas, em experimentos de medidas repetidas no tempo, somente é válida sob a pressuposição de uniformidade da matriz de covariância. A matriz uniforme ocorre quando as ocasiões

apresentarem homogeneidade de variâncias e forem igualmente correlacionadas (ρ), ou seja:

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Onde σ^2 é a variância comum entre as unidades dentro das ocasiões e ρ é a correlação comum entre as ocasiões combinadas aos pares. Por outro lado, no caso de não ser atendida essa pressuposição e o pesquisador tiver o interesse em analisar pela modelagem univariada do delineamento em parcelas divididas, a correção ε_{gg} de Geisser & Greenhouse (1958) ou a correção ε_{hf} de Huynh & Heldt (1976) podem ser usadas para corrigir os graus de liberdade do teste F , para a igualdade de efeitos de ocasiões e de ocorrência de paralelismo de perfis de crescimento.

7.1. ANÁLISE UNIVARIADA DE INVENTÁRIOS FLORESTAIS COM PARCELAS PERMANENTES PELO MÉTODO DE PARCELAS SUBDIVIDIDAS

Seja um experimento com o delineamento inteiramente ao acaso, em que g métodos de manejo são aplicados em N unidades experimentais, de modo que n_i seja o número de parcelas submetidas ao i -ésimo tratamento ($i = 1, 2, \dots, g$) e as observações sejam feitas, periodicamente, em p ocasiões distintas ($k = 1, 2, \dots, p$), onde $N = n_1 + n_2 + \dots + n_g$ é o número total de parcelas permanentes.

Seja o modelo misto univariado 7.1.1 representando cada uma das observações y_{ijk} , onde os tratamentos e as ocasiões são dois fatores fixos completamente cruzados.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \delta_{j(i)} + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + e_{ijk} \quad (7.1.1)$$

y_{ijk} : é a medida efetuada na j -ésima unidade de amostra de tamanho n_i ($j = 1, 2, \dots, n_i$), submetida ao i -ésimo tratamento e correspondente a k -ésima ocasião ($k = 1, 2, \dots, p$);

μ : média geral populacional;

τ_i : é o efeito do i -ésimo tratamento;

$\delta_{j(i)}$: é o efeito aleatório da j -ésima unidade experimental dentro do i -ésimo tratamento, supostos homocedásticos, independentes e normalmente distribuídos;

γ_k : efeito da k -ésima ocasião;

$(\tau\gamma)_{ik}$: é o efeito da interação entre o i -ésimo tratamento e a k -ésima ocasião;

e_{ijk} : é o erro aleatório associado às observações da k -ésima ocasião do i -ésimo tratamento da j -ésima parcela experimental, supostos homocedásticos, independentes e normalmente distribuídos.

Denota-se que os tratamentos são aplicados sobre cada unidade experimental, enquanto que as ocasiões são consideradas como subdivisões dessas unidades. Neste caso, os efeitos principais de tratamentos são calculados sobre os totais de unidades, enquanto que, os efeitos da interação tratamento×ocasião são calculados a partir das diferenças entre observações dentro das unidades. As somas de quadrados, pressupondo normalidade dos erros, apresentam distribuição χ^2 e são mutuamente independentes.

A Tabela 7.1.1 apresenta a análise de variância usual para experimentos inteiramente ao acaso para tratamentos em parcelas subdivididas, considerando o mesmo número de repetições por ocasião dentro de cada tratamento. A presença ou ausência de interação entre os tratamentos e as ocasiões definirá o procedimento adequado para estabelecer os testes de comparações múltiplas. O procedimento de ajustamento de curvas depende da ausência ou presença de interação tratamento×ocasião. No caso de a interação ser significativa, implica que os tratamentos se comportam de forma diferente em relação às ocasiões. Porém, se não existir interação significa que os tratamentos, no tempo, apresentam a mesma tendência de crescimento (perfis paralelos).

Seja uma área florestal submetida a g tratamentos (intensidades de manejo), onde foi realizado um inventário florestal contínuo, com uma amostragem simples ao acaso, considerando p ocasiões equidistantes. Seja n o mesmo número de parcelas em cada tratamento, então $N = ng$ é o total de parcelas permanentes medidas em p ocasiões e Np é o total de observações realizadas.

Tabela 7.1.1 - Delineamento inteiramente ao acaso de parcelas subdivididas (p -ocasiões).

C. V.	G. L.	SQ	F
Trat.	$g - 1$	SQ_1	$F_1 = \frac{N - g}{g - 1} \frac{SQ_1}{SQ_2}$
Erro (a)	$N - g$	SQ_2	
Ocasões	$p - 1$	SQ_3	$F_2 = (N - g) \frac{SQ_3}{SQ_5}$
Trat×Ocasião	$(g - 1)(p - 1)$	SQ_4	$F_3 = \frac{g - 1}{N - g} \frac{SQ_4}{SQ_5}$
Erro (b)	$(N - g)(p - 1)$	SQ_5	
Total	$Np - 1$	SQ_6	

$$SQ_1 = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^g y_{i..}^2 - C \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{Np} \left(\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p y_{ijk} \right)^2 = \frac{y_{...}^2}{Np}$$

$$SQ_2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n y_{ij.}^2 - \frac{1}{np} \sum_{i=1}^g y_{i..}^2 \quad SQ_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - C$$

$$SQ_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^p y_{i.k}^2 - C - SQ_1 - SQ_3 \quad SQ_6 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p y_{ijk}^2 - C$$

$$SQ_5 = SQ_6 - SQ_1 - SQ_2 - SQ_3 - SQ_4$$

Normalmente, em experimentos com parcelas divididas, o interesse é testar as seguintes hipóteses:

a) H_{01} : Não existência de efeito diferencial de tratamentos:

$$H_{01} : \tau_i = 0, \text{ versus, } H_1 : \text{Não } H_{01} \quad (i = 1, \dots, g)$$

$$F_1 = \frac{QM_1}{QM_2}$$

b) H_{02} : Não existência de efeito diferencial de ocasiões:

$$H_{01} : \gamma_k = 0, \text{ versus, } H_2 : \text{Não } H_{02} \quad (k = 1, \dots, p)$$

$$F_2 = \frac{QM_3}{QM_5}$$

c) H_{03} : Não existência de efeito de interação entre tratamentos e ocasiões:

$$H_{03} : \tau\gamma_{11} = \tau\gamma_{12} = \dots = \tau\gamma_{gp}, \text{ versus, } H_3 : \text{Não } H_{03} \quad [(i = 1, \dots, g), (k = 1, \dots, p)]$$

$$F_3 = \frac{QM_4}{QM_5}$$

Se H_{03} denota que o efeito da interação é não significativo, resulta que todos os tratamentos apresentam a mesma tendência ou perfil de crescimento. No entanto, se o efeito da interação é significativo, verifica-se que pelo menos um tratamento apresenta uma tendência de crescimento diferente (não paralela).

7.2. INVENTÁRIOS FLORESTAIS COM PARCELAS PERMANENTES COM UM TRATAMENTO

Considerando a aplicação de um método de manejo medindo, em p ocasiões, o volume em n parcelas permanentes. Seja o modelo matemático $y_{kj} = \mu + \tau_k + e_{kj}$ inerente a esse levantamento, tal que $k = 1, \dots, p$ caracterizando as ocasiões e $j = 1, \dots, n$ especificando a parcela, então $\mu_k = \mu + \tau_k$ mede o efeito inerente a k -ésima ocasião e e_{kj} é o erro aleatório correspondente a k -ésima ocasião da j -ésima unidade amostral.

Dado que as n unidades amostrais são independentes entre si, onde o vetor dos erros aleatórios das repetições possui distribuição normal multivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariância Σ , resultando, então, que o vetor y_{vj} de ordem $p \times 1$ das observações da j -ésima unidade amostral, com vetor de médias $\mu'_v = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_p]$ e matriz de covariâncias também Σ , também apresenta distribuição normal multivariada.

A formulação da hipótese, considerando o exposto, para testar a ausência do efeito de tempo é $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$, ou mais explicitamente na forma:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ \dots \\ \mu_{(p-1)} - \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Existem outras maneiras de explicitar a hipótese H_0 , como por exemplo, considerar os contrastes em relação à primeira ou em relação à última ocasião, ou ainda, construir em relação a uma ocasião particular.

Seja $\bar{y}'_v = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_p]$ o vetor de médias amostrais por ocasião e o vetor das $p-1$ diferenças, $(\bar{y}_v^*)' = [\bar{y}_1 - \bar{y}_2, \bar{y}_2 - \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_{(p-1)} - \bar{y}_p]$, entre as ocasiões consecutivas. Então, a estatística multivariada para testar a hipótese da nulidade de efeito de ocasião é a seguinte:

$$T^2 = n(\bar{y}_v^*)'(S^*)^{-1}\bar{y}_v^*$$

Onde S^* é a matriz de covariância das diferenças consecutivas. A estatística T^2 pode ser transformada na estatística F de Snedecor, pela seguinte relação:

$$F = \frac{n-p+1}{(n-1)(p-1)} T^2 \text{ que sob } H_0 \text{ possui } (p-1) \text{ e } (n-p-1) \text{ graus de liberdade.}$$

A estatística $T^2 = n(\bar{y}_v^*)'(S^*)^{-1}\bar{y}_v^*$ pode ser escrita na forma $T^2 = n\bar{y}_v' C' (CSC')^{-1} C \bar{y}_v$, a qual não requer a construção do vetor de médias das diferenças ($\bar{y}_v^*$) e a sua respectiva matriz de covariância (S^*), tal que a matriz C caracteriza os contrastes. No caso de os contrastes serem entre ocasiões consecutivas, tem-se:

$$C_{(p-1)p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A estatística T^2 apresenta o mesmo resultado qualquer que seja a forma de organizar os $(p-1)$ contrastes. Essa unicidade do teste é consequência da invariância de T^2 . Sejam as formas da matriz C , considerando as comparações, respectivamente, em relação à primeira e à última ocasião.

$$C_{(p-1)p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C_{(p-1)p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

No próximo passo após a comprovação da rejeição de H_0 , ou seja, existe crescimento da floresta em relação ao tempo, pode-se estimar a curva de crescimento e a partir da equação obtida, então, calcular a idade economicamente ideal para a colheita da madeira.

7.2.1. ANÁLISE DE UM INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO COM UM MÉTODO DE MANEJO

Seja uma área florestal de 1000 ha onde se aplicou um método de manejo M1. O monitoramento do crescimento foi realizado por um inventário florestal contínuo com 30 parcelas permanentes. As medições foram realizadas em cinco ocasiões equidistantes de cinco anos, ou seja, 0 ano, 5 anos, 10 anos, 15 anos e 20 anos. O ano zero (0) corresponde à data logo após a exploração florestal. Os dados V (volume por ha) foram simulados e estão apresentados na Tabela B1 do apêndice B. O programa construído usando a linguagem SAS, para a análise de inventários florestais com parcelas permanentes para um tratamento, está apresentado na tabela C5 do apêndice C.

a) Gráfico com o perfil de crescimento do método de manejo M1

Figura 7.2.1.1 - Gráfico do perfil de crescimento para (M1).

b) Vetor de médias e matriz de covariância para o método de manejo M1

$$\bar{y}'_{v1} = [96,65589 \quad 118,86703 \quad 135,42923 \quad 136,51993 \quad 137,96803]$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1,84061681 & 1,76852089 & 1,88189246 & 2,01479114 & 2,04154190 \\ 1,76852089 & 3,46728879 & 3,78614806 & 4,05873545 & 4,04560596 \\ 1,88189246 & 3,78614806 & 4,57316908 & 4,85074615 & 4,85566809 \\ 2,01479114 & 4,05873545 & 4,85074615 & 5,47236765 & 5,51975907 \\ 2,04154190 & 4,04560596 & 4,85566809 & 5,51975907 & 5,96583927 \end{bmatrix}$$

c) Formulação da hipótese para testar a ausência do efeito de ocasião

$$H_0 : \mu_0 = \mu_5 = \mu_{10} = \mu_{15} = \mu_{20} \rightarrow H_0 : \begin{bmatrix} \mu_0 - \mu_5 \\ \mu_5 - \mu_{10} \\ \mu_{10} - \mu_{15} \\ \mu_{15} - \mu_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Aplicação da estatística T^2 de Hotelling e da estatística F

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow CS_1C' = \begin{bmatrix} 1,7708638 & 0,2054877 & 0,1396887 & -0,0398800 \\ 0,2054877 & 0,4681618 & 0,0049897 & 0,0180514 \\ 0,1396887 & 0,0049897 & 0,3440444 & 0,0424695 \\ -0,0398800 & 0,0180514 & 0,0424695 & 0,3986888 \end{bmatrix}$$

$$(CS_1C')^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6191751 & -0,2729320 & -0,2600290 & 0,1019917 \\ -0,2729320 & 2,2601849 & 0,0952918 & -0,1397860 \\ -0,2600290 & 0,0952918 & 3,0547070 & -0,3557210 \\ 0,1019917 & -0,1397860 & -0,3557210 & 2,5626457 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = n\bar{y}'_{v1}C'(CS_1C')^{-1}C\bar{y}_{v1} = 21.696,694 \quad F = \frac{n-p+1}{(n-1)(p-1)}T^2 = 4863,0521$$

Que sob H_0 possui $p - 1 = 4$ e $n - p + 1 = 26$ graus de liberdade.

Dado que $F_{4;26;0,05} \cong 2,75$, conclui-se que o crescimento foi significativo. Então, haja vista a rejeição de H_0 , pode-se ajustar um modelo de crescimento para obter o ciclo de corte economicamente aconselhável.

e) Ciclo de corte economicamente aconselhável pela equação de Mitscherlich

Seja a equação de Mitscherlich $V = \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}]$. As estimativas dos parâmetros estão inseridas na tabela 7.2.1.1 e foram obtidas, pelo método de Gauss-Newton, a partir do desenvolvimento do programa SAS, citado na tabela C12 do apêndice C.

$$V_{M1} = 140,6[1 - 10^{-0,0717(t+6,9767)}] \quad (0 \leq t \leq 20 \text{ anos})$$

Dado que: $t_{oti} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \log_{10}[2,302585R\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1] - \hat{\beta}_2$, considerando ($R=3$) a razão entre a receita obtida pela venda da madeira (w) e o custo do manejo florestal por hectare (CM), têm-se:

$$t_{oti(M1)} = \left(\frac{1}{0,0717}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 140,6 \times 0,0717) - 6,9767 = 18,7 \text{ anos}$$

$$V_{oti(M1)} = 140,6[1 - 10^{-0,0717(18,7+6,9767)}] = 138,57 \text{ m}^3 / \text{ha}$$

$$RQMR = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (Y_j - \hat{Y}_j)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1150,6}{30 \times 5}} = 2,7696 \quad (N = n \times p = 150)$$

$$CV = \frac{RQMR}{\bar{Y}} \times 100 = \frac{2,7696}{125,09} \times 100 = 2,21\%$$

Tabela 7.2.1.1 – Análise de regressão da equação de Mitscherlich para M1.

Parâmetros	Estimativas	Error Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	140,6	0,6164	139,4	141,9
$\hat{\beta}_1$	0,0717	0,00321	0,0654	0,0781
$\hat{\beta}_2$	6,9767	0,2971	6,3896	7,5638
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor de F
Erro	147	1150,6	7,8275	2362,55
Teste de validade de Graybill (F_G)				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor de F_G	Pr > F
Numerador	2	17,35852	2,30	0,1036
Denominador	148	7,54007		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 150, Prob > r Sob H0: Rho = 0				
$r_{M1} = 0,9848 (< 0,0001)$			$r^2_{M1} = 0,9698$	

Os indicadores utilizados para avaliar o ajustamento do modelo de Mitscherlich para M1, $CV\%$, r^2 , F_G e a distribuição dos resíduos, dentro do contexto esperado, apresentaram resultados satisfatórios. É recomendável, haja vista o resultado da análise do ciclo de corte economicamente aconselhável, usando a equação de Mitscherlich, efetuar a colheita da madeira quando o povoamento florestal atingir 18,7 anos (138,57 m³/ha).

Figura 7.2.1.2 - Gráfico dos resíduos para M1.

f) Ciclo de corte economicamente aconselhável usando a equação de Von-Bertalanffy

A tabela 7.2.1.2 mostra a análise de regressão da equação de Von-Bertalanffy para o método de manejo M1.

$$V = \beta_0[1 - e^{-\beta_1(t-\beta_2)}] \rightarrow V_{M1} = 140,6[1 - e^{-0,1651(t+6,9767)}]$$

$$t_{oti} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \ln R \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = \frac{1}{0,1651} \ln(3 \times 140,6 \times 0,1651) - 6,9767 = 18,7$$

Os resultados da rotação economicamente aconselhável, para as equações de Mitscherlich e de Von-Bertalanffy, foram os mesmos.

Tabela 7.2.1.2 - Análise de regressão da equação de Von-Bertalanffy para M1.

Parâmetros	Estimativas	Error Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	140,6	0,6164	139,4	141,9
$\hat{\beta}_1$	0,1651	0,00739	0,1505	0,1797
$\hat{\beta}_2$	-6,9767	0,2971	-7,5638	-6,3896
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor de F
Erro	147	1150,6	7,8275	2362,55
Teste de validade Graybill (F_G)				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor de F_G	Pr > F
Numerador	2	17,35852	2,30	0,1036
Denominador	148	7,54007		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 150, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{M1} = 0,9795 (< 0,0001)$		$r^2_{M1} = 0,9594$		

7.3. INVENTÁRIOS FLORESTAIS COM PARCELAS PERMANENTES COM DOIS TRATAMENTOS

Seja um inventário florestal contínuo com parcelas permanentes com dois tratamentos. As seguintes hipóteses podem ser formuladas:

a) **Hipótese H_{01} :** os dois perfis médios populacionais dos tratamentos apresentam comportamentos similares (paralelismo)?

Testar a hipótese H_{01} para verificar a existência de interação (tratamento $\times$ ocasião). A ausência dessa interação implica em um paralelismo estatístico entre os perfis.

b) **Hipótese H_{02} :** aceito o paralelismo entre os dois perfis populacionais, perguntar-se-ia? São os mesmos coincidentes?

A comprovação da hipótese H_{02} de coincidência dos dois perfis é verificada, para as p ocasiões, testando a existência de igualdade dos efeitos dos dois tratamentos. Aceito o paralelismo dos perfis, para obter a função de crescimento dos dois tratamentos, utiliza-se o mesmo modelo matemático de regressão. No caso de coincidência dos perfis obtém-se uma única equação para expressar a função de crescimento.

No caso da interação entre os dois tratamentos ser significativa, depreende-se que o modelo de regressão para estimar as funções de crescimento pode não ser o mesmo.

c) **Hipótese H_{03} :** os perfis médios das respostas correspondentes aos tratamentos são paralelos ao eixo das abscissas, ou seja, não existe efeito do fator que define as ocasiões?

A verificação da existência de diferença entre as ocasiões considerando os dois grupos, concernente à referida hipótese, significaria testar se a floresta está crescendo.

Seja y_{vi} o vetor das variáveis respostas observadas nas p ocasiões, em cada parcela permanente, apresentando distribuição normal multivariada p -dimensional com vetor de médias $\mu'_{vi} = [\mu_{i1} \ \mu_{i2} \ \cdots \ \mu_{ip}]$, ($i = 1, 2$), e matriz de covariância comum não singular Σ . Então:

A primeira hipótese a ser testada é verificar a ausência de interação tratamento $\times$ ocasião:

H_{01} : não existência de interação tratamento $\times$ ocasião

A hipótese H_{01} pode ser escrita na forma matricial $H_{01} : C\mu_{v1} = C\mu_{v2}$, que corresponde a testar o paralelismo entre os dois perfis de crescimento. A matriz C apresenta a seguinte formatação e a estatística para testar H_{01} é a de Hotelling.

$$H_{01} : \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \\ \mu_{14} - \mu_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \\ \mu_{24} - \mu_{25} \end{bmatrix} \quad C_{(p-1)p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})' C' (CSC')^{-1} C (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) \quad S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Onde $\bar{y}'_{vi} = [\bar{y}_{i1} \quad \bar{y}_{i2} \quad \dots \quad \bar{y}_{ip}]$ é o vetor estimado das médias, considerando n_1 e n_2 , o número de parcelas permanentes para os dois tratamentos e S a matriz de covariância comum. Onde S_i ($i = 1, 2$) são as matrizes de covariâncias dos tratamentos. A estatística T^2 pode transformada na estatística F de Snedecor obedecendo a seguinte relação:

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p}{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)} T^2$$

Que sob H_{01} apresenta $(p - 1)$ e $(n_1 + n_2 - p)$ graus de liberdade.

Caso a hipótese de paralelismo não seja rejeitada, a hipótese H_{02} (coincidência dos dois perfis) deve ser testada. Esta hipótese consiste na aplicação do teste “ t de Student” para dois tratamentos independentes dentro de cada ocasião (p testes). Caso todos forem não significativos implica que os dois perfis são coincidentes.

Então, como visto anteriormente, aceito o paralelismo dos perfis, pode-se obter a equação de crescimento dos tratamentos utilizando o mesmo modelo matemático de regressão, e se houver coincidência dos perfis, então uma única equação deve ser obtida para expressar a curva de crescimento.

No caso da interação entre os dois tratamentos ser significativa, então o modelo de regressão para estimar as funções de crescimento pode não ser o mesmo, entretanto as equações de crescimento serão diferentes se aplicado o mesmo modelo.

7.3.1. ANÁLISE DE UM INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO COM DOIS MÉTODOS DE MANEJO

Seja uma área florestal onde foram aplicados dois métodos de manejo, denominados M1 e M2. O monitoramento do crescimento, em cada método de manejo, foi realizado por um inventário florestal contínuo com 30 parcelas permanentes. As medições foram realizadas em cinco ocasiões equidistantes de cinco anos, ou seja, 0 ano, 5 anos, 10 anos, 15 anos e 20 anos. O ano zero (0) correspondeu à data logo após a exploração florestal. Os dados V (volume por ha) são simulados e estão apresentados na tabela B1 do apêndice B. O programa SAS, para a análise de inventários florestais com parcelas permanentes para dois tratamentos, está apresentado na tabela C6 do apêndice C.

a) Gráfico com os perfis de crescimentos dos métodos M1 e M2

Figura 7.3.1.1 - Gráfico com os perfis de crescimentos para M1 e M2.

b) Vetor de médias e matrizes de covariâncias dos métodos M1 e M2

$$\bar{y}'_{v1} = [96,65589 \quad 118,86703 \quad 135,42923 \quad 136,51993 \quad 137,96803]$$

$$\bar{y}'_{v2} = [97,07460 \quad 120,00173 \quad 137,35973 \quad 139,15100 \quad 140,50200]$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1,84061681 & 1,76852089 & 1,88189246 & 2,01479114 & 2,04154190 \\ 1,76852089 & 3,46728879 & 3,78614806 & 4,05873545 & 4,04560596 \\ 1,88189246 & 3,78614806 & 4,57316908 & 4,85074615 & 4,85566809 \\ 2,01479114 & 4,05873545 & 4,85074615 & 5,47236765 & 5,51975907 \\ 2,04154190 & 4,04560596 & 4,85566809 & 5,51975907 & 5,96583927 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2,17477232 & 2,59689899 & 2,68184199 & 2,71630059 & 2,85198576 \\ 2,59689899 & 5,76460937 & 7,16915586 & 7,72605210 & 7,74732466 \\ 2,68184199 & 7,16915586 & 9,78160489 & 10,7380652 & 11,0652238 \\ 2,71630059 & 7,72605210 & 10,7380652 & 12,3077877 & 12,7868027 \\ 2,85198576 & 7,74732466 & 11,0652238 & 12,7868027 & 13,8031213 \end{bmatrix}$$

c) Teste de hipótese para não existência de interação entre Método de Manejo×Ocasão

H_{01} : não existência de interação método de manejo×ocasião.

$$H_{01} : \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{13} - \mu_{14} \\ \mu_{14} - \mu_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \mu_{23} - \mu_{24} \\ \mu_{24} - \mu_{25} \end{bmatrix}$$

d) Aplicação da estatística T^2 de Hotelling e da estatística F

A hipótese H_{01} pode ser escrita na seguinte na forma matricial $H_{01} : C\mu_{v1} = C\mu_{v2}$, que corresponde a testar o paralelismo entre os dois perfis de crescimento. A matriz C apresenta a seguinte formatação e a estatística para testar H_{01} é a de Hotelling.

$$S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (n_1 = n_2 = 30)$$

$$S = \begin{bmatrix} 2,0076946 & 2,1827099 & 2,2818672 & 2,3655459 & 2,4467638 \\ 2,1827099 & 4,6159491 & 5,4776520 & 5,8923938 & 5,8964653 \\ 2,2818672 & 5,4776520 & 7,1773870 & 7,7944057 & 7,9604459 \\ 2,3655459 & 5,8923938 & 7,7944057 & 8,8900777 & 9,1532809 \\ 2,4467638 & 5,8964653 & 7,9604459 & 9,1532809 & 9,8844803 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} \quad C_{(p-1)p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CSC' = \begin{bmatrix} 2,2582238 & 0,7625456 & 0,3310632 & -0,0771460 \\ 0,7625456 & 0,8380321 & 0,2022769 & 0,1619687 \\ 0,3310632 & 0,2022769 & 0,4786533 & 0,0971629 \\ -0,0771460 & 0,1619687 & 0,0971629 & 0,4679963 \end{bmatrix}$$

$$(CSC')^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7273679 & -0,668400 & -0,3047660 & 0,4145026 \\ -0,668400 & 2,003218 & -0,2308800 & -0,7555410 \\ -0,3047660 & -0,230880 & 2,4967583 & -0,4886980 \\ 0,4145026 & -0,755541 & -0,4886980 & 2,5680434 \end{bmatrix}$$

$$T_{12}^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})' C' (CSC')^{-1} C (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) = 25,378072$$

A estatística de Hotelling T_{12}^2 pode transformada na estatística F de Snedecor que, sob H_{01} , apresenta $(p - 1) = 4$ e $(n_1 + n_2 - p) = 55$ graus de liberdade ($p = 5$ e $n = 30$).

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p}{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)} T^2 = 6,0163532$$

Haja vista o valor de $F_{4;55;0,01} \cong 3,65$, conclui-se que os perfis de crescimento dos métodos de manejo M1 e M2 não são paralelos, ou seja, foi rejeitada a hipótese de não existência de interação método de manejo $\times$ ocasião, então se deve obter a equação e o ciclo de corte ideal, separadamente, para cada método.

Por outro lado, considerando o presente exemplo de aplicação, foi realizada a análise de variância multivariada de perfil, que será abordada na seção 7.4. A tabela 7.3.1.1, considerando os dois métodos M1 e M2, apresenta a verificação da interação entre método de manejo×ocasião. Pode ser verificado, como o esperado, que o resultado foi o mesmo para a estatística F (6,02). Análise realizada pelo programa desenvolvido no SAS, apresentado na tabela C8 do apêndice C, usando o arquivo com os métodos M1 e M2.

Tabela 7.3.1.1 - Teste da interação dos perfis de crescimento para M1 e M2.

Testes multivariados e as estatísticas exatas de F para a hipótese de não existência de efeito da interação Ocasão×Método de Manejo (S=1; M=1; N*= 26,5)					
Testes multivariados	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Prob.
Wilks Lambda	0,69562666	6,02	4	55	0,0004
Pillai Trace	0,30437334	6,02	4	55	0,0004
Hotelling-Lawley Trace	0,43755272	6,02	4	55	0,004
Roy Greatest Root	0,43755272	6,02	4	55	0,0004

e) Ciclo de corte economicamente aconselhável para os métodos M1 e M2

O método M1 é o mesmo considerado no exemplo de aplicação 7.2.1, onde o ciclo de corte economicamente aconselhável foi 18,7 anos.

Dada a equação $V = \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}]$, para obter a duração do ciclo de corte ideal para o método de manejo M2, têm-se as estimativas dos parâmetros, na tabela 7.3.1.2, que foram obtidas pelo programa SAS citado na tabela C12 do apêndice C.

Tabela 7.3.1.2 - Análise de regressão da equação de Mitscherlich para M2.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	143,6	0,8096	142,0	145,2
$\hat{\beta}_1$	0,0692	0,00375	0,0618	0,0767
$\hat{\beta}_2$	7,0005	0,3591	6,2908	7,7103
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor de F
Erro	147	1821,8	12,3934	1649,98
Teste de validade de Graybill (F_G)				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor de F_G	Pr > F
Numerador	2	38,84695	3,30	0,0398
Denominador	148	11,78467		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 150, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{M2} = 0,97844$ (< 0,0001)			$r^2_{M2} = 0,9573$	

$$V_{M2} = 143,6[1 - 10^{-0,0692(t+7,0005)}] \quad (0 \leq t \leq 20 \text{ anos})$$

Dado que $t_{oti} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \log_{10}[2,302585R\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1] - \hat{\beta}_2$ e considerando $R=3$, então:

$$t_{oti(M2)} = \left(\frac{1}{0,0692}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 143,6 \times 0,0692) - 7,0005 = 19,5 \text{ anos}$$

$$V_{oti(M2)} = 143,6[1 - 10^{-0,0692(19,5+7,0005)}] = 141,49 \text{ m}^3 / \text{ha}$$

$$RQMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1821,8}{30 \times 5}} = 3,4850$$

$$CV = \frac{RQMR}{\bar{Y}} \times 100 = \frac{3,4850}{126,82} \times 100 = 2,7489\%$$

Figura 7.3.1.2 - Gráfico dos resíduos para o método de manejo M2.

Os indicadores $CV\%$, r^2_{M1} , F_G e a distribuição dos resíduos, para avaliação do ajustamento do modelo de Mitscherlich para o método M2, apresentaram resultados satisfatórios dentro do esperado.

Verifica-se pelos resultados, que a floresta, quando aplicado o método de manejo M1, o ciclo de corte economicamente aconselhável foi de 18,7 anos ($138,57 \text{ m}^3/\text{ha}$), enquanto que, pelo método de manejo M2, a duração do ciclo foi de 19,5 anos ($141,49 \text{ m}^3/\text{ha}$). Portanto, considerando o ciclo de corte, o método de manejo M1 seria o recomendável, entretanto, analisando a produção de madeira, o método de manejo M2 apresenta um acréscimo de produção de $2,92 \text{ m}^3/\text{ha}$ em comparação com M1, concluindo-se, então, que a escolha do método de manejo dependerá do preço da madeira no mercado.

Por outro lado, supondo que os resultados apresentassem paralelismo entre os perfis de M1 e M2, então poderia ser aplicado o teste “ t ” para verificar a existência de coincidência dos mesmos, e em sendo confirmada, uma única equação de crescimento seria ajustada para os dois métodos.

7.4. INVENTÁRIOS FLORESTAIS COM PARCELAS PERMANENTES COM MAIS DE DOIS TRATAMENTOS

Os inventários florestais com parcelas permanentes devem ser analisados pela técnica de análise de perfil. Este procedimento corresponde a um problema multivariado que objetiva analisar dados oriundos de experimentos com medidas repetidas. A análise de perfil tem como característica ser um método alternativo mais geral, haja vista não fazer restrições quanto à estrutura da matriz de covariância.

O objetivo da análise de perfil é estudar a variação dos efeitos dos tratamentos ao longo do tempo, por isso, mais modernamente, este método é denominado de análise de levantamento longitudinal. A análise de perfil, normalmente, visa responder às seguintes questões:

a) **Hipótese H_{01} :** os perfis médios populacionais dos tratamentos apresentam comportamentos similares (paralelismo)?

Testar essa hipótese para verificar a existência de interação entre os tratamentos e as ocasiões. A ausência dessa interação implica em um paralelismo estatístico entre os perfis.

b) **Hipótese H_{02} :** aceito o paralelismo entre os perfis médios populacionais, perguntar-se-ia? São os mesmos coincidentes?

A comprovação da hipótese de coincidência dos perfis, para o conjunto das p ocasiões, é verificada testando a existência de igualdade dos efeitos dos $g \geq 3$ tratamentos.

c) **Hipótese H_{03} :** os perfis médios das respostas correspondentes aos tratamentos são paralelos ao eixo das abscissas, ou seja, não existe efeito do fator que define as ocasiões?

A verificação da existência de diferença entre as ocasiões considerando os $g \geq 3$ grupos, concernente a referida hipótese, significaria testar se a floresta está crescendo.

Seja um experimento florestal consistindo de g métodos de manejo florestal, tal que são medidas n_i parcelas permanentes por tratamento e em p ocasiões. Seja $(y_{ij1}, \dots, y_{ijk}, \dots, y_{ijp})$ o perfil correspondente a j -ésima parcela permanente, do i -ésimo tratamento, da k -ésima ocasião, onde $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, g$ e $k = 1, \dots, p$.

A análise de perfil, ou análise de dados longitudinais, tem por objetivo estudar a variação dos efeitos de tratamentos ao longo do tempo. Seja Y ($N \times p$) a matriz que constitui o conjunto de todas as observações, onde $N = n_1 + n_2 + \dots + n_g$. Os vetores y_{vij} , correspondentes aos perfis das N unidades experimentais permanentes, são

considerados provenientes de amostras de uma distribuição normal multivariada com p -ocasiões, apresentando vetor de médias $\mu_{vi} = [\mu_{i1}, \dots, \mu_{ip}]$ e matriz de covariância comum aos N vetores Σ .

O modelo linear geral multivariado, para o conjunto de dados, tem a forma: $Y = X\beta + \varepsilon$. A matriz Y é a matriz das observações com dimensão $N \times p$, ou seja, p medidas para cada uma das N unidades experimentais. A matriz X é denominada de planejamento com dimensão $N \times g$, sendo construída pelos números 0 e 1 de acordo com delineamento inteiramente ao acaso.

$$\begin{bmatrix} y_{111} & y_{112} & \cdots & y_{11p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n_1 11} & y_{n_1 12} & \cdots & y_{n_1 1p} \\ y_{121} & y_{122} & \cdots & y_{12p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n_2 21} & y_{n_2 22} & \cdots & y_{n_2 2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1g1} & y_{1g2} & \cdots & y_{1gp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n_g g1} & y_{n_g g2} & \cdots & y_{n_g gp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{g1} & \beta_{g2} & \cdots & \beta_{gp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} & \varepsilon_{112} & \cdots & \varepsilon_{11p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_1 11} & \varepsilon_{n_1 12} & \cdots & \varepsilon_{n_1 1p} \\ \varepsilon_{121} & \varepsilon_{122} & \cdots & \varepsilon_{12p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_2 21} & \varepsilon_{n_2 22} & \cdots & \varepsilon_{n_2 2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{1g1} & \varepsilon_{1g2} & \cdots & \varepsilon_{1gp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_g g1} & \varepsilon_{n_g g2} & \cdots & \varepsilon_{n_g gp} \end{bmatrix}$$

A matriz β , de dimensão $g \times p$, é denominada de parâmetros desconhecidos (médias populacionais), correspondentes aos efeitos dos tratamentos envolvidos no experimento. Cada linha representa os valores esperados em cada ocasião.

A matriz ε de dimensão $N \times p$ é composta pelos componentes aleatórios das observações.

Sejam $\hat{\beta}$ e S as estimativas não tendenciosas de quadrados mínimos ou de máxima verossimilhança das matrizes β e Σ do modelo $Y = X\beta + \varepsilon$:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad S = Y'[I - X(X'X)^{-1} X']Y / (N - g)$$

Seja H_{01} a hipótese para verificar a ocorrência de paralelismo entre os perfis. Em termos dos parâmetros do modelo $Y = X\beta + \varepsilon$, ou seja, $E(Y) = X\beta$, pode-se escrever H_{01} da forma:

$$H_{01} : \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{12} - \mu_{13} \\ \vdots \\ \mu_{1(p-1)} - \mu_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \\ \vdots \\ \mu_{2(p-1)} - \mu_{2p} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \mu_{g1} - \mu_{g2} \\ \mu_{g2} - \mu_{g3} \\ \vdots \\ \mu_{g(p-1)} - \mu_{gp} \end{bmatrix}$$

Andrade & Singer (1986) citam que a hipótese H_{01} é fundamental, haja vista que a sua validade pode determinar a forma das hipóteses H_{02} e H_{03} . No caso de não rejeição de H_{01} , ou seja, o paralelismo dos perfis médios de resposta é aceitável, então as hipóteses H_{02} e H_{03} podem ser expressas como:

$$H_{02} : \sum_{k=1}^p \mu_{1k} = \sum_{k=1}^p \mu_{2k} = \dots = \sum_{k=1}^p \mu_{gk} \quad H_{03} : \sum_{i=1}^g \mu_{i1} = \sum_{i=1}^g \mu_{i2} = \dots = \sum_{i=1}^g \mu_{ip}$$

Com efeito, H_{02} : coincidência dos perfis de crescimento equivale à igualdade das respostas médias globais considerando todas as p ocasiões, enquanto H_{03} : os perfis médios das respostas correspondentes aos tratamentos são paralelos ao eixo das abscissas, corresponde à igualdade das respostas médias globais, mas considerando todos os g tratamentos.

As hipóteses H_{02} e H_{03} , independentemente do conhecimento a priori da não rejeição de H_{01} , podem ser escritas das seguintes formas alternativas:

$$H_{02}^* : \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{2p} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mu_{g1} \\ \mu_{g2} \\ \vdots \\ \mu_{gp} \end{bmatrix} \quad H_{03}^* : \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{g1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{g2} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mu_{1p} \\ \mu_{2p} \\ \vdots \\ \mu_{gp} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, objetivando a unificação dos resultados estatísticos, as hipóteses de nulidades podem ser apresentadas na forma da hipótese linear geral, $H : C\beta U = \phi$, tal que C ($c \times g$) e U ($p \times u$) são matrizes de constantes com postos c e u . A matriz C de ordem $c \times g$ é construída para definir os contrastes entre os tratamentos, enquanto a matriz U de ordem $p \times u$ é a matriz responsável pelos contrastes entre ocasiões.

No caso de $H_{01} : C_1\beta U_1 = \phi$, têm-se:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(g-1) \times g} \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{p \times (p-1)}$$

$H_{02} : C_2\beta U_2 = \phi$, tal que $C_2 = C_1$ e $U_2' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ é um vetor unitário p -dimensional;

$H_{03} : C_3\beta U_3 = \phi$, tal que $C_3' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ é um vetor unitário g -dimensional e $U_3 = U_1$;

$H_{02}^* : C_2\beta U_2 = \phi$, tal que $C_2 = C_1$ e $U_2' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ é um vetor unitário p -dimensional;

$H_{03}^* : C_3\beta U_3 = \phi$, tal que $C_3' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ é um vetor unitário g -dimensional e $U_3 = U_1$;

É importante esclarecer que as representações dessas matrizes não são únicas. Por exemplo, as matrizes C_1^* e C_1 são equivalentes na definição de H_{01} , H_{02} ou H_{02}^* .

$$C_1^* = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ (g-1) \times g \end{matrix}$$

As hipóteses expressas pelo modelo linear geral $H: C\beta U = \phi$ podem ser testadas por diversos critérios heurísticos que, geralmente, são estatísticas das raízes características da matriz HE^{-1} , tal que $H = (C\hat{\beta}U)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(C\hat{\beta}U)$ para $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ e $E = U'Y'[I - X(X'X)^{-1}X']YU$, sendo que H de ordem $p \times p$ é a matriz de soma de quadrados e produtos cruzados devido à hipótese nula e E , de ordem $p \times p$, a matriz de soma de quadrados e produtos cruzados devido ao erro.

As estatísticas mais conhecidas para testar $H: C\beta U = \phi$ são as baseadas no princípio da união-intersecção de Roy e da razão de verossimilhança de Wilks. Outras estatísticas muito utilizadas são Lawley-Hotelling e de Pillai.

$$H = U'Y'X(X'X)^{-1}C'(C(X'X)^{-1}C')^{-1}C(X'X)^{-1}X'YU$$

$$E = U'Y'[I - X(X'X)^{-1}X']YU$$

Seja uma combinação linear arbitrária $a_v'y_v$ das p variáveis, sendo $a_v \neq 0_v$ e $a_v \in R^p$. A hipótese H_0 será verdadeira se, e somente se, H_0 for verdadeira para todo $a_v \neq 0$. A aceitação de H_0 é equivalente aceitar todas as hipóteses univariadas possíveis efetuadas variando os elementos que constituem o vetor a_v . Diz-se, então, que a região multivariada de aceitação de H_0 é a intersecção de todas as possíveis regiões de aceitação de todas as hipóteses univariadas.

A análise de variância multivariada para um fator consiste em procurar uma combinação linear das variáveis que melhor discrimine os g grupos (tratamentos). A combinação linear melhor indicada é aquela que produz o maior valor para a estatística univariada F .

De acordo com o princípio da união-intersecção de Roy, tem-se:

$$F_{(a)} = \frac{a_v'Ha_v/(g-1)}{a_v'Ea_v/(N-g)} = \frac{a_v'Ha_v}{a_v'Ea_v} \left(\frac{N-g}{g-1} \right). \text{ Tal que } H \text{ (} p \times p \text{) e } E \text{ (} p \times p \text{)}.$$

Dada restrição para que a_v seja único: $a_v'Ea_v = 1$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resulta: $|E^{-1}H - \lambda I| = 0$ e $F(a_{vk}) = \frac{N-g}{g-1} \lambda_k$. A maior raiz característica λ_k da matriz $E^{-1}H$ ou de HE^{-1} corresponde à solução de máximo.

7.5. TESTES DE HIPÓTESE MULTIVARIADOS E AS APROXIMAÇÕES PARA A DISTRIBUIÇÃO F

H_0 : não existe interação método de manejo $\times$ ocasião: $H_{01} : C_1 \beta U_1 = \phi$.

Seja $\theta_k = \lambda_k / (1 + \lambda_k)$, tal que λ_k corresponde a k -ésima raiz característica de $E^{-1}H$ ou HE^{-1} .

As estatísticas de testes:

a) Critério lambda de Wilks (Λ):

$$\Lambda = \prod_{k=1}^p (1 - \theta_k) = \frac{|E|}{|E + H|}$$

b) Critério de Pillai (V_p):

$$V_p = \sum_{k=1}^p \theta_k = \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} = \text{tr}[H(H + E)^{-1}]$$

c) Critério do traço de Lawley-Hotelling Pillai (T_{LH}):

$$T_{LH} = \text{tr}(E^{-1}H) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{ ou } T_{LH} = \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - \theta_k)^{-1}$$

d) Critério do máximo autovalor de Roy (θ_R):

$$\theta_R = \max(\lambda_k)$$

As fórmulas para obter os valores aproximados das transformações de Λ , V_p , T_{LH} e θ_R , para a estatística F , estão apresentadas no capítulo 4, seção 4.5.

As distribuições exatas dessas estatísticas sob a hipótese nula dependem unicamente dos parâmetros M , N^* e S , e são encontradas em Morrison (1976). Anderson (1958) apresenta as aproximações assintóticas para as distribuições χ^2 e F .

$$M = \frac{(|u - c| - 1)}{2} \quad N^* = \frac{(N - g - u - 1)}{2} \quad S = \min(u, c)$$

u : é o posto da matriz da matriz U ;

c : é o posto da matriz C ;

g : é o posto da matriz X

7.6. ANÁLISE DE AGRUPAMENTO PELO MÉTODO DE WARD

A análise de agrupamento é a técnica multivariada que consiste na aplicação de uma série de técnicas e algoritmos, objetivando identificar e separar objetos ou indivíduo em grupos similares. A análise de agrupamento também é conhecida como análise de conglomerados, classificação ou cluster.

Seja uma amostra de g objetos, onde foram observadas p características ou variáveis. O problema a ser resolvido pela análise de agrupamento é estabelecer um esquema de classificação, visando congregiar esses indivíduos em um determinado número de grupos, os mais homogêneos possíveis, e que sejam dimensionados e caracterizados, tal que o pesquisador possa eleger representantes típicos para a população e assim poder descrevê-la com a máxima precisão.

Os algoritmos utilizados nas análises de agrupamento podem ser classificados:

- a) Técnicas hierárquicas;
- b) Técnicas de partição;
- c) Técnicas de cobertura.

Nas técnicas hierárquicas os objetos são classificados em grupos em diferentes etapas, tendo como resultado uma árvore de classificação (dendrograma ou fenograma). O que caracteriza o processo hierárquico é que a reunião numa determinada etapa de dois grupos produzirá um dos agrupamentos da etapa superior.

Os algoritmos hierárquicos podem ser classificados em aglomerativos e divisivos. O agrupamento é definido como aglomerativo quando através de fusões sucessivas dos g indivíduos ou objetos são produzidos $g-1$, $g-2$, etc. grupos, e assim, sucessivamente, até reunir todos os indivíduos em um único grupo. Divisivos quando a partir de um único grupo e por subdivisões sucessivas são obtidos 2, 3,..., etc. grupos.

Nas técnicas de partição os agrupamentos são resultantes de uma partição do conjunto de objetos. Nos métodos de cobertura os agrupamentos resultantes recobrem o conjunto de objetos, inclusive podem se sobrepor um ao outro.

Os algoritmos também podem ser sequenciais ou não sequenciais. São algoritmos sequenciais quando o mesmo conjunto de operações é aplicado nas várias etapas do agrupamento.

Seja y_{vi} o vetor que representa os valores observados da variável y_{ij} correspondente ao método de manejo florestal M_i ($i = 1, 2, \dots, g$).

y_{ij} : é o volume de madeira, concernente a j -ésima ocasião ($j = 1, 2, \dots, p$), correspondente ao método de manejo M_i ($i = 1, 2, \dots, g$), isto é, $y'_{vi} = [y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{ip}]$.

Segundo Ferreira (2011), o método de Ward consiste em um procedimento de agrupamento hierárquico baseado na análise de variância, ou seja, as somas de

quadrados entre e dentro dos grupos, em relação às p variáveis, são utilizadas como critério de agrupamento.

O método de Ward é também conhecido como o método do incremento das somas de quadrados, no qual a medida de similaridade usada para reunir grupos (agrupamento ou *clusters*) é calculada como a soma de quadrados, sobre todas as variáveis, entre os dois agrupamentos. Em cada fase, combinam-se os dois grupos que apresentarem menor aumento, dentro dos agrupamentos, na soma total de quadrados.

Montada a matriz de soma de quadrados, considerando pares de indivíduos, considera-se como um grupo formado o par que apresentar a mínima soma de quadrados. O processo continua seguindo o princípio da soma de quadrados mínima. Mingoti (2005) cita que o método de Ward é também chamado de variância mínima e fundamenta-se nos princípios:

- a) Considerar, inicialmente, que cada elemento (indivíduos ou objetos) é um único grupo;
- b) Calcular, em cada passo do algoritmo de agrupamento, a soma de quadrados dentro de cada grupo. Esta soma é o quadrado da distância Euclidiana de cada elemento amostral pertencente ao grupo ou cluster em relação ao correspondente vetor de médias do grupo, ou seja:

$$SQ_i = \sum_{j=1}^{n_i} (y_{vij} - \bar{y}_{vi.})'(y_{vij} - \bar{y}_{vi.})$$

n_i : é o número de elementos do conglomerado C_i no k -ésimo passo do processo;

y_{vij} : é o vetor de observações do j -ésimo elemento amostral que pertence ao i -ésimo conglomerado;

$\bar{y}_{vi.}$: é o centroide do conglomerado C_i ;

SQ_i : é a soma de quadrados correspondente ao conglomerado C_i .

No k -ésimo passo, a soma de quadrados total dentro dos grupos é definida, como:

$$SQR = \sum_{i=1}^{g_k} SQ_i$$

g_k : é o numero de grupos existentes no k -ésimo passo.

A distância entre os conglomerados C_l e C_i é dada pela expressão:

$$d(C_l, C_i) = SQ_{l,i} - (SQ_l + SQ_i)$$

$$d(C_l, C_i) = \left(\frac{n_l n_i}{n_l + n_i} \right) [(\bar{y}_{vl.} - \bar{y}_{vi.})'(y_{vl.} - \bar{y}_{vi.})]$$

Esta expressão é a soma de quadrados entre os conglomerados C_l e C_i . Em cada etapa da aplicação do algoritmo de agrupamento, os dois conglomerados que tornam a distância mínima $d(C_l, C_i)$ são reunidos.

Mingoti (2005) cita também que a medida de distância $d(C_l, C_i)$ é a diferença entre o valor de SQR depois e antes de se combinar os conglomerados C_l e C_i em um único grupo. Desta forma, em cada passo do agrupamento, o método de Ward combina os dois grupos que resultam no menor valor de SQR .

Com efeito, considerando o conjunto de todos os grupos, a soma dos quadrados dos erros é dada pela soma de quadrados dos erros dos grupos individuais em relação a todos os grupos. É importante considerar, no método de Ward, que:

$$SQ_{li} = 0,5d(C_l, C_i).$$

7.7. ANÁLISE DE UM INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO COM QUATRO MÉTODOS DE MANEJO

Seja uma área florestal de 1000 ha onde foram aplicados quatro métodos de manejo M1, M2, M3, M4. O monitoramento do crescimento, em cada método de manejo, foi realizado por um inventário florestal contínuo com 30 parcelas permanentes. As medições foram realizadas em cinco ocasiões equidistantes de cinco anos, ou seja, o ano 0 (zero), 5 anos, 10 anos, 15 anos e 20 anos. O ano zero (0) corresponde à data logo após a exploração florestal. Os dados (volume por ha) foram simulados, dentro de um contexto próximo ao real de uma floresta natural, e estão apresentados na tabela B1 do apêndice B. Os cálculos foram realizados pelo sistema de análise estatística SAS e os programas desenvolvidos para efetuar as análises estão apresentados nas tabelas C7, C8, C9, C10, C11, C12 e C13 do apêndice C.

7.7.1. ANÁLISE DA INTERAÇÃO OCASIÃO×MÉTODO DE MANEJO

a) Vetores de médias, dos métodos de manejo M1, M2, M3 e M4, considerando as cinco ocasiões 0, 5, 10, 15 e 20 anos

$$\bar{y}'_{v1} = [96,65589 \quad 118,86703 \quad 135,42923 \quad 136,51993 \quad 137,96803]$$

$$\bar{y}'_{v2} = [97,07460 \quad 120,00173 \quad 137,35973 \quad 139,15100 \quad 140,50200]$$

$$\bar{y}'_{v3} = [96,73433 \quad 130,93337 \quad 142,36860 \quad 149,35633 \quad 150,12670]$$

$$\bar{y}'_{v4} = [97,17653 \quad 131,25127 \quad 143,12620 \quad 150,28670 \quad 150,97080]$$

b) Gráfico dos perfis de crescimentos dos métodos de manejo M1, M2, M3 e M4

Figura 7.7.1.1 - Perfis de crescimentos dos métodos M1, M2, M3 e M4.

c) Matrizes de covariâncias dos métodos M1, M2, M3 e M4 considerando as cinco ocasiões 0, 5, 10, 15 e 20 anos

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \begin{bmatrix} 1,84061681 & 1,76852089 & 1,88189246 & 2,01479114 & 2,04154190 \\ 1,76852089 & 3,46728879 & 3,78614806 & 4,05873545 & 4,04560596 \\ 1,88189246 & 3,78614806 & 4,57316908 & 4,85074615 & 4,85566809 \\ 2,01479114 & 4,05873545 & 4,85074615 & 5,47236765 & 5,51975907 \\ 2,04154190 & 4,04560596 & 4,85566809 & 5,51975907 & 5,96583927 \end{bmatrix} \\
 S_2 &= \begin{bmatrix} 2,17477232 & 2,59689899 & 2,68184199 & 2,71630059 & 2,85198576 \\ 2,59689899 & 5,76460937 & 7,16915586 & 7,72605210 & 7,74732466 \\ 2,68184199 & 7,16915586 & 9,78160489 & 10,7380652 & 11,0652238 \\ 2,71630059 & 7,72605210 & 10,7380652 & 12,3077877 & 12,7868027 \\ 2,85198576 & 7,74732466 & 11,0652238 & 12,7868027 & 13,8031214 \end{bmatrix} \\
 S_3 &= \begin{bmatrix} 1,71308108 & 1,14810639 & 0,69754194 & 0,25827404 & -0,0956008 \\ 1,14810639 & 3,47591569 & 3,96563570 & 4,17305767 & 3,99328305 \\ 0,69754194 & 3,96563570 & 5,56337459 & 6,49248559 & 6,73230947 \\ 0,25827404 & 4,17305767 & 6,49248559 & 8,46297747 & 9,04132329 \\ -0,0956008 & 3,99328305 & 6,73230947 & 9,04132329 & 10,0929095 \end{bmatrix} \\
 S_4 &= \begin{bmatrix} 2,69608384 & 3,60369934 & 3,69112813 & 3,55789403 & 3,08094366 \\ 3,60369934 & 6,37970758 & 7,23914367 & 7,42276691 & 6,54165978 \\ 3,69112813 & 7,23914367 & 9,24803313 & 9,87512234 & 9,14563949 \\ 3,55789403 & 7,42276691 & 9,87512234 & 11,19773435 & 10,7082246 \\ 3,08094366 & 6,54165978 & 9,14563949 & 10,7082246 & 10,7512713 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d) Cálculo da matriz (comum) do erro

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \begin{bmatrix} 2,1061385 & 2,2793064 & 2,2381011 & 2,1368150 & 1,9697176 \\ 2,2793064 & 4,7718804 & 5,5400208 & 5,8451530 & 5,5819684 \\ 2,2381011 & 5,5400208 & 7,2915454 & 7,9891048 & 7,9497102 \\ 2,1368150 & 5,8451530 & 7,9891048 & 9,3602169 & 9,5140274 \\ 1,9697176 & 5,5819684 & 7,9497102 & 9,5140274 & 10,1532850 \end{bmatrix}$$

e) Análise de esfericidade da matriz de covariância (S) pelo critério de Mauchly e as correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ε_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ε_{hf})

Tabela 7.7.1.1 - Teste de esfericidade pelo critério de Mauchly e os valores das correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ε_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ε_{hf}).

Variáveis	GL	Critério de Mauchly	Qui-Quadrado	Pr > χ^2
Variáveis Transformadas	9	0,0084525	546,1448	<0,0001
Componentes ortogonais	9	0,0084525	546,1448	<0,0001
Greenhouse-Geisser Epsilon $\hat{\varepsilon}_{gg} = 0,3437$				
Huynh-Feldt Epsilon $\hat{\varepsilon}_{hf} = 0,3554$				

A Tabela 7.7.1.1 mostra o resultado do teste de esfericidade pelo critério de Mauchly, o qual apresentou um resultado altamente significativo, o que denota que a matriz do erro (S) não é esférica, concluindo-se pela não realização da análise univariada de parcelas subdivididas (*split-plot*), mas caso seja o desejo do pesquisador, então pode ser usada a correção de Greenhouse-Geisser Epsilon (ε_{gg}) ou a de Huynh-Feldt Epsilon (ε_{hf}) para corrigir os graus de liberdade do teste F, para a igualdade de efeitos de ocasiões e para igualdade de paralelismo (interação de ocasião×método de manejo).

f) Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias

$$H_0 : \Sigma_{M1} = \Sigma_{M2} = \Sigma_{M3} = \Sigma_{M4} = \Sigma$$

Pelo método da razão de máxima verossimilhança generalizada, Anderson (1958), tem-se:

$$M = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S| - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S_i|. \text{ Então:}$$

$$M = 4 \times 29 \times -0,49478 - 29 \times -4,10116 = 61,53916$$

$$\ln(\det S_1) = -1,72499 \quad \ln(\det S_2) = -0,87645 \quad \ln(\det S_3) = -0,64480$$

$$\ln(\det S_4) = -0,85492 \quad \ln(\det S) = -0,49478$$

De acordo com BOX (1949), citado por MORRISON (1976), a estatística MC^{-1} é aproximadamente distribuída como uma variável qui-quadrado (χ^2) assintótica com (v) graus de liberdade quando n_i tende para infinito. Onde:

$$v = \frac{1}{2}(g-1)p(p+1) \quad C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)} \left[\sum_{i=1}^g \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^g (n_i - 1)} \right]$$

Caso os tratamentos apresentem o mesmo número de repetições, $n = n_1 = n_2 = \dots = n_g$, a fórmula de C^{-1} será dada por:

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g + 1)}{6(p + 1)g \times (n - 1)}$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g + 1)}{6(p + 1)g \times (n - 1)} = 1 - \frac{(2 \times 5^2 + 3 \times 5 - 1)(4 + 1)}{6(5 + 1) \times 4 \times (29)} = 0,92337$$

$$MC^{-1} = 61,53916 \times 0,92337 = 56,8234$$

$$v = \frac{1}{2}(g - 1)p(p + 1) = \frac{1}{2}(4 - 1) \times 5 \times (5 + 1) = 45$$

Tabela 7.7.1.2 - Estatística de qui-quadrado χ^2 (assintótico).

Qui-Quadrado	GL	Pr > χ^2
56,823368	45	0,1112

Considerando o valor de $\text{Pr} > \text{Qui-Quadrado} = 0,1112$ (tabela 7.7.1.2), então se conclui pela não rejeição de $H_0: \Sigma_{M1} = \Sigma_{M2} = \Sigma_{M3} = \Sigma_{M4} = \Sigma$, ou seja, as matrizes de covariâncias dos tratamentos M1, M2, M3, M4 podem ser consideradas homogêneas.

g) Testes de multinormalidade de Mardia e de Henze-Zirkler para M1, M2, M3 e M4

Seja a estatística do teste amostral para a assimetria de Mardia (1970):

$$\hat{\beta}_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(y_{vi} - \bar{y}_v)' S^{-1} (y_{vj} - \bar{y}_v)]^3$$

Tal que $A = n\hat{\beta}_{1,p}/6$ é assintoticamente distribuída como uma variável aleatória qui-quadrado com $p(p+1)(p+2)/6$ graus de liberdades.

Seja a estatística do teste amostral para a curtose de Mardia (1970):

$$\hat{\beta}_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{vi} - \bar{y}_v)' S_n^{-1} (y_{vi} - \bar{y}_v)]^2$$

Tal que $B = [\hat{\beta}_{2,p} - p(p+2)] / \sqrt{8p(p+2)}$ é assintoticamente distribuída segundo uma distribuição normal padrão.

De acordo Korkmaz, Goksuluk e Zararsiz (2014), a estatística do teste de multinormalidade de Henze-Zirkler, ver seção 3.2, é dada por:

$$HZ = \frac{1}{n} \sum_i^n \sum_j^n e^{-\frac{\beta^2}{2} D_{ij}} - 2(1 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)} D_i} + n(1 + 2\beta^2)^{\frac{p}{2}}$$

Se os dados são multivariados normais, a estatística do teste (HZ) é aproximadamente log-normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 . Usando os parâmetros da distribuição log-normal, μ e σ , testa-se a normalidade multivariada dos dados pela estatística:

$$Z = \frac{\log(HZ) - \log(\mu)}{\log(\sigma)}$$

A tabela 7.7.1.3 mostra os resultados dos testes de multinormalidade de Mardia Skewness, de Mardia Kurtosis e de Henze-Zirkler, para o conjunto das cinco ocasiões, considerando os métodos de manejo M1, M2, M3 e M4. A análise foi realizada através do programa: % Multinorm Macro: Mardia Tests of Multivariate Normality, Version 1.1, disponível pelo SAS Institute Inc. como um serviço para seus usuários, em: <http://homepages.wmich.edu/~applegab/EMR675/SASFiles/multnorm.sas>

Tabela 7.7.1.3 - Testes de multinormalidade para o conjunto das cinco ocasiões.

Equações	Estatística dos Testes	Valores	Prob.
System (SAS)	Mardia Skewness	28,01	0,7933
	Mardia Kurtosis	-2,15	0,0317
	Henze-Zirkler T	6,75	< 0,0001

O teste de Henze-Zirkler apresentou resultado significativo (p -valor < 0,0001). O teste de Mardia Skewness foi não significativo (p -valor = 0,7933) e Mardia Kurtosis (p -valor = 0,0317) também para o nível de significância (α = 0,01), mostrando que há razão para considerar que as populações em estudo são multinormais. A Figura 7.7.1.2 mostra o “Gráfico Qui-Quadrado Q-Q”, apresentando uma configuração linear sem valores discrepantes dos “Quantil Qui-Quadrado” versus as “Distâncias Quadradas”, indicando uma aderência dos dados à normalidade multivariada.

Figura 7.7.1.2 - Gráfico Multnorm Macro Qui-Quadrado Q-Q para M1, M2, M3 e M4.

h) Teste da interação Método de Manejo×Ocasão para M1, M2, M3 e M4

Tabela 7.7.1.4 - Teste da existência de interação entre os perfis de crescimento dos métodos.

Testes e aproximações das estatísticas F para a hipótese de não existência de efeito da interação Ocasão×Método Manejo ($S = 3$; $M = 0$; $N^* = 55,5$)					
Testes multivariados	Valores	Valores F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,01112936	111,59	12	299,26	< 0,0001
Pillai Trace	1,15886102	18,10	12	345	< 0,0001
Hotelling-Lawley Trace	73,61405339	688,04	12	193,48	< 0,0001
Roy Greatest Root	73,40695894	2110,45	4	115	< 0,0001

A tabela 7.7.1.4 apresenta os resultados dos testes para a hipótese da interação ocasião×método de manejo. Os testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root apresentaram resultados significativos (p -valor < 0,0001), denotando que existem pelo menos dois métodos de manejo que apresentam perfis de crescimento não paralelos. Essas estatísticas estão transformadas na F de Snedecor.

$$M = \frac{(|u-c|-1)}{2} = \frac{|4-3|-1}{2} = 0 \quad N^* = \frac{(N-g-u-1)}{2} = \frac{(120-4-4-1)}{2} = 55,5$$

$$S = \min(u, c) = (4, 3)$$

$u = p-1 = 4$: é posto, no caso desta hipótese, da matriz U_1 ;

$c = g-1 = 3$: é o posto da matriz C ;

N : número de parcelas (120).

Com efeito, como a interação foi significativa considerando todos os quatro métodos de manejo, então o próximo passo será verificar quais perfis de crescimento são paralelos, ou coincidentes. Pode-se, para obter uma discriminação preliminar dos métodos de manejo, testar, por exemplo, cada ocasião separadamente pelo teste F , ou realizar um teste de comparação múltipla, por exemplo, o teste de Tukey. Optou-se pelo uso da técnica de análise de agrupamento de Ward.

i) Análise de agrupamento (método de Ward) dos quatro métodos de manejo (objetos)

Tabela 7.7.1.5 - Matriz das médias dos quatro métodos de manejo.

MMF	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
M1	96,6558900	118,867033	135,429233	136,519933	137,968033
M2	97,0746000	120,001733	137,359733	139,151000	140,502000
M3	96,7343267	130,933367	142,368600	149,356333	150,126967
M4	97,1765333	131,251267	143,126200	150,286700	150,970800

Os métodos de manejo foram agrupados utilizando as ocasiões como variáveis. Matriz de distâncias ao quadrado considerando os $g(g-1)/2 = 6$ pares de objetos:

$$\begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 18,533195 & 506,37022 & 571,47945 \\ & 0 & 341,49397 & 393,41414 \\ & \text{Simétrica} & 0 & 2,4482017 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

De acordo com a matriz de distâncias ao quadrado, considera-se como o primeiro grupo formado o par (M3, M4) que apresentou a mínima distância ao quadrado (2,4482017). O processo continua seguindo o princípio da soma de quadrados mínima. Dois programas desenvolvidos no SAS, Proc IML e Proc cluster method, estão na tabela C9 do apêndice C.

Tabela 7.7.1.6 - Análise de agrupamento no SAS (Proc IML).

ETAPA	FUSÃO	SQE_{li}	$SQE (Ac.)$	PPI	$d(C_i, C_j)$
1	(M3) e (M4)	1,2241	1,2241	0,0027	2,4482
2	(M1, M2)	9,2666	10,4907	0,0202	18,5332
3	(M3, M4) e (M1, M2)	447,9441	458,4348	0,9771	895,8882

É importante observar, na tabela 7.7.1.6, que $SQE_{li} = 0,5d(C_i, C_j)$. O gráfico 7.7.1.3 foi elaborado usando as medidas de distâncias, ou seja, $\sqrt{d(C_i, C_j)}$.

$$PPI = SPRSQ = \frac{SQE_{li}}{SQ_{Total}} = \frac{SQE_{li}}{458,4348} \text{ (é a porcentagem de perda de informação).}$$

Tabela 7.7.1.7 - Análise de agrupamento no SAS (Proc cluster method).

Resultados do Agrupamento - SAS						
NCL	FUSÃO		FREQ	SPRSQ	SPRSR (Ac.)	RSQ
3	M3	M4	2	0,0027	0,0027	0,997
2	M1	M2	2	0,0202	0,0229	0,977
1	CL2	CL3	4	0,9771	1,0000	0,000

$$RSQ = 1 - SPRSR(Ac.)$$

Figura 7.7.1.3 - Dendrograma dos quatro métodos de manejo.

j) Teste de paralelismo entre grupos (M1 e M2) e (M3 e M4)

Considerando os resultados da análise de agrupamento, apresentados nas tabelas 7.7.1.6, 7.7.1.7 e no gráfico 7.7.1.3, é recomendável testar a existência de interação dos perfis de crescimentos entre os métodos M3 e M4, assim como entre os métodos M1 e M2. Os resultados para os métodos M3 e M4 estão mostrados na tabela 7.7.1.8. Os testes para verificação de existência de interação, entre M1 e M2, estão apresentados no exemplo de aplicação da seção 7.3.1, o qual mostrou existir interação entre os perfis de M1 e M2.

Tabela 7.7.1.8 - Teste de paralelismo entre os perfis de crescimento de M3 e M4.

Testes e estatísticas exatas de F para a hipótese de não existência de efeito de interação Ocasão×Método de Manejo ($S = 1$; $M = 1$; $N^* = 26,5$)					
Testes multivariados	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,88048940	1,87	4	55	0,1294
Pillai Trace	0,11951060	1,87	4	55	0,1294
Hotelling-Lawley Trace	0,13573201	1,87	4	55	0,1294
Roy Greatest Root	0,13573201	1,87	4	55	0,1294

A tabela 7.7.1.8 mostra que os testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root apresentaram resultados não significativos (p -valor = 0,1294) para a interação ocasião×método de manejo, denotando que os perfis de crescimento dos métodos M3 e M4 são paralelos. Programa SAS para verificação de existência de interação, ver tabela C8 do apêndice C, usando o arquivo com os métodos M3 e M4. Destarte, o próximo passo, considerando que os perfis de crescimento entre os métodos M3 e M4 são paralelos, então será verificar se os mesmos são coincidentes.

k) Teste de coincidência entre os perfis de crescimento entre M3 e M4 pelo teste “t” de Student

A verificação da coincidência entre os métodos de manejo M3 e M4 poderá ser feito pelo teste t de Student, segundo a hipótese:

$H_{02} = j'\mu_{v3} = j'\mu_{v4}$, tal que $j' = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Esta hipótese também pode ser escrita da seguinte forma: $H_{02} = \mu_{31} + \mu_{32} + \mu_{33} + \mu_{34} + \mu_{35} = \mu_{41} + \mu_{42} + \mu_{43} + \mu_{44} + \mu_{45}$.

$$t = \frac{j'(\bar{y}_{v3} - \bar{y}_{v4})}{\sqrt{j'Sj(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4})}}, \text{ com } n_3 + n_4 - 2 = 58 \text{ graus de liberdade.}$$

$$j'(\bar{y}_{v3} - \bar{y}_{v4}) = 3,2919066 \quad j'Sj = 136,06318$$

$$S = \frac{S_3 + S_4}{2} = \begin{bmatrix} 2,20458252 & 2,3759029 & 2,1943350 & 1,9080840 & 1,4926714 \\ 2,3759029 & 4,9278116 & 5,6023897 & 5,7979123 & 5,2674714 \\ 2,1943350 & 5,6023897 & 7,4057039 & 8,1838040 & 7,9389745 \\ 1,9080840 & 5,7979123 & 8,1838040 & 9,8303560 & 9,8747739 \\ 1,4926714 & 5,2674714 & 7,9389745 & 9,8747739 & 10,422090 \end{bmatrix}$$

$$t_{CAL} = \frac{j'(\bar{x}_{v3} - \bar{\mu}_{v4})}{\sqrt{j'Sj(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4})}} = \frac{3,2919066}{\sqrt{136,06318(\frac{1}{30} + \frac{1}{30})}} = \frac{3,2919066}{3,0117896} = 1,0930$$

Sendo $t_{58;0,05} \cong 2,0$, conclui-se pela não rejeição de H_{02} , então há razão para aceitar a coincidência dos perfis de crescimento dos métodos de manejo M3 e M4. Neste caso, será estimada uma única equação de crescimento para ambos os métodos. Programa desenvolvido no SAS apresentado na tabela C10 (Proc IML) do apêndice C.

l) Teste de coincidência dos perfis de crescimento entre M3 e M4 pela análise de perfil

Teste de coincidência dos perfis segundo a hipótese linear: $H_{02} : C_2\beta U_2 = \phi$.

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U_2' = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Tabela 7.7.1.9 - Testes de coincidência entre os perfis de crescimento de (M3, M4).

Testes e estatísticas exatas de F para a hipótese de coincidência de perfis entre os métodos de manejo M3 e M4 ($S = 1$; $M = -0,51$; $N^* = 28$)					
Testes multivariados	Valores	Valor F	GL		Pr > F
Wilks Lambda	0,97981805	1,19	1	58	0,2789
Pillai Trace	0,02018195	1,19	1	58	0,2789
Hotelling-Lawley Trace	0,02059765	1,19	1	58	0,2789
Roy Greatest Root	0,02059765	1,19	1	58	0,2789

A tabela 7.7.1.9 mostra que os testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root apresentaram resultados não significativos (p -valor = 0,2789) para o teste de coincidência, mostrando que os perfis de crescimento dos métodos de manejo M3 e M4 são coincidentes, assim sendo, pode-se obter uma equação única de crescimento para os dois métodos. Programa desenvolvido no SAS (Proc GML) está apresentado na tabela C11 do apêndice C.

É importante observar que, no teste de coincidência dos perfis, segundo a hipótese linear $H_{02} : C_2\beta U_2 = \phi$, o valor da estatística $F_{1;58}$ foi 1,19, enquanto que o valor " t_{58} " foi 1,0930, ou seja, $F_{1;58} = t_{58}^2$. Este resultado é devido à relação, $F_{1;n;\alpha} = t_{n;\alpha}^2$, existente entre as funções densidades de F e " t " de Student.

A aceitação de coincidência dos perfis de crescimento dos métodos de manejo M3 e M4, obtidas pelo teste " t " de Student e pela hipótese linear $H_{02} : C_2\beta U_2 = \phi$, também foi confirmada, na seção 7.7.3, pelo teste da razão da máxima verossimilhança que comprovou a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão para as equações de crescimento dos métodos de manejo M3 e M4.

7.7.2. ESTIMATIVA DO CICLO DE CORTE ECONOMICAMENTE ACONSELHÁVEL PARA M1, M2, M3 E M4

Seja a equação de Mitscherlich $V = \beta_0[1 - 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}]$. As análises foram realizadas a partir do programa desenvolvido no SAS e disponível na tabela C12 do apêndice C.

Seja a fórmula desenvolvida e mostrada no capítulo 6, seção 6.8, para obter o ciclo de corte baseada na função de Mitscherlich: $t_{oti} = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \log_{10}[2,302585R\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1] - \hat{\beta}_2$.

O objetivo é obter a produção máxima de madeira, mas condicionado a maximizar a renda líquida. Neste exemplo, será utilizada uma razão de custo $R = 3$, que é o quociente entre a receita obtida da venda da madeira e o custo do manejo florestal. Nos exemplos analisados, nas seções 7.2.1 e 7.3.1, foram apresentados os ciclos de cortes obtidos pelos métodos M1 e M2, que foram respectivamente $t_{oti(M1)} = 18,7 \text{ anos}$ ($138,57 \text{ m}^3/\text{ha}$) e $t_{oti(M2)} = 19,5 \text{ anos}$ ($141,49 \text{ m}^3/\text{ha}$). Os métodos M3 e M4 têm perfis de crescimento coincidentes, então, falta obter o ciclo de corte conjunto para M3 e M4.

a) Cálculo do ciclo de corte economicamente aconselhável conjunto para M3 e M4

A tabela 7.7.2.1 apresenta os resultados da análise de regressão da equação de Mitscherlich, pelo método de Gauss-Newton, considerando conjuntamente os métodos M3 e M4.

$$V_{M34} = 152,1[1 - 10^{-0,0819(t+5,3838)}] \quad (0 \leq t \leq 20 \text{ anos})$$

$$t_{oti(M34)} = \left(\frac{1}{0,0819}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 152,1 \times 0,0819) - 5,3838 = 18,2 \text{ anos}$$

$$V_{oti(M34)} = 152,1[1 - 10^{-0,0819(18,2+5,3838)}] = 150,32 \text{ m}^3 / \text{ha}$$

$$RQMR_{M34} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{2188,2}{2 \times 150}} = 2,70074 \quad CV_{M34} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{M34}} \times 100 = \frac{2,70074}{133,90} \times 100 = 2,02\%$$

Tabela 7.7.2.1 - Análise de regressão da equação de Mitscherlich para M3 e M4.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	152,1	0,3640	151,4	152,8
$\hat{\beta}_1$	0,0819	0,00192	0,0781	0,0857
$\hat{\beta}_2$	5,3838	0,1241	5,1396	5,6281
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	297	2188,2	7,3678	249931,0
Teste de validade Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	19,79871	2,75	0,0658
Denominador	298	7,21017		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 281, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{M43} = 0,99091$ (< 0,0001)			$r_{M43}^2 = 0,9819$

Figura 7.7.2.1 - Gráfico dos resíduos para o conjunto dos métodos (M3 e M4).

Os indicadores $CV\%$, r^2_{M1} , F_G e a distribuição dos resíduos, utilizados para avaliar o ajustamento do modelo de Mitscherlich do grupo (M3,M4), apresentaram resultados satisfatórios dentro do contexto esperado.

b) Ciclo de corte economicamente aconselhável para grupo (M1, M2, M3, M4)

Da tabela 7.7.2.2, têm-se:

$$V_{M1234} = 147,1[1 - 10^{-0.0762(t+6,1052)}] \quad (0 \leq t \leq 20 \text{ anos})$$

$$t_{oti(M1234)} = \left(\frac{1}{0,0762}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 147,1 \times 0,0762) - 6,1052 = 18,7 \text{ anos}$$

$$V_{oti(M1234)} = 147,1[1 - 10^{-0.0762(18,7+6,1052)}] = 145,21 m^3 / ha$$

$$RQMR_{1234} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{18000,2}{4 \times 150}} = 5,4773 \quad CV_{M1234} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{M1234}} \times 100 = \frac{5,4773}{134,60} \times 100 = 4,07\%$$

Tabela 7.7.2.2 - Análise de regressão conjunta para grupo (M1, M2, M3, M4).

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	147,1	0,5633	146,0	148,2
$\hat{\beta}_1$	0,0762	0,00287	0,0706	0,0818
$\hat{\beta}_2$	6,1052	0,2223	5,6685	6,5419
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	597	18000,2	30,1511	114410,0
Teste de validade Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	763,12500	27,70	< 0,0001
Denominador	598	27,54843		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 600, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{M1234} = 0,95667$ (< 0,0001)			$r^2_{M1234} = 0,9152$

Figura 7.7.2.2 - Gráfico dos resíduos para o grupo (M1, M2, M3, M4).

Os indicadores CV%, r^2_{M1234} e a distribuição dos resíduos, utilizados para avaliar o ajustamento do modelo de Mitscherlich para o grupo (M1, M2, M3, M4), apresentaram resultados satisfatórios dentro do contexto esperado, mas o teste de validade de Graybill apresentou o valor $F_G = 27,70$ (< 0,0001), o que não recomenda usar uma única equação para o conjunto dos quatro métodos de manejo.

7.7.3. TESTE DA RAZÃO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, DE VERIFICAÇÃO DE IGUALDADE DE PARÂMETROS E A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR, PARA M3 E M4

A tabela 7.7.3.1 apresenta para o modelo completo (Ω), as estimativas dos parâmetros e os seus correspondentes intervalos de confiança. A tabela 7.7.3.2 mostra para o modelo com restrições (ω), as estimativas dos parâmetros e seus respectivos intervalos de confiança. O programa SAS está apresentado na tabela C13 do apêndice C.

Tabela 7.7.3.1 - Modelo completo ômega (Ω) para M3 e M4.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_{03}$	151,6	0,5076	150,6	152,6
$\hat{\beta}_{13}$	0,0828	0,00275	0,0774	0,0882
$\hat{\beta}_{23}$	5,3412	0,1742	4,9983	5,6841
$\hat{\beta}_{04}$	152,7	0,5185	151,6	153,7
$\hat{\beta}_{14}$	0,0811	0,00268	0,0758	0,0864
$\hat{\beta}_{24}$	5,4260	0,1756	5,0804	5,7717
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Error	294	2152,1	7,3200	3245,16

Da tabela 7.7.3.1 que mostra a análise de variância referente ao modelo completo (Ω):

$$SQRR_{\Omega} = 2152,1 \quad QMRR_{\Omega} = 7,3200 \quad N=300$$

$p_{\Omega} = 6$ (número de parâmetros do modelo sem restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N} = \frac{N - p_{\Omega}}{N} \times MQRR_{\Omega} = \frac{2152,1}{300} = \left(\frac{300-6}{300}\right) \times 7,3200 = 7,1737$$

Tabela 7.7.3.2 - Modelo com restrição (ω) para M3 e M4.

$H_0^4: \beta_{03} = \beta_{04} = \beta_0; \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_1; \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_2$				
Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	152,1	0,3640	151,4	152,8
$\hat{\beta}_1$	0,0819	0,00192	0,0781	0,0857
$\hat{\beta}_2$	5,3838	0,1241	5,1396	5,6280
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Error	297	2188,2	7,3678	8057,88

Da tabela 7.7.3.2, que apresenta a análise de variância referente ao modelo com restrição (ω):

$$SQRR_{\omega} = 2188,2 \quad MQRR_{\omega} = 7,3678 \quad N=300$$

$p_{\omega} = 3$ (número de parâmetros do modelo com restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N} = \frac{N - p_{\omega}}{N} \times MQRR_{\omega} = \frac{2188,2}{300} = \left(\frac{300-3}{300}\right) \times 7,3678 = 7,2941$$

Do teste da razão de máxima verossimilhança, conforme Rao (1973), para grandes amostras, têm-se:

$$-2\ln L = -N\ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

$$\chi_{cal}^2 = -N\ln\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -N\ln\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right) = -300\ln\left(\frac{7,1737}{7,2941}\right) = 4,9933$$

$$\chi_{v;0,01}^2 = \chi_{3,0,05}^2 = 7,81, \text{ tal que: } v = p_{\Omega} - p_{\omega} = 3.$$

Como $\chi_{cal}^2 > \chi_{3,0,05}^2$, a hipótese $H_0^{(4)}$ foi não significativa, conclui-se ser recomendável usar uma única equação para estimar a tendência de crescimento para os métodos M3 e M4, assim sendo, a equação V_{M34} , cujas estimativas dos parâmetros estão apresentadas na tabela 7.7.3.2, poderá ser usada, considerando esses dois métodos de manejo, para estimar o perfil de crescimento.

7.7.4. TESTE DA RAZÃO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, CONSIDERANDO OS MÉTODOS DE MANEJOS M1, M2, M3 E M4, PARA VERIFICAR A IGUALDADE DE PARÂMETROS E A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR

A tabela 7.7.4.1 apresenta as estimativas dos parâmetros e os seus correspondentes intervalos de confiança, considerando o modelo completo (Ω). Na tabela 7.7.4.2. são apresentados os valores das estimativas dos parâmetros e seus respectivos intervalos de confiança, para o modelo (ω) com as restrições ($H_0^{(4)}$). Programa construído no SAS está apresentado na tabela C12 do apêndice C.

Da Tabela 7.7.4.1 que mostra a análise de variância referente ao modelo completo (Ω):

$$SQRR_{\Omega} = 5124,6 \quad QMRR_{\Omega} = 8,7152 \quad N=600$$

$p_{\Omega} = 12$ (número de parâmetros do modelo sem restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N} = \frac{N - p_{\Omega}}{N} \times MQRR_{\Omega} = \frac{5124,6}{600} = \left(\frac{600-12}{600}\right) \times 8,7152 = 8,541$$

Tabela 7.7.4.1 - Modelo completo ômega (Ω) para M1, M2, M3 e M4.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_{01}$	140,6	0,6504	139,4	141,9
$\hat{\beta}_{11}$	0,0717	0,00339	0,0651	0,0784
$\hat{\beta}_{21}$	6,9768	0,3135	6,3611	7,5924
$\hat{\beta}_{02}$	143,6	0,6790	142,3	145,0
$\hat{\beta}_{12}$	0,0692	0,00315	0,0631	0,0754
$\hat{\beta}_{22}$	7,0005	0,3012	6,4090	7,5920
$\hat{\beta}_{03}$	151,6	0,5539	150,5	152,7
$\hat{\beta}_{13}$	0,0828	0,00300	0,0769	0,0886
$\hat{\beta}_{23}$	5,3412	0,1901	4,9678	5,7145
$\hat{\beta}_{04}$	152,7	0,5658	151,5	153,8
$\hat{\beta}_{14}$	0,0811	0,00292	0,0754	0,0868
$\hat{\beta}_{24}$	5,4260	0,1916	5,0496	5,8024
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Error	588	5124,6	8,7152	2160,95

Tabela 7.7.4.2 - Modelo com restrição (ω) para M1, M2, M3 e M4.

$H_0^4: \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} = \beta_0; \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_1; \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_2$				
Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	147,1	0,5633	146,0	148,2
$\hat{\beta}_1$	0,0762	0,00287	0,0706	0,0818
$\hat{\beta}_2$	6,1052	0,2223	5,6685	6,5419
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	597	18000,2	30,1511	114410,0

Da Tabela 7.7.4.2 que mostra a análise de variância referente ao modelo com restrição (ω):

$$SQRR_{\omega} = 18000,2 \quad MQRR_{\omega} = 30,1511 \quad N=600$$

$p_{\omega} = 3$ (número de parâmetros do modelo com restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N} = \frac{N - p_{\omega}}{N} \times MQRR_{\omega} = \frac{18000,2}{600} = \left(\frac{600-3}{600}\right) \times 30,1511 = 30,0003$$

Do teste da razão de máxima verossimilhança, conforme Rao (1973), para grandes amostras, tem-se:

$$-2LnL = -NLn\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

$$\text{Então: } \chi_{cal}^2 = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right) = -600Ln\left(\frac{8,541}{30,0003}\right) = 753,80$$

Dado $\chi^2_{v;0,01} = \chi^2_{9,0,01} = 21,7$, tal que: $v = p_{\Omega} - p_{\omega} = 9$.

Como $\chi^2_{Cal} > \chi^2_{9,0,01}$, a hipótese $H_0^{(4)}$ foi significativa, conclui-se não ser recomendável usar uma única equação para estimar a tendência de crescimento para os quatro métodos, assim sendo, a equação V_{M1234} , cujas estimativas dos parâmetros estão apresentadas na tabela 7.7.4.2, considerando conjuntamente os quatro métodos de manejo, não pode ser usada para estimar o perfil de crescimento.

7.7.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES DO EXEMPLO DO INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO

Na tabela 7.7.5.1 estão os valores das estatísticas calculadas com o objetivo de medir o grau de precisão, adequação e validade das equações de crescimento dos métodos de manejo.

Dentre os resultados importantes para aferir conclusões, têm-se:

Tabela 7.7.5.1 - Valores das estatísticas indicativas de precisão e validade.

MMF	SQ _{erro}	$\bar{Y}_{MMF}$	RQMR	CV%	t_{oti}	r^2_{Mi}	$F_g(P_r > F)$	V_{oti}
M1	1150,6	125,088	2,7696	2,21	18,7	0,9698	2,30 (0,1036)	138,57
M2	1821,8	126,818	3,4850	2,75	19,5	0,9573	3,30 (0,0398)	141,49
M34	2188,2	133,900	2,7007	2,02	18,2	0,9819	2,75 (0,0658)	150,32
M1234	18000,2	134,600	5,4773	4,07	18,7	0,9152	27,70 (0,0001)	145,21

a) Concernentes aos testes de existência de interação entre os métodos de manejo e as ocasiões verificou-se os seguintes resultados:

- a1) Os métodos de manejo M3 e M4 são coincidentes;
- a2) Os métodos de manejo M1 e M2 não são paralelos

É recomendável estabelecer equações específicas V_{M1} e V_{M2} para os métodos M1 e M2 e uma equação única V_{M34} para os métodos M3 e M4.

b) Em relação aos valores dos ciclos de corte economicamente aconselhável, têm-se:

Os métodos de manejo M3 e M4 apresentaram o menor valor (18,2 anos) e 150,32 m³/ha, enquanto que o método M2 o valor (19,5 anos) e 141,49 m³/ha. O método M1 apresentou o valor (18,7 anos) e 138,57 m³/ha. Considerando todos os métodos (M1234), ou seja, uma equação única, o valor foi de 18,7 anos e 145,21 m³/ha. Então, é recomendável escolher, considerando o critério dos valores da rotação economicamente aconselhável, o método de manejo M3 ou o M4 que apresentaram perfis coincidentes.

c) Dado os valores dos coeficientes de variação (CV%) e das correlações ao quadrado (r_{Mi}^2) entre os valores estimados e observados, os métodos de manejo M3 e M4, conjuntamente apresentaram o menor valor de CV% e o maior de r_{Mi}^2 . O ideal é escolher o método de manejo M3 ou o M4, haja vista os valores do CV% e do r_{Mi}^2 .

d) No contexto do teste de validade de Graybill (F_G), o método M1 apresentou o valor não significativo de $F_G = 2,30$ (p -valor = 0,1036). Os métodos de manejos M3 e M4, considerados de forma conjunta, apresentaram $F_G = 2,75$ (p -valor = 0,0658) sendo também não significativos. O método M2, com $F_G = 3,30$ (p -valor = 0,0398), pode ser considerado não significativo ao nível $\alpha = 0,01$.

Por outro lado, os métodos M1, M2, M3, M4 apresentam o valor de $F_G = 27,70$ (p -valor < 0,0001), quando considerados de forma conjunta, denotando não ser recomendável estabelecer uma equação única para todos os métodos de manejo.

e) Os gráficos dos resíduos, relativos aos comportamentos das equações de crescimentos dos métodos de manejo estudados, apresentaram distribuições dos resíduos aleatórias, não mostrando nenhum tipo de tendência aparente, ou seja, revelando que a faixa de variação dos resíduos ao longo dos valores ajustados é constante, não havendo indícios de que as variâncias dos resíduos dos métodos de manejo sejam heteroscedásticas.

f) Uma equação única (V_{M1234}) não é recomendável, conforme o teste de validade de Graybill, assim como apresentou também, pelo teste da razão da máxima verossimilhança, para verificação de igualdade de parâmetros e identidade de modelos de regressão não linear, um valor altamente significativo de $\chi_{Cal}^2 = 753,80$.

g) É recomendável escolher o método M3 ou o M4, com perfis coincidentes, em função de apresentarem, conjuntamente, os seguintes indicadores:

- i) O menor ciclo de corte (18,2 anos) e a maior produção ($150,32 m^3 / ha$);
- ii) O menor CV = 2,02 % e o maior coeficiente de correlação ao quadrado ($r_{M34}^2 = 0,9819$) entre os valores estimados e observados;
- iii) resultado não significativo ($\alpha = 0,05$) para o teste de Graybill.

Capítulo 8

Análise de perfil de espécies em florestas naturais

Este capítulo aborda a análise do perfil de crescimento de espécies em inventários florestais com parcelas permanentes, expondo um exemplo de aplicação considerando os perfis de crescimento de quatro espécies florestais, envolvendo os seguintes temas: teste de esfericidade de matriz de covariância pelo critério de Mauchly; cálculo dos valores das correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ϵ_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ϵ_{hf}); teste de homogeneidade de matrizes de covariâncias; testes de multinormalidade de assimetria e de curtose de Mardia; teste de normalidade multivariada de Henze-Zirkler; análise de agrupamento pelo método de Ward; testes de paralelismo e de coincidência de perfis de crescimento pela hipótese linear geral $H: C\beta U = \phi$; análise de coincidência de perfis pelo teste “ t ” de Student; determinação do ciclo de corte economicamente aconselhável; análise de resíduos; teste de validade de Graybill; teste da razão da máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e identidade de modelos de regressão não linear.

8. INTRODUÇÃO

No exemplo de aplicação apresentado no capítulo 7, considerando os quatro métodos de manejo M1, M2, M3 e M4, foi verificado que o método de manejo M3 (ou o M4) deve ser o indicado para manejar a floresta em estudo.

É importante ressaltar que, para definição do melhor método de manejo, na análise do exemplo citado no capítulo anterior, os valores simulados dos volumes foram obtidos considerando várias espécies. Entretanto, como cada espécie dentro de uma floresta natural tem a sua própria dinâmica de crescimento, o recomendável é estudar o perfil de todas elas e, usando a análise multivariada de perfil construir grupos de espécies com perfis semelhantes, ou seja, coincidentes, e assim estabelecer um plano de corte policíclico. Neste capítulo, objetivando ter um melhor entendimento do tema, será apresentada uma aplicação com quatro espécies.

8.1. ANÁLISE DE PERFIL DE CRESCIMENTO DE QUATRO ESPÉCIES FLORESTAIS

Foram escolhidas, nesta aplicação, considerando tratar-se de uma floresta natural, quatro espécies caracterizadas como de boa ocorrência e de rápido crescimento, denominadas de E1, E2, E3 e E4, para estudar os seus perfis de crescimento e calcular os seus respectivos ciclos de cortes economicamente aconselháveis. Os dados (volume em m^3/ha) foram simulados, dentro de um contexto próximo ao real, e estão apresentados na tabela B2 do apêndice B.

Os programas usados nas análises são os mesmos usados no capítulo 7, obviamente adaptados, ou seja, trocando o banco de dados (B1) dos métodos de manejo M1, M2, M3 e M4 para o (B2) das espécies E1, E2, E3 e E4. Os programas construídos no SAS estão dispostos nas tabelas C7, C8, C9, C10, C11, C12 e C13 do apêndice C.

8.1.1. ANÁLISE DA INTERAÇÃO OCASIÃO×ESPÉCIE

a) Vetores de médias, para E1, E2, E3 e E4, considerando as ocasiões 0, 5, 10, 15 e 20 anos

Figura 8.1.1.1 - Perfis de crescimento das espécies E1, E2, E3 e E4.

$$\bar{y}'_{v1} = [9,6844966714, 415266717, 089190019, 445480021, 0381800]$$

$$\bar{y}'_{v2} = [9,7430533314, 446093317, 192783319, 560786721, 1482133]$$

$$\bar{y}'_{v3} = [9,67315333 \ 13,1066700 \ 16,253233 \ 17,7585900 \ 19,3376867]$$

$$\bar{y}'_{v4} = [9,7248333313, 205866716, 507890018, 122250019, 6947067]$$

b) Matrizes de covariâncias, para as espécies E1, E2, E3 e E4, considerando as ocasiões 0, 5, 10, 15 e 20 anos

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,02116377 & 0,01284834 & 0,00953389 & 0,00545315 & -0,00246514 \\ 0,01284834 & 0,03637208 & 0,04591649 & 0,05407382 & 0,05468861 \\ 0,00953389 & 0,04591649 & 0,07636850 & 0,09784063 & 0,10911020 \\ 0,00545315 & 0,05407382 & 0,09784063 & 0,13976266 & 0,15863031 \\ -0,00246514 & 0,05468861 & 0,10911020 & 0,15863031 & 0,19214423 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0,03646297 & 0,04560458 & 0,05474387 & 0,05517822 & 0,05146438 \\ 0,04560458 & 0,07333821 & 0,09644924 & 0,10125858 & 0,09653067 \\ 0,05474387 & 0,09644924 & 0,14576223 & 0,15577815 & 0,15673012 \\ 0,05517822 & 0,10125858 & 0,15577815 & 0,18148101 & 0,18653086 \\ 0,05146438 & 0,09653067 & 0,15673012 & 0,18653086 & 0,20608829 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0,02139458 & 0,02052219 & 0,02527012 & 0,03050280 & 0,03191725 \\ 0,02052219 & 0,04193350 & 0,04921580 & 0,05883239 & 0,06282835 \\ 0,02527012 & 0,04921580 & 0,06604163 & 0,07798079 & 0,08242055 \\ 0,03050280 & 0,05883239 & 0,07798079 & 0,09932675 & 0,10520135 \\ 0,03191725 & 0,06282835 & 0,08242055 & 0,10520135 & 0,12296290 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0,02750088 & 0,03008828 & 0,03433776 & 0,03940853 & 0,04354558 \\ 0,03008828 & 0,06821718 & 0,09510694 & 0,10908753 & 0,11828130 \\ 0,03433776 & 0,09510694 & 0,15067941 & 0,17067383 & 0,18980145 \\ 0,03940853 & 0,10908753 & 0,17067383 & 0,20539926 & 0,22770458 \\ 0,04354558 & 0,11828130 & 0,18980145 & 0,22770458 & 0,26214444 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \begin{bmatrix} 0,0266305 & 0,0272658 & 0,0309714 & 0,0326357 & 0,0311155 \\ 0,0272658 & 0,0549652 & 0,0716721 & 0,0808131 & 0,0830822 \\ 0,0309714 & 0,0716721 & 0,1097129 & 0,1255684 & 0,1345156 \\ 0,0326357 & 0,0808131 & 0,1255684 & 0,1564924 & 0,1695168 \\ 0,0311155 & 0,0830822 & 0,1345156 & 0,1695168 & 0,1958350 \end{bmatrix}$$

c) Teste de esfericidade da matriz de covariância pelo critério de Mauchly e as correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ε_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ε_{hf}).

A Tabela 8.1.1.1 mostra o resultado do teste de esfericidade pelo critério de Mauchly, o qual apresentou um resultado altamente significativo (p -valor $< 0,0001$), denotando que a matriz do erro (S) não é esférica, concluindo-se pela não realização da análise univariada de parcelas subdivididas (*split-plot*), mas caso seja o desejo do pesquisador, então deve ser usado a correção de Greenhouse-Geisser Epsilon ($\hat{\varepsilon}_{gg} = 0,3336$) ou a de Huynh-Feldt Epsilon ($\hat{\varepsilon}_{hf} = 0,3448$), e assim corrigir os graus de liberdade do teste F , para a igualdade de efeitos de ocasião e igualdade de paralelismo (interação de ocasião×espécie).

Tabela 8.1.1.1 - Teste de esfericidade pelo critério de Mauchly e os valores das correções de Greenhouse-Geisser Epsilon (ε_{gg}) e de Huynh-Feldt Epsilon (ε_{hf}).

Variáveis	GL	Critério de Mauchly	Qui-Quadrado	Pr $> \chi^2$
Variáveis Transformadas	9	0,0135191	492,40987	$< 0,0001$
Componentes Ortogonais	9	0,0135191	492,40987	$< 0,0001$
Greenhouse-Geisser Epsilon	$\hat{\varepsilon}_{gg} = 0,3336$			
Huynh-Feldt Epsilon	$\hat{\varepsilon}_{hf} = 0,3448$			

d) Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias para E1, E2, E3 e E4

$$M = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S| - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \ln |S_i|$$

$$\ln(\det S_1) = -20,96756 \quad \ln(\det S_2) = -20,39542 \quad \ln(\det S_3) = -21,87350$$

$$\ln(\det S_4) = -20,49219 \quad \ln(\det S) = -20,40534$$

$$M = 4 \times 29 \times -20,40534 - 29(-20,96756 - 20,39542 - 21,87350 - 20,49219)$$

$$M = 4 \times 29 \times -20,40534 - 29(-83,72867) = 61,11169$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g + 1)}{6(p + 1)g \times (n - 1)} = 1 - \frac{(2 \times 5^2 + 3 \times 5 - 1)(4 + 1)}{6(5 + 1)4(29)} = 0,9233716475$$

$$MC^{-1} = 61,11169 \times 0,9233716475 = 56,4288$$

$$\frac{1}{2}(g - 1)p(p + 1) = \frac{1}{2}(4 - 1) \times 5 \times (5 + 1) = 45$$

Tabela 8.1.1.2 - Estatística de qui-quadrado χ^2 (assintótico).

Qui-Quadrado	DF	Pr > χ^2
56,428804	45	0,1181

Desde que $\chi^2_{CAL} = 56,43$ (p -valor = 0,1181), tabela 8.1.1.2, conclui-se pela não rejeição de $H_0 : \Sigma_{E1} = \Sigma_{E2} = \Sigma_{E3} = \Sigma_{E4} = \Sigma$, ou seja, as matrizes de covariâncias das espécies E1, E2, E3 e E4 podem ser consideradas homogêneas.

e) Testes de multinormalidade de Mardia e de Henze-Zirkler

A tabela 8.1.1.3 expõe os resultados dos testes de multinormalidade de Mardia Skewness, de Mardia Kurtosis e de Henze-Zirkler, para o conjunto das cinco ocasiões, considerando as espécies E1, E2, E3 e E4. A análise foi realizada através do programa: % Multinorm Macro: Mardia Tests of Multivariate Normality, Version 1.1, disponível pelo SAS Institute Inc. como um serviço para seus usuários, em:

<http://homepages.wmich.edu/~applegab/EMR675/SASFiles/multnorm.sas>

Os testes de Mardia Skewness (p -valor = 0,3625) e de Kurtosis (p -valor = 0,1026) foram não significativos, enquanto que o de Henze-Zirkler foi significativo (p -valor < 0,0001). Usando como critério os testes de multinormalidade de Mardia Skewness e de Kurtosis, as populações das quatro espécies, com respeito às cinco ocasiões, serão consideradas multinormais. A Figura 8.1.1.2 do “Gráfico Qui-Quadrado Q-Q” apresenta uma configuração linear sem valores discrepantes dos “Quantil Qui-Quadrado” versus as “Distâncias Quadradas”, indicando aderência dos dados à normalidade multivariada.

Tabela 8.1.1.3 - Testes de multinormalidade para as cinco ocasiões (variáveis).

Equações	Estatísticas do Teste	Valores	Prob.
System	Mardia Skewness	37,33	0,3625
	Mardia Kurtosis	-1,63	0,1026
	Henze-Zirkler T	7,50	< 0,0001

Figura 8.1.1.2 - Gráfico Multnorm Macro Qui-Quadrado Q-Q para E1, E2, E3 e E4.

f) Teste de existência de interação Ocasão×Espécie para E1, E2, E3 e E4**Tabela 8.1.1.4** - Teste da interação Ocasão×Espécie para E1, E2, E3 e E4.

Testes e aproximações das estatísticas F para a hipótese de não existência de efeito da interação Ocasão×Espécie (S = 3; M = 0; N* = 55,5)					
Estatísticas	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,01633596	93,16	12	299,26	< 0,0001
Pillai Trace	1,20021028	19,17	12	345,00	< 0,0001
Hotelling-Lawley Trace	46,9596533	438,91	12	193,48	< 0,0001
Roy Greatest Root	46,67569000	1341,93	4	115,00	< 0,0001

Os testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root apresentaram resultados significativos (p -valor < 0,0001) para a interação ocasião×espécie, mostrando que existem pelo menos duas espécies que apresentam perfis de crescimento não paralelos. Essas estatísticas estão transformadas na F de Snedecor. Os valores, respectivamente, estão expostos na tabela 8.1.1.4 com os seus graus de liberdade.

Com efeito, como a interação foi significativa, considerando todas as quatro espécies florestais, então o próximo passo será verificar quais perfis de crescimento são paralelos ou coincidentes. Pode-se realizar um estudo preliminar testando, por exemplo, cada ocasião separadamente pelo teste F , ou realizar um teste de comparação múltipla, por exemplo, o teste de Tukey. Optou-se pelo uso da técnica de análise de agrupamento de Ward. Os grupos foram agrupados utilizando as ocasiões como variáveis.

g) Análise de agrupamento (método de Ward) das quatro espécies florestais (objetos)**Tabela 8.1.1.5** - Vetores de médias das quatro espécies E1, E2, E3 e E4.

ESP.	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
E1	9,68449667	14,4152667	17,0891900	19,4454800	21,0381800
E2	9,74305333	14,4460933	17,1927833	19,5607867	21,1482133
E3	9,67315333	13,1066700	16,2523233	17,7585900	19,3376867
E4	9,72483333	13,2058667	16,5078900	18,1222500	19,6947067

Cálculo da matriz de distância ao quadrado considerando os $g(g-1)/2 = 6$ pares de objetos ou indivíduos. As espécies foram agrupadas utilizando as ocasiões como variáveis.

$$\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,0405137 & 8,1501752 & 5,3580432 \\ & 0 & 9,2093253 & 6,1896421 \\ & \textit{Simétrica} & 0 & 0,337537 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Da matriz de distâncias ao quadrado, considera-se o par (E1, E2) como o primeiro grupo formado, pois apresentou a menor distância ao quadrado (0,0405137). O processo continua seguindo o princípio da soma de quadrados mínima. É importante observar, na tabela 8.1.1.6, que $SQE_{li} = 0,5d(C_i, C_i)$. O gráfico 8.1.1.3 foi construído considerando as distâncias, isto é, $\sqrt{d(C_i, C_i)}$. PPI (SPRSQ) é a porcentagem de perda de informação.

Tabela 8.1.1.6 - Análise de agrupamento de Ward no SAS (Proc IML).

ETAPA	FUSÃO	SQE_{li}	$SQE (Ac.)$	PPI	$d(C_i, C_j)$
1	(E1 e E2)	0,0202568	0,0202568	0,0028	0,0405137
2	(E3, E4)	0,1687685	0,1890253	0,0231	0,337537
3	(E1, E2) e (E3, E4)	7,1322838	7,3213091	0,9742	14,264568

$$PPI = \frac{SQE_{li}}{SQTotal} = \frac{SQE_{li}}{7,3213091}$$

Tabela 8.1.1.7 - Análise de agrupamento de Ward no SAS (Proc cluster method)

NCL	FUSÃO		FREQ	SPRSQ	SPRSR (Ac.)	RSQ
3	E1	E2	2	0,0028	0,0028	0,9972
2	E3	E4	2	0,0231	0,0259	0,9741
1	CL3	CL2	4	0,9742	1,000	0,0000

$$RSQ = 1 - SPRSR(Ac.)$$

Figura 8.1.1.3 - Dendrograma das quatro espécies florestais.

h) Testes de existência de interação Ocasão×Espécie para E1 e E2

A partir do dendrograma ou fenograma, resultado da análise de agrupamento, foi realizado o teste para verificar se os perfis de crescimentos das espécies E1 e E2 são paralelos.

A Tabela 8.1.1.8 mostra os resultados dos testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root, os quais deram não significativos (p -valor = 0,0904), denotando não existir interação entre os perfis de crescimento das espécies E1 e E2, ou seja, os seus perfis são paralelos. O próximo passo será testar se os perfis de crescimento são coincidentes.

Tabela 8.1.1.8 - Teste de existência de interação de Ocasão×Espécie para E1 e E2.

Testes e estatísticas exatas de F para a hipótese de não existência de efeito da interação Ocasão×Espécie ($S=1$; $M=1$; $N^* = 26,5$).					
Estatísticas	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,86631212	2,12	4	55	0,0904
Pillai Trace	0,13368788	2,12	4	55	0,0904
Hotelling-Lawley Trace	0,15431838	2,12	4	55	0,0904
Roy Greatest Root	0,15431838	2,12	4	55	0,0904

i) Teste de coincidência dos perfis de crescimento de E1 e E2 pelo teste “t” de Student

A verificação da coincidência, entre as espécies E1 e E2, poderá ser feito pelo teste “t” de Student segundo a hipótese H_{02} :

$H_{02} = j'\mu_{v1} = j'\mu_{v2}$, tal que $j' = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Esta hipótese pode ser escrita da forma:

$$H_{02} : \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{25}$$

$$t = \frac{j'(\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})}{\sqrt{j'Sj\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \text{ com } n_1 + n_2 - 2 = 58 \text{ graus de liberdade.}$$

$$\bar{y}'_{v1} = [9,6844966714, 415266717, 089190019, 445480021, 0381800]$$

$$\bar{y}'_{v2} = [9,7430533314, 446093317, 192783319, 560786721, 1482133]$$

$$j'(\bar{y}_{v2} - \bar{y}_{v3}) = 0,418316 \quad j'Sj = 2,10037$$

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \begin{bmatrix} 0,0288134 & 0,0292265 & 0,0321389 & 0,0303157 & 0,0244996 \\ 0,0292265 & 0,0548551 & 0,0711829 & 0,0776662 & 0,0756096 \\ 0,0321389 & 0,0711829 & 0,1110654 & 0,1268094 & 0,1329202 \\ 0,0303157 & 0,0776662 & 0,1268094 & 0,1606218 & 0,1725806 \\ 0,0244996 & 0,0756096 & 0,1329202 & 0,1725806 & 0,1991163 \end{bmatrix}$$

As matrizes S_1 e S_2 estão apresentadas na seção 8.1.1.

$$t_{CAL} = \frac{j'(\bar{x}_{v2} - \bar{\mu}_{v3})}{\sqrt{j'Sj\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}} = \frac{0,418316}{\sqrt{2,10037 \times \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right)}} = \frac{0,418316}{0,3741987} = 1,1178993$$

Dado que $t_{58;0,05} \cong 2,0$, conclui-se pela não rejeição de H_{02} , então há razão para aceitar a coincidência dos perfis de crescimento das espécies E1 e E2. Neste caso, será estimada uma única equação de crescimento para ambos os métodos.

j) Teste de coincidência dos perfis de E1 e E2 pela hipótese linear ($H_{02}: C_2\beta U_2 = \phi$)

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U'_2 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

De acordo com a tabela 8.1.1.9, sendo $F_{Cal} = 1,25 < F_{1;58;0,05} \cong 4,0$, conclui-se pela não rejeição de H_{02} , então há razão para aceitar a coincidência dos perfis de crescimento das espécies E1 e E2.

É importante observar que, no teste de coincidência dos perfis, para a hipótese linear $H_{02}: C_2\beta U_2 = \phi$, o valor da estatística $F_{1;58}$ foi 1,25, enquanto que o valor de t_{58} , no teste de coincidência “t” de Student, foi de 1,1178993, ou seja, $F_{1;58} = t_{58}^2 = 1,25$. Este resultado é devido à relação, $F_{1;n;\alpha} = t_{n;\alpha}^2$, existente entre as funções densidades de F e “t” de Student.

Tabela 8.1.1.9 - Teste de coincidência de perfis ($H_{02}: C_2\beta U_2 = \phi$) para E1 e E2.

Testes e estatísticas exatas de F para a hipótese de coincidência de perfis das espécies E1 e E2 (S = 1; M = - 0,5; $N^* = 28$)					
Estatísticas	Valores	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,97890792	1,25	1	58	0,2682
Pillai Trace	0,02109208	1,25	1	58	0,2682
Hotelling-Lawley trace	0,02154654	1,25	1	58	0,2682
Roy Greatest Root	0,02154654	1,25	1	58	0,2682

A aceitação de coincidência dos perfis de crescimento das espécies E1 e E2, obtidas pelo teste “t” de Student e pela hipótese linear $H_{02}: C_2\beta U_2 = \phi$, também foram confirmadas, na seção 8.1.3, pelo teste da razão da máxima verossimilhança para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão, para as equações de crescimento das espécies E1 e E2.

k) Testes de existência de interação Ocasão×Espécie para E3 e E4

A Tabela 8.1.1.10 apresenta os resultados dos testes de Wilks Lambda, Pillai Trace, Hotelling-Lawley Trace e de Roy Greatest Root, os quais deram significativos (p -valor < 0, 0001), denotando existir interação entre os perfis de crescimento das espécies E3 e

E4, ou seja, os seus perfis não são paralelos. Destarte, as equações de crescimento desses métodos devem ser obtidas separadamente.

Tabela 8.1.1.10 - Teste de existência de interação Ocasão×Espécie para E3 e E4.

Testes e as estatísticas exatas de F para a hipótese de ausência de efeito da interação Ocasão×Espécie ($S=1$; $M=1$; $N^*=26,5$)					
Estatísticas	Valor	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0.61481030	8.61	4	55	< 0,0001
Pillai Trace	0.38518970	8.61	4	55	< 0,0001
Hotelling-Lawley Trace	0.62651797	8.61	4	55	< 0,0001
Roy Greatest Root	0.62651797	8.61	4	55	< 0,0001

8.1.2. CICLO DE CORTE ECONOMICAMENTE ACONSELHÁVEL PARA E1, E2, E3 E E4

a) Estimativa do ciclo de corte do grupo formado pelas espécies (E1, E2)

Como houve coincidência dos perfis de crescimento das espécies E1 e E2, então será obtida uma única equação para ambas as espécies (V_{E12}).

Seja a equação de Mitscherlich (V) e a fórmula para obter o ciclo de corte economicamente aconselhável (t_{oti}):

$$V = \beta_0 [1 - 10^{-\beta_1(t+\beta_2)}] \quad t_{oti} = \frac{1}{\beta_1} \log_{10} [2,302585R\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1] - \hat{\beta}_2$$

Nesta análise será utilizada uma razão de custo $R = 3$ que é o quociente entre a receita obtida pela venda da madeira e o custo do manejo florestal (por ha). Da Tabela 8.1.2.1 da análise de regressão para o grupo formado pelas espécies E1 e E2:

$$V_{E12} = 24,591 [1 - 10^{-0,0310(t+7,0978)}]$$

$$t_{oti(E12)} = \left(\frac{1}{0,0310} \right) \log(2,302585 \times 3 \times 24,591 \times 0,0310) - 7,0978 = 16,2 \text{ anos}$$

$$V_{oti(E12)} = 24,591 [1 - 10^{-0,0310(16,2+7,0978)}] = 19,929 m^3 / ha$$

$$RQMR_{E12} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{38,0422}{2 \times 150}} = 0,3561$$

$$CV_{E12} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{E12}} \times 100 = \frac{0,3561}{16,3764} \times 100 = 2,17\%$$

Tabela 8.1.2.1 - Análise de regressão do grupo formado (E1, E2).

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	24,5911	0,2105	24,1769	25,0053
$\hat{\beta}_1$	0,0310	0,000824	0,0294	0,0326
$\hat{\beta}_2$	7,0978	0,1406	6,8212	7,3745
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	297	38,0422	0,1281	221975,0
Teste de validade de Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	0,14828	1,17	0,3116
Denominador	298	0,12666		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 300, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{E12} = 0,99609 (< 0,0001)$			$r_{E12}^2 = 0,9922$

Figura 8.1.2.1 - Distribuição dos resíduos da equação conjunta do grupo (E1, E2).

b) Estimativa do ciclo de corte para a espécie E3

De acordo com a tabela 8.1.2.2:

$$V_{E3} = 23,0163 [1 - 10^{-0,0279(t_i + 8,4227)}]$$

$$t_{Oti(E3)} = \left(\frac{1}{0,0279} \right) \log(2,302585 \times 3 \times 23,0163 \times 0,0279) - 8,4227 = 14,8 \text{ anos}$$

$$V_{oti(E3)} = 23,0163 [1 - 10^{-0,0279(14,8 + 8,4227)}] = 17,839 m^3 / ha$$

$$RQMR_{E3} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{14,4743}{150}} = 0,310637$$

$$CV_{E3} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{E3}} \times 100 = \frac{0,310637}{15,2257} \times 100 = 2,04\%$$

Tabela 8.1.2.2 - Análise de regressão da equação de Mitscherlich para E3.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	23,0163	0,3167	22,3904	23,6422
$\hat{\beta}_1$	0,0279	0,00117	0,0256	0,0302
$\hat{\beta}_2$	8,4227	0,2463	7,9360	8,9094
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	147	14,4743	0,0985	9072,78
Teste de validade de Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	0,05816	0,60	0,5504
Denominador	148	0,09701		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 150, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{E3} = 0,99597 (< 0,0001)$			$r_{E3}^2 = 0,9920$

Figura 8.1.2.2 - Gráfico dos resíduos da equação de Mitscherlich para E3.

c) Determinação do ciclo de corte para a espécie E4

De acordo com a tabela 8.1.2.3:

$$V_{E4} = 23,6604[1 - 10^{-0,0274(t+8,3068)}]$$

$$t_{Oti(E4)} = \left(\frac{1}{0,0274}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 23,6604 \times 0,0274 - 8,3068) = 15,5 \text{ anos}$$

$$V_{oti(E4)} = 23,6604[1 - 10^{-0,0274(15,5+8,3068)}] = 18,392m^3 / ha$$

$$RQMR_{E4} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{25,5569}{150}} = 0,41277$$

$$CV_{E4} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{E4}} \times 100 = \frac{0,41277}{15,4511} \times 100 = 2,67\%$$

Tabela 8.1.2.3 - Análise de regressão da equação de Mitscherlich para E4.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	23,6604	0,4351	22,8006	24,5203
$\hat{\beta}_1$	0,0274	0,00150	0,0245	0,0304
$\hat{\beta}_2$	8,3068	0,3137	7,6869	8,9268
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	147	25,5569	0,1739	5515,72
Teste de validade de Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	0,16804	0,99	0,3755
Denominador	148	0,17041		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 150, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{E4} = 0,99340 (< 0,0001)$			$r_{E4}^2 = 0,9868$

Figura 8.1.2.3 - Gráfico dos resíduos da equação de Mitscherlich para (E4).

d) Estimativa do ciclo de corte do grupo formado pelas espécies (E1, E2, E3, E4)

De acordo com a tabela 8.1.2.4:

$$V_{E1234} = 23,952Q1 - 10^{-0,0294(t+7,6796)}]$$

$$t_{oti(E1234)} = \left(\frac{1}{0,0294}\right) \log(2,302585 \times 3 \times 23,9520 \times 0,0294) - 7,6796 = 15,7 \text{ anos}$$

$$V_{oti(M1234)} = 23,952Q1 - 10^{-0,0294(15,7+7,6796)}] = 19,032m^3 / ha$$

$$RQMR_{E1234} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{283,7}{4 \times 150}} = 0,68763$$

$$CV_{E1234} = \frac{RQMR}{\bar{Y}_{E1234}} \times 100 = \frac{0,68763}{15,8574} \times 100 = 4,34\%$$

Tabela 8.1.2.4 - Análise de regressão da equação de Mitscherlich para (E1, E2, E3, E4).

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	23,9520	0,3161	23,3311	24,5729
$\hat{\beta}_1$	0,0294	0,00119	0,0271	0,0317
$\hat{\beta}_2$	7,6796	0,2235	7,2406	8,1185
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	597	283,7	0,4752	8950,77
Teste de validade de Graybill F_G				
Fonte	GL	Quadrado Médio	Valor F_G	Pr > F
Numerador	2	4,57751	9,97	< 0,0001
Denominador	598	0,45906		
Coeficiente de correlação de Pearson, N = 600, Prob > r Sob H0: Rho=0				
$r_{E4} = 0,98373 (< 0,0001)$			$r_{E4}^2 = 0,9677$

Figura 8.1.2.4 - Gráfico dos resíduos considerando (E1, E2, E3 e E4).

e) Observações sobre os resultados dos ciclos de corte para as quatro espécies

Os ciclos de cortes foram os seguintes para as quatro espécies consideradas de crescimento rápido, grupo $(E1+E2) = 16,2$ anos, $E3 = 14,8$ anos e $E4 = 15,5$ anos. No capítulo 7 foi recomendado o uso do método de manejo (M3 ou o M4), os quais apresentaram, considerando todas as espécies ocorrentes na área, um ciclo de corte economicamente recomendável de 18,2 anos.

Esses resultados denotam a necessidade de estabelecer várias colheitas em diferentes datas. Evidentemente que, usando dados reais de uma floresta natural amazônica e considerando todas as espécies, em diferentes idades ou estágios de desenvolvimento, obviamente que os resultados seriam equivalentes a essa situação exposta, o que cria a necessidade de estabelecer um sistema de manejo policíclico, ou seja, manejar a floresta por grupo de espécies com perfis de crescimento semelhantes.

8.1.3. TESTE DA RAZÃO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA PARA VERIFICAR A IGUALDADE DE PARÂMETROS E A IDENTIDADE DE MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEAR

a) Verificar se as duas equações de crescimento das espécies E1 e E2 diferem estatisticamente, ou seja, se os seus perfis de crescimento são coincidentes.

$$H_0^{(4)} : \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0, \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_1, \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_2$$

versus $H_A^{(4)} : \text{pelo menos uma igualdade não ocorre.}$

No caso da hipótese H_0^4 não ser rejeitada, uma única equação de crescimento deverá ser obtida considerando, conjuntamente, as duas espécies E1 e E2.

Da Tabela 8.1.3.1 que expõe a análise de variância referente ao modelo completo (Ω):

$$SQRR_{\Omega} = 37,4623 \quad QMRR_{\Omega} = 0,1274 \quad N=300$$

$p_{\Omega} = 6$ (número de parâmetros do modelo sem restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N} = \frac{N - p_{\Omega}}{N} \times MQRR_{\Omega} = \frac{37,4623}{300} = \left(\frac{300-6}{300}\right) \times 0,1274 = 0,1249$$

Tabela 8.1.3.1 - Modelo completo ômega (Ω) para E1 e E2.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_{01}$	24,4837	0,2941	23,9048	25,0625
$\hat{\beta}_{11}$	0,0312	0,00117	0,0289	0,0335
$\hat{\beta}_{21}$	7,0789	0,1981	6,6891	7,4687
$\hat{\beta}_{02}$	24,6987	0,2996	24,1090	25,2884
$\hat{\beta}_{12}$	0,0308	0,00116	0,0286	0,0331
$\hat{\beta}_{22}$	7,1166	0,1985	6,7260	7,5072
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	294	37,4623	0,1274	7600.59

Da Tabela 8.1.3.2 que mostra a análise de variância do modelo com restrição (ω):

$$SQRR_{\omega} = 38,0422 \quad MQRR_{\omega} = 0,1281 \quad N=300$$

$p_{\omega} = 3$ (número de parâmetros do modelo com restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N} = \frac{N - p_{\omega}}{N} \times MQRR_{\omega} = \frac{38,0422}{300} = \left(\frac{300-3}{300}\right) \times 0,1281 = 0,1268$$

Tabela 8.1.3.2 - Modelo com restrição (ω) para E1 e E2.

$H_0^4: \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0; \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_1; \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_2$				
Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	24,5911	0,2105	24,1769	25,0053
$\hat{\beta}_1$	0,0310	0,000824	0,0294	0,0326
$\hat{\beta}_2$	7,0978	0,1406	6,8212	7,3745
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	297	38,0422	0,1281	18900,5

Do teste da razão de máxima verossimilhança, conforme Rao (1973), para grandes amostras, tem-se:

$$-2LnL = -NLn\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

$$\chi_{cal}^2 = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right) = -300Ln\left(\frac{0,1249}{0,1268}\right) = 4,5293$$

Dado $\chi_{v;0,01}^2 = \chi_{3,0,01}^2 = 11,3$, donde $v = p_{\Omega} - p_{\omega} = 3$.

Como $\chi_{cal}^2 < \chi_{3,0,01}^2$, a hipótese H_0^4 foi não significativa, conclui-se que as duas equações não diferem estatisticamente, assim sendo, a equação comum, cujas estimativas estão mostradas na tabela 8.1.3.2, deverá ser usada para estimar a curva de crescimento para o grupo (E1, E2).

$$V_{E12} = 15,2298[1 - 10^{-0,0816(t+5,4118)}]$$

b) Verificar se as duas equações de crescimento das espécies E3 e E4 diferem estatisticamente, ou seja, se os seus perfis de crescimento são coincidentes.

Da Tabela 8.1.3.3 que mostra a análise de variância referente ao modelo completo (Ω):

$$SQRR_{\Omega} = 40,0312 \quad MQRR_{\Omega} = 0,1362 \quad N=300$$

$p_{\Omega} = 6$ (número de parâmetros do modelo sem restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N} = \frac{N - p_{\Omega}}{N} \times MQRR_{\Omega} = \frac{40,0312}{300} = \left(\frac{300-6}{300}\right) \times 0,1362 = 0,1334$$

Tabela 8.1.3.3 - Modelo completo ômega (Ω) para E3 e E4.

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_{03}$	23,0163	0,3724	22,2833	23,7493
$\hat{\beta}_{13}$	0,0279	0,00138	0,0252	0,0306
$\hat{\beta}_{23}$	8,4227	0,2896	7,8527	8,9927
$\hat{\beta}_{04}$	23,6604	0,3850	22,9027	24,4182
$\hat{\beta}_{14}$	0,0274	0,00133	0,0248	0,0300
$\hat{\beta}_{24}$	8,3068	0,2776	7,7605	8,8532
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	294	40,0312	0,1362	5447,09

Da Tabela 8.1.3.4 que expõe a análise de variância referente ao modelo com restrição (ω):

$$SQRR_{\omega} = 45,0135 \quad MQRR_{\omega} = 0,1516 \quad N=300$$

$p_{\omega} = 3$ (número de parâmetros do modelo com restrição), então:

$$\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N} = \frac{N - p_{\omega}}{N} \times MQRR_{\omega} = \frac{45,0135}{300} = \left(\frac{300-3}{300}\right) \times 0,1516 = 0,1516$$

Tabela 8.1.3.4 - Modelo com restrição (ω) para (E3, E4).

$H_0^4: \beta_{03} = \beta_{04} = \beta_0; \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_1; \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_2$				
Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limites de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	23,3381	0,2826	22,7820	23,8942
$\hat{\beta}_1$	0,0277	0,00101	0,0257	0,0297
$\hat{\beta}_2$	8,3648	0,2115	7,9485	8,7811
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	297	45,0135	0,1516	163374,0

Do teste da razão de máxima verossimilhança, conforme Rao (1973), para grandes amostras, tem-se:

$$-2LnL = -NLn\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

$$\chi_{Cal}^2 = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -NLn\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right) = -300Ln\left(\frac{0,1362}{0,1516}\right) = 32,14$$

Dado que $\chi_{v;0,01}^2 = \chi_{3,0,01}^2 = 11,3$, onde $v = p_{\Omega} - p_{\omega} = 3$, e como $\chi_{Cal}^2 > \chi_{3,0,01}^2$, o teste H_0^4 foi significativo, então conclui-se que as duas equações diferem estatisticamente, assim sendo, não é recomendável ajustar uma equação única para as espécies E3 e E4.

c) Verificar se as equações de crescimento das espécies E1, E2, E3 e E4 diferem estatisticamente, isto é, os seus perfis de crescimento são coincidentes.

Tabela 8.1.3.5 - Modelo completo ômega (Ω) para grupo (E1, E2, E3, E4).

Parâmetros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limite de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_{01}$	24,4837	0,2991	23,8962	25,0711
$\hat{\beta}_{11}$	0,0312	0,00119	0,0288	0,0335
$\hat{\beta}_{21}$	7,0789	0,2014	6,6832	7,4746
$\hat{\beta}_{02}$	24,6987	0,3047	24,1002	25,2971
$\hat{\beta}_{12}$	0,0308	0,00118	0,0285	0,0332
$\hat{\beta}_{22}$	7,1166	0,2018	6,7202	7,5130
$\hat{\beta}_{03}$	23,0163	0,3664	22,2966	23,7359
$\hat{\beta}_{13}$	0,0279	0,00135	0,0253	0,0306
$\hat{\beta}_{23}$	8,4227	0,2849	7,8631	8,9823
$\hat{\beta}_{04}$	23,6604	0,3788	22,9165	24,4044
$\hat{\beta}_{14}$	0,0274	0,00130	0,0249	0,0300
$\hat{\beta}_{24}$	8,3068	0,2731	7,7704	8,8432
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	588	77,4935	0,1318	6009,79

Da Tabela 8.1.3.5 que mostra a análise de variância referente ao modelo completo (Ω):

$$SQRR_{\Omega} = 77,4935 \quad QMRR_{\Omega} = 0,1318 \quad N=600$$

$p_{\Omega} = 12$ (número de parâmetros do modelo sem restrição). Então:

$$\hat{\sigma}_{\Omega}^2 = \frac{SQRR_{\Omega}}{N} = \frac{N - p_{\Omega}}{N} \times QMRR_{\Omega} = \frac{77,4935}{600} = \left(\frac{600-12}{600}\right) \times 0,1318 = 0,12916$$

Tabela 8.1.3.6 - Modelo com restrição (ω) para o grupo (E1, E2, E3, E4).

$H_0^4: \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} = \beta_0; \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_1; \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_2$				
Parametros	Estimativas	Erro Padrão Aprox.	Limite de Confiança (95%)	
$\hat{\beta}_0$	23,9520	0,3161	23,3311	24,5729
$\hat{\beta}_1$	0,0294	0,00119	0,0271	0,0317
$\hat{\beta}_2$	7,6795	0,2235	7,2406	8,1185
Fonte	GL	Soma de quadrados	Quadrado Médio	Valor F
Erro	597	283,7	0,4752	111806,0

Da Tabela 8.1.3.6 que apresenta a análise de variância referente ao modelo com restrição (ω):

$$SQRR_{\omega} = 283,7 \quad MQRR_{\omega} = 0,4752 \quad N=600$$

$p_{\omega} = 3$ (número de parâmetros do modelo com restrição), então:

$\hat{\sigma}_{\omega}^2 = \frac{SQRR_{\omega}}{N} = \frac{N - p_{\omega}}{N} \times MQRR_{\omega} = \frac{283,7}{600} = \left(\frac{600-3}{600}\right) \times 0,4752 = 0,4728$ Do teste da razão de máxima verossimilhança, conforme Rao (1973), para grandes amostras:

$$-2\ln L = -N \ln\left(\frac{\hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\omega}^2}\right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi_v^2$$

$$\chi_{Cal}^2 = -N \ln\left(\frac{SQRR_{\Omega} / N}{SQRR_{\omega} / N}\right) = -N \ln\left(\frac{SQRR_{\Omega}}{SQRR_{\omega}}\right) = -600 \times \ln\left(\frac{0,12916}{0,4752}\right) = 390,81$$

Dado que $\chi_{v;0,01}^2 = \chi_{9,0,01}^2 = 21,7$, onde $v = p_{\Omega} - p_{\omega} = 12 - 3 = 9$, e como $\chi_{Cal}^2 > \chi_{9,0,01}^2$, então $H_0^{(4)}$ foi significativa, conclui-se não ser recomendável usar uma equação única para estimar a tendência de crescimento para as quatro espécies, assim sendo a equação V_{E1234} , cujas estimativas dos parâmetros estão apresentadas na tabela 8.1.3.6, não deverá ser usada para estimar o perfil de crescimento considerando as quatro espécies.

$$V_{E1234} = 23,9520[1 - 10^{-0,0294(t+7,6795)}]$$

8.1.4. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA ANÁLISE DO IFC PARA AS ESPÉCIES E1, E2, E3 E E4

Na tabela 8.1.4.1 estão os valores das estatísticas calculadas com o objetivo de medir o grau de precisão, adequação e validade das equações de crescimento das espécies.

Tabela 8.1.4.1 - Valores das estatísticas de precisão, adequação e validade.

ESP	SQerro	$\bar{Y}_{Ei}$	RQMR	CV%	t_{oti}	r^2_{Ei}	$F_g(P_r > F)$	V_{oti}
E12	38,0422	16,3764	0,3561	2,17	16,2	0,9922	1,17 (0,3116)	19,929
E3	14,4743	15,2257	0,3106	2,04	14,8	0,9920	0,60 (0,5504)	17,839
E4	25,5569	15,4511	0,4128	2,67	15,5	0,9868	0,99 (0,3755)	18,392
E1234	283,700	15,8574	0,6876	4,34	15,7	0,9677	9,97 (0,0001)	19,032

a) Como citado no capítulo 6, seção 6.7, sobre a interpretação, no caso do manejo florestal, do coeficiente (β_1) da equação de Mitscherlich, o qual poderia ser expresso como uma característica específica da eficácia da espécie, ou seja, o coeficiente β_1 refletiria uma medida própria do grau de aceleração do crescimento da espécie.

Pode ser observado na tabela 8.1.4.2 que a equação conjunta de (E1, E2), espécies com perfis de crescimento coincidentes, apresentou o maior valor para o coeficiente β_1 (0,0310), resultando na maior produção de madeira (19,929 m³/ha) no ciclo de corte economicamente aconselhável, correspondendo a um crescimento de 203 % em relação ao volume medido logo após a exploração florestal (tempo zero). Destarte, as espécies E1 e E2 possuem um crescimento mais acelerado que as espécies E3 e E4. A mesma interpretação pode ser feita comparando a espécie E4 (190,6%) com a espécie E3 (185,5 %), onde a espécie E4 cresce mais rapidamente que a espécie E3.

Tabela 8.1.4.2 – Análise do comportamento do coeficiente ($\hat{\beta}_1$).

Espécies	$V(t=0)$	V_{oti}	$\hat{\beta}_1$	Crescimento (%)
E12	9,775	19,929	0,0310	203,9
E3	9,618	17,839	0,0279	185,5
E4	9,651	18,392	0,0294	190,6

b) No que concerne aos testes de existência de interação (espécie×ocasião), têm-se:

b1) Os perfis de crescimento das espécies E1 e E2 são coincidentes;

b2) Os perfis de crescimento das espécies E3 e E4 não são paralelos.

É recomendável estabelecer equações específicas para as espécies E3 e E4 (V_{E3} e V_{E4}). Por outro lado, para as espécies E1 e E2 é factível obter uma equação única (V_{E12}).

c) Em relação aos valores dos ciclos de corte economicamente aconselhável, têm-se:

As espécies E1 e E2 apresentaram um ciclo de corte de 16,2 anos, enquanto que as espécies E3 e E4 requerem 14,8 e 15,5 anos, respectivamente. Por outro lado, considerando a equação única, reunindo as quatro espécies, o ciclo recomendável é de 15,7 anos.

Sob o aspecto dos valores da rotação economicamente aconselhável seria recomendável efetuar, na idade de 15 anos, a exploração dirigida das espécies E3 e E4, dentro do contexto de um trato silvicultural específico. Repetir o procedimento, na idade de 16 anos, para as espécies E1 e E2. Obviamente, considerando que uma floresta natural possui um número grande de espécies, as decisões sobre as datas das intervenções, considerando o sistema de manejo policíclico, teriam que estar baseadas nos ciclos de cortes economicamente aconselháveis dos diversos grupos. Estes originados de acordo com a similaridade dos perfis de crescimento das espécies.

- d) Levando em consideração os valores dos coeficientes de variação (CV%) e das correlações ao quadrado (r_{Mi}^2) entre os valores estimados e observados. As equações V_{12} , V_3 e V_4 apresentaram valores razoáveis de CV% e de (r_{Mi}^2) que recomendam os seus usos.
- e) Em se tratando dos valores do teste de validade de Graybill (F_G), as equações V_{12} , V_3 e V_4 apresentaram F_G não significativo ao nível de significância de $\alpha = 0,05$. No caso do uso de uma equação única (V_{E1234}) ocorreu um valor de $F_G = 9,97$ ($p\text{-valor} < 0,0001$), o que não recomenda o seu uso.
- f) Os gráficos dos resíduos, relativos aos comportamentos das equações de crescimentos das espécies, apresentaram aproximadamente distribuições dos resíduos aleatórias, não demonstrando nenhum tipo de tendência aparente, ou seja, mostraram que a faixa de variação dos resíduos ao longo dos valores ajustados é constante, não havendo indícios de que as variâncias dos resíduos das equações das espécies sejam heteroscedásticas.
- g) Uma equação única (V_{E1234}) não é recomendável, conforme o teste de validade de Graybill, assim como apresentou pelo teste da razão da máxima verossimilhança, para verificação de igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear, um valor altamente significativo de $\chi_{Cal}^2 = 390,81$.

Capítulo 9

Técnicas multivariadas em inventário florestal

O conteúdo principal proposto para esta obra era tratar da análise de perfil de inventário florestal contínuo. Entretanto, considerando a enorme importância da análise multivariada, no contexto da disciplina de Inventário Florestal, considerou-se importante escrever este capítulo apresentando algumas noções sobre os métodos de análise multivariada aplicáveis em inventário florestal. Serão abordadas as técnicas: análise de componentes principais; análise discriminante; análise de correlação canônica; análise de fatores pelos métodos da máxima verossimilhança e de componentes principais. Para os exercícios de componentes principais, de análise discriminante e de análise de fatores foram usados os dados das espécies E1, E2, E3 e E4 denotadas como quatro populações, e as ocasiões OC1, OC2, OC3, OC4 e OC5 caracterizadas como variáveis. No exercício sobre a análise de correlação canônica, considerando os métodos de manejo M1, M2, M3, M4 versus as quatro espécies E1, E2, E3, E4, foram investigadas as inter-relações das variáveis OC1, OC2, OC3, OC4, OC5 entre os métodos de manejo e as espécies.

9. INTRODUÇÃO

É comum em inventários florestais a medição de diversas variáveis em uma mesma unidade amostral. Neste caso, é recomendável proceder a uma exploração das informações, visando diminuir a dimensão da matriz dos dados, porém conservando ao máximo as informações inerentes às variáveis originais.

Para tratar do problema da diminuição da dimensão do vetor de variáveis respostas são recomendados, na análise multivariada, principalmente, os métodos de análises de componentes principais e de fatores. Estes métodos objetivam gerar um número menor de variáveis hipotéticas, combinações lineares das variáveis originais, tal que, mesmo em menor número expliquem adequadamente a interdependência do conjunto original multidimensional dos dados.

A análise de componentes principais consiste em dado um conjunto de variáveis aleatórias, obter por transformação linear um número igual de novas variáveis não correlacionadas (componentes principais), tal que a soma das variâncias seja invariante.

Por outro lado, no caso de os primeiros componentes principais explicarem parte significativa da variância total, pode-se então avaliá-los para cada indivíduo (*“score”*) ou unidade de amostra e processá-los em outras análises em substituição às variáveis originais.

A análise de fatores estuda as relações internas de um conjunto de variáveis aleatórias, substituindo-as por um número menor de variáveis hipotéticas denominadas de fatores, que podem ser correlacionados (fatores oblíquos) ou não correlacionados (fatores ortogonais). Estes fatores devem explicar parte significativa da variância do conjunto das variáveis originais.

Existem algumas similaridades entre as análises de fatores e de componentes principais. Ambas iniciam com um modelo linear e encerram com a fatoração da matriz de covariância ou de correlação. No entanto, na análise dos componentes principais a fatoração da matriz é única, se todos os componentes de variância forem diferentes. Na análise de fatores a fatoração não será única, pois, por transformação ortogonal (rotação), um número infinito de matrizes de pesos fatoriais pode ser obtido para reproduzir a matriz de covariância ou de correlação das variáveis respostas.

No que diz respeito à aplicação em inventários florestais pode-se, considerando os escores dos componentes principais ou os pesos fatoriais relativos, interpretar os efeitos das variáveis respostas envolvidas e suas inter-relações. Por outro lado, a partir da interpretação do significado florestal dos componentes ou dos fatores é possível, usando a amostragem sistemática no levantamento, produzir mapas, os quais podem ser importantes para orientar o planejamento de diversas atividades, principalmente, na elaboração de planos de manejo florestal e na análise do Inventário Florestal Nacional (IFN).

Esses mapas, definidos como originários de um processo denominado de pós-estratificação multidimensional, podem ser construídos usando índices que expressem os efeitos e as inter-relações do conjunto de variáveis respostas. De acordo com Queiroz

(1984), um índice que tem se mostrado eficiente e consistente é o definido, no caso do uso de componentes principais, como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores ponderados pela contribuição dos componentes principais à variância total. Por outro lado, no caso da análise de fatores, a definição seria o módulo da resultante da soma vetorial dos escores dos fatores ponderados pela contribuição de cada fator à comunalidade total.

É muito comum na engenharia florestal, principalmente na botânica sistemática e dendrologia que tratam da classificação de vegetais, a existência de k populações e a mensuração de p variáveis respostas, a necessidade de classificar um novo indivíduo, com base em observações dessas p características, com chance mínima de erro, em uma (e somente uma) das k populações. A aplicação da análise discriminante é muito importante na classificação de vegetais.

A aplicação geral e usual da análise de correlação canônica é investigar as relações existentes entre dois conjuntos distintos de variáveis. Por exemplo, em uma área florestal pode-se pesquisar qual o seu perfil florístico de acordo com o padrão edafoclimático ocorrente na floresta. O método foi desenvolvido por Hotelling (1935).

A análise de correlação canônica ajuda a responder a esse questionamento, determinando combinações lineares das características florísticas que mais se correlacionam com outras combinações lineares envolvendo as características edafoclimáticas.

É importante no manejo florestal estudar as inter-relações entre grupos de variáveis, por exemplo, um grupo pode ser formado por variáveis florísticas e o outro pelas variáveis que refletem a fertilidade de solo. A análise de correlação canônica poderá explicar essas correlações, inclusive fornecendo mapas que podem mostrar as estratificações das diversas relações solo-vegetação.

As técnicas de análises de agrupamento, de discriminante e de análise de variância multivariada podem ser usadas para delimitar, classificar (discriminar) e comparar tipos florestais e, assim, obter mapas de vegetação baseados nas variáveis mais importantes na explicação das estruturas florísticas e ecológicas da vegetação.

9.1. ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

Seja o vetor com p variáveis aleatórias $x_v = [x_1, x_2, \dots, x_p]$, apresentando uma determinada distribuição multivariada com vetor de médias μ_v e matriz de covariância Σ de posto $r \leq p$, tal que, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_q$ são as q maiores raízes características distintas de Σ .

Seja a matriz de dados X ($n \times p$), donde p é o número de variáveis e n é o número de unidades de amostra.

$${}_n X_p = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

O primeiro componente principal das observações, da matriz de dados X ($n \times p$), é definido como o componente linear $Y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{p1}x_p = a'_{v1}x_v$ que apresenta como variância:

$$V(Y_1) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{i1}a_{j1}s_{ij} = a'_{v1}Sa_{v1} \quad S = [s_{ij}] : \text{é a matriz de covariância amostral}$$

A variância $V(Y_1)$ é a maior para todos os vetores normalizados da forma $a'_{v1}a_{v1} = 1$. Seja Y_1 o primeiro componente principal das observações da matriz de dados X ($n \times p$), onde p é o número de variáveis e n é o número de unidades de amostra.

Para obter o primeiro componente principal, calcula-se $a'_{v1} = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}]$, tal que, a $Var(Y_1) = a'_{v1}Sa_{v1}$ atinja o maior valor possível para a condição: $a'_{v1}a_{v1} = 1$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, diferenciando com respeito ao vetor a_{v1} , têm-se:

$$F_1 = [a'_{v1}Sa_{v1} + \lambda_1(1 - a'_{v1}a_{v1})]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{v1}} = 0_v, \text{ resultando: } 2Sa_{v1} - 2\lambda_1a_{v1} = 0_v.$$

Os coeficientes do primeiro componente principal devem satisfazer o sistema de equações homogêneas $(S - \lambda_1 I)a_{v1} = 0_v$. As soluções não nulas devem satisfazer $|S - \lambda_1 I| = 0$. Então, λ_1 é a maior raiz característica (autovalor) da matriz de covariância e a_{v1} o seu vetor característico (autovetor) associado.

O primeiro componente principal de um conjunto de valores amostrais das variáveis respostas $x_1, x_2, \dots, x_p$ é definido como componente linear $Y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{p1}x_p$, cujos coeficientes a_{ij} são os elementos do vetor característico associado à raiz característica λ_1 da matriz de covariância ou de correlação. Se, $a'_{v1}a_{v1} = 1$, então a raiz característica λ_1 é interpretada como a variância amostral de Y_1 .

O segundo componente principal é o componente linear $Y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{p2}x_p$, cujos coeficientes $a_{v2} = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{p2}]$ atendem à condição de valor máximo da variância dadas as restrições: $a'_{v2}a_{v2} = 1$ e $a'_{v1}a_{v2} = 0$. Então $Var(Y_2) = a'_{v2}Sa_{v2}$.

Aplicando o método de Lagrange e diferenciando em relação a_{v2} , tem-se:

$$F_2 = [a'_{v2}Sa_{v2} + \lambda_2(1 - a'_{v2}a_{v2}) + \mu_2a'_{v1}a_{v2}]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_{v2}} = 2[S - \lambda_2I]a_{v2} + \mu_2a_{v1} = 0_v \quad (9.1.1)$$

Pré-multiplicando (9.1.1) por a'_{v1} resulta $2a'_{v1}Sa_{v2} + \mu_2 = 0$, mas como $a'_{v1}Sa_{v2} = 0$, então $\mu_2 = 0$, concluindo-se que a_{v2} deve satisfazer: $(S - \lambda_2I)a_{v2} = 0_v$.

Assim, o j -ésimo componente principal de uma amostra p -dimensional é o conjunto linear $Y_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{pj}x_p$, cujos coeficientes são os elementos do vetor característico da matriz de covariância amostral correspondente a j -ésima maior raiz característica λ_j . Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, os coeficientes dos i -ésimo e j -ésimo componentes são necessariamente ortogonais. Se $\lambda_i = \lambda_j$, os coeficientes podem ser definidos ortogonais, entretanto, infinitos vetores existirão. A variância amostral do j -ésimo componente é λ_j e a variância total será $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = trS$. A importância do j -ésimo componente é dado por $\frac{\lambda_j}{trS}$.

O sinal algébrico e a magnitude de a_{ij} indicam a direção e a importância da contribuição da i -ésima variável resposta ao j -ésimo componente.

As covariâncias amostrais das respostas com o j -ésimo componente são dadas pelo vetor coluna Sa_{vj} , pois dado que $(S - \lambda_jI)a_{vj} = 0_v$, então $Sa_{vj} = \lambda_ja_{vj}$, de onde, se conclui que a covariância da i -ésima variável resposta com o componente Y_j é, meramente, λ_ja_{ij} .

A correlação entre a i -ésima variável resposta e o j -ésimo componente será:

$$corr(x_i, Y_j) = \frac{a_{ij}\sqrt{\lambda_j}}{\sigma_{ii}} \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

Por outro lado, caso seja utilizada a matriz de correlação para obter os componentes principais, a correlação entre a i -ésima variável resposta e o j -ésimo componente será:

$$corr(x_i, Y_j) = a_{ij}\sqrt{\lambda_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

No caso dos primeiros componentes principais explicarem parte significativa da variância total, pode-se então avaliá-los para cada indivíduo ("score") ou unidade de amostra, e processá-los em outras análises em substituição às variáveis originais.

De acordo com Morrison (1976), para calcular a matriz dos scores Y ($n \times r$) dos componentes principais para o i -ésimo indivíduo, quando os componentes são extraídos da matriz de covariância, têm-se:

$$y_{i1} = a'_{v1}(x_{vi} - \bar{x}_v), y_{i2} = a'_{v2}(x_{vi} - \bar{x}_v), \dots, y_{ir} = a'_{vr}(x_{vi} - \bar{x}_v)$$

Onde r é o número de componentes principais utilizados, x_{vi} é o vetor das observações originais e $\bar{x}_v$ é o vetor das médias.

Generalizando para Y ($n \times r$), tem-se:

$${}_n Y_r = [I_n - \frac{1}{n}({}_n E_n)]({}_n X_p A_r)$$

X ($n \times p$): matriz dos dados originais;

E ($n \times n$): matriz de uns em todas as posições;

A ($p \times r$): matriz formada cujas colunas são formadas pelos r vetores característicos.

A equação básica do modelo linear dos componentes principais não possui componente residual. Esta propriedade o diferencia marcadamente do modelo da análise de fatores. Na análise de componentes principais, por ser um método matemático, não há obrigatoriedade de multinormalidade dos dados.

Uma grande desvantagem da análise de componentes principais é que os componentes oriundos da matriz de correlação não são os mesmos computados da matriz de covariância. Por outro lado, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da análise de fatores possuem uma importantíssima propriedade, ou seja, "mudança nas escalas das variáveis originais somente implica modificação na escala dos pesos fatoriais". Particularmente, os valores dos pesos fatoriais da matriz de correlação diferem dos pesos computados da matriz de covariância pelo fator $1/s_i$ ($i = 1, \dots, p$), tal que s_i é o desvio padrão da variável resposta x_i e p é o número de variáveis originais. Esta propriedade não é apresentada pelos componentes principais.

9.1.1. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DOS COMPONENTES PRINCIPAIS

De acordo com Morrison (1976), os componentes principais de uma amostra de n observações p -dimensionais são as novas variáveis especificadas pelos eixos de uma rotação rígida do sistema de coordenadas das variáveis originais, tendo as orientações correspondentes às direções da variância máxima da configuração (nuvem) de pontos da amostra. Os cosenos diretivos dos novos eixos são os vetores característicos normalizados correspondentes às sucessivas maiores raízes características da matriz de covariância. Se duas ou mais raízes são iguais, as direções dos eixos associados não serão únicas e os componentes podem ser escolhidos de um número infinito de posições

ortogonais. Se usada a matriz de correlação o sistema de coordenadas das respostas é expresso em unidades padrão de média zero e variância unitária.

A Figura 9.1.1.1 mostra a interpretação geométrica dos componentes principais de uma população trivariada. Supondo Y_1 centrado no ponto médio e $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$, tem-se $a_{21} = \cos\alpha_2$ e $a_{31} = \cos\alpha_3$. Onde as novas coordenadas do eixo Y_1 , por exemplo, seriam dadas por:

$$y_{i1} = a_{11}(X_{i1} - \bar{X}_1) + a_{21}(X_{i2} - \bar{X}_2) + a_{31}(X_{i3} - \bar{X}_3)$$

Figura 9.1.1.1 – Interpretação geométrica dos componentes principais de uma população trivariada.
Fonte: Morrison (1976).

9.1.2. METODOLOGIA DOS ÍNDICES NORMALIZADOS

São definidos, equação 9.1.2.1, de acordo com Queiroz (1984), como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores dos componentes principais, ponderados pela contribuição em porcentagem (p_j) do respectivo componente à variância total (trS), os quais são divididos pelo de maior magnitude, implicando numa normalização entre 0 e 1. A justificativa da aplicação desses índices resulta do fato dos componentes principais serem ortogonais. A Figura 9.1.2.1 mostra a representação gráfica do índice normalizado.

$$I_i = \sqrt{\sum_{j=1}^r p_j Y_{ij}^2} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.1.2.1)$$

Figura 9.1.2.1 - Representação gráfica do índice normalizado.

Na fitossociologia florestal é recomendável usar, como o índice de valor de importância, o primeiro componente principal, em substituição a expressão 9.1.2.2, a qual é inadequada de acordo com Queiroz et al. (2017), pois não considera as inter-relações entre as variáveis: FR_i , DR_i e DOR_i .

$$IVI_i = FR_i + DR_i + DOR_i \quad (9.1.2.2)$$

IVI_i = Índice de Valor de Importância da i-ésima espécie;

FR_i = Frequência Relativa da i-ésima espécie em %;

DR_i = Densidade Relativa da i-ésima espécie em %;

DOR_i = Dominância Relativa da i-ésima espécie em %.

Por outro lado, se pode usar os primeiros componentes principais e construir como definido na expressão 9.1.2.1, um índice de valor de importância mais preciso.

9.1.3. ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS DAS ESPÉCIES E1, E2, E3, E4, CONSIDERANDO COMO VARIÁVEIS AS OCASIÕES OC1, OC2, OC3, OC4 E OC5

A tabela C14, do apêndice C, apresenta o programa SAS construído para efetuar as análises de componentes principais e de fatores para as espécies E1, E2, E3, E4.

a) Matriz de covariância comum das espécies para as variáveis OC1, OC2, OC3, OC4, OC5 (dados da tabela B2 do apêndice B)

$$S = \begin{bmatrix} 0,02678314 & 0,03220126 & 0,03545548 & 0,04085641 & 0,03934563 \\ 0,03220126 & 0,46438298 & 0,31791906 & 0,58583988 & 0,59253834 \\ 0,03545548 & 0,31791906 & 0,26248354 & 0,43538079 & 0,44656015 \\ 0,04085641 & 0,58583988 & 0,43538079 & 0,78654179 & 0,80448517 \\ 0,03934563 & 0,59253834 & 0,44656015 & 0,80448517 & 0,83544778 \end{bmatrix}$$

b) Obtenção dos autovalores (*eigenvalues*) da matriz de covariância (S)

Tabela 9.1.3.1 – Autovalores (*Eigenvalues*) e suas contribuições à variância total.

Autovalores da matriz de covariância				
	Autovalor	Diferença	Proporção	Acumulado
1	2,29644092	2,25953403	0,9667	0,9667
2	0,03690689	0,00643365	0,0155	0,9822
3	0,03047324	0,02217336	0,0128	0,9950
4	0,00829988	0,00478156	0,0035	0,9985
5	0,00351832		0,0015	1,0000
Total	2,37563925			

A tabela 9.1.3.1 mostra que os dois maiores autovalores, $\lambda_1 = 2,29644092$ e $\lambda_2 = 0,03690689$, explicam 98,22 % da variância total, significando que os dois primeiros componentes principais explicam 98,22 % da estrutura de dispersão.

c) Obtenção dos autovetores associados aos cinco autovalores (*eigenvectors*)

Tabela 9.1.3.2 - Autovetores: coeficientes dos componentes principais.

Autovetores associados aos autovalores da matriz de covariância					
	Prin1	Prin2	Prin3	Prin4	Prin5
OC1	0,032216	0,573660	0,551355	0,596831	-0,098371
OC2	0,437907	-0,515112	0,674295	-0,105689	0,277583
OC3	0,325754	0,633589	0,076852	-0,660716	0,223602
OC4	0,584268	-0,045499	-0,089009	-0,038174	-0,804475
OC5	0,599762	0,045484	-0,476974	0,441157	0,464858

A tabela 9.1.3.2 apresenta os autovetores relativos aos cinco autovalores, tal que, os seus coeficientes correspondem aos cinco componentes principais. Sejam os dois primeiros componentes principais Prin1 e Prin2:

$$\text{Prin1} = 0,032216\text{OC1} + 0,437907\text{OC2} + 0,325754\text{OC3} + 0,584268\text{OC4} + 0,599762\text{OC5}$$

$$\text{Prin2} = 0,573660\text{OC1} - 0,515112\text{OC2} + 0,633589\text{OC3} - 0,045499\text{OC4} + 0,045484\text{OC5}$$

Prin1 mostra um panorama de contribuição com relativa igualdade dos coeficientes com respeito às variáveis OC2, OC3, OC4 e OC5, enquanto que a variável OC1 pouco contribui na construção do primeiro componente principal.

Por outro lado, o segundo componente principal Prin2 mostra uma boa contribuição em termos de valores absolutos dos coeficientes para as variáveis OC1, OC2 e OC3, entretanto, a variável OC3 apresenta o sinal diferente. As variáveis OC4 e OC5 contribuem relativamente pouco na construção do componente principal Prin2.

Figura 9.1.3.1 - Distribuição das quatro espécies E1=A, E2=B, E3=C, E4=D considerando os dois primeiros componentes principais. Nota do SAS: 43 obs. ocultas.

As letras A, B, C e D, denominadas de label no programa desenvolvido no SAS, foram criadas para possibilitar a criação do gráfico (*Prin1*×*Prin2*).

A figura 9.1.3.1 confirma, de forma precisa, o resultado da análise de agrupamento produzido para as espécies E1, E2, E3, e E4, mostrado na figura 8.1.1.3, capítulo 8, seção 8.1, item g, dendrograma do agrupamento de Ward, o qual demonstra que as espécies E1 e E2 formam um grupo distinto do composto pelas espécies E3 e E4.

Não estão apresentados os valores dos índices normalizados, conforme a expressão 9.1.2.1, já que a estrutura do banco de dados está baseada nas variáveis aleatórias ocasiões, as quais não apresentam um interesse prático para montagem de um mapa de pós-estratificação multidimensional. Entretanto, caso fosse aplicada a equação 9.1.2.1, ela teria a seguinte formulação:

$$I_i = \sqrt{\sum_{j=1}^r p_j Y_{ji}^2} = \sqrt{0,966662 \times Y_{1i}^2 + 0,015536 \times Y_{2i}^2} \quad (i = 1, \dots, N = 120)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{Tr(S)} = \frac{2,29644092}{2,37563925} = 0,966662 \quad p_2 = \frac{\lambda_2}{Tr(S)} = \frac{0,03690689}{2,37563925} = 0,015536$$

Y_{1i} : valor de prin1 obtido na i-ésima parcela ($i = 1, \dots, N$);

Y_{2i} : valor de prin2 obtido na i-ésima parcela ($i = 1, \dots, N$);

$Tr(S) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_3 + \lambda_3 = 2,37563925$

9.2. ANÁLISE DISCRIMINANTE

9.2.1. FUNÇÃO LINEAR DISCRIMINANTE DE FISHER

Sejam k populações $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ e $y'_v = [y_1, y_2, \dots, y_p]$ um vetor aleatório com função densidade de probabilidade $f_j(y_{vj})$ pertencente, unicamente, a uma população π_j onde: $j = 1, 2, \dots, k$ e $i = 1, 2, \dots, p$.

O problema básico da análise discriminante é o de classificar um novo indivíduo y_v , com base em observações de p características $y_1, y_2, \dots, y_p$, com chance mínima de erro, em uma (e somente uma) das populações $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$.

Seja a regra de decisão: classifique $y_v \in \pi_j$ se $y_v \in w_j$, onde w_j é a região que contém y_v . Em geral, tem-se que $w = \bigcup_{j=1}^k w_j$ (união disjunta), ou seja, $w_j \cap w_{j'} = \emptyset$ para $j \neq j'$. As regiões w_j são construídas de modo a maximizar a probabilidade de classificar corretamente.

FISHER (1936) sem usar o critério da razão das funções de densidade de probabilidade e sem suposição de multinormalidade obteve a função linear $a'_v y_v$, derivada das populações π_1 e π_2 , maximizando o quociente:

$$Max_{a_v \neq 0} \frac{[E(a'_v y_v) / \pi_1 - E(a'_v y_v) / \pi_2]^2}{Var(a'_v y_v)}$$

O numerador corresponde ao quadrado da distância entre as médias amostrais de $a'_v y_v$, em relação à variância amostral de $a'_v y_v$, considerando π_1 e π_2 . Definindo que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, têm-se:

$$\phi = \frac{(a'_v \mu_{v1} - a'_v \mu_{v2})^2}{a'_v \Sigma a_v} = \frac{[a'_v (\mu_{v1} - \mu_{v2})]^2}{a'_v \Sigma a_v} \quad (9.2.1.1)$$

Obter a_v que maximize a expressão 9.2.1.1:

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_v} = \frac{2(\mu_{v1} - \mu_{v2})a'_v \sum a_v - 2 \sum a_v (a'_v \mu_{v1} - a'_{v2})}{(a'_v \sum a_v)^2} = 0$$

Resultando: $\mu_{v1} - \mu_{v2} = \sum a_v \left(\frac{a'_v \mu_{v1} - a'_{v2} \mu_{v2}}{a'_v \sum a_v} \right)$

Lachenbruch (1975) cita que como a_v será usado somente para separar as populações, então se pode multiplicar a_v por qualquer constante diferente de zero. Portanto, a_v será proporcional a $\Sigma^{-1}(\mu_{v1} - \mu_{v2})$, resultando a função $f = (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v$ que é denominada de função linear discriminante de Fisher, donde:

$$\mu_{v1} = E(y_v / \pi_1);$$

$$\mu_{v2} = E(y_v / \pi_2);$$

$$Var(y_{vj}) = \Sigma = E(y_{vj} - \mu_{vj})(y_{vj} - \mu_{vj})' \quad (j = 1, 2).$$

No caso de os parâmetros serem desconhecidos, então as estimativas $\bar{y}_{v1}$, $\bar{y}_{v2}$ e S devem ser utilizadas. O procedimento para classificar um indivíduo em π_1 , é: se $f = (\mu_{v1} - \mu_{v2})' S^{-1} y_v$ é mais próximo de $f_1 = (\mu_{v1} - \mu_{v2})' S^{-1} y_{v1}$ do que de $f_2 = (\mu_{v1} - \mu_{v2})' S^{-1} y_{v2}$, caso contrário, classificar em π_2 . Seja o ponto médio do intervalo entre f_1 e f_2 :

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})' S^{-1} (\bar{y}_{v1} + \bar{y}_{v2})$$

Destarte, f está mais próximo de f_1 se: $|f - f_1| < |f - f_2|$, o que ocorrerá quando $f > \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, desde que $f_1 > f_2$.

Deve ser observado que: $(f_1 - f_2) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' S^{-1} \bar{y}_1 - (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' S^{-1} \bar{y}_2$.

$(f_1 - f_2) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' S^{-1} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$ é denominada distância D^2 de Mahalanobis (1936).

Por outro lado:

$$Var(f) = a'_v S a_v = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' S^{-1} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = D^2$$

Pode-se usar a distribuição de D^2 para testar, entre os dois grupos, a existência de diferenças significativas. Neste caso, tem-se a estatística:

$$F = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - p - 1)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 2)p} D^2$$

Tal que n_1 e n_2 correspondem aos tamanhos das amostras, respectivamente, de π_1 e π_2 e p é o número de variáveis. A estatística F tem distribuição com p e $n_1 + n_2 - p - 1$ graus de liberdade.

9.2.2. CASO DE DUAS POPULAÇÕES MINIMIZANDO A PROBABILIDADE TOTAL DE CLASSIFICAÇÃO

Welch (1939) solucionou o problema da minimização da probabilidade total de classificação. Seja $f_1(y_v)$ a função densidade de probabilidade de y_v pertencer a π_1 e $f_2(y_v)$ de y_v pertencer a π_2 . Considerando p_1 a proporção de ocorrência na população π_1 e $p_2 = 1 - p_1$ a ocorrência na população π_2 . Supondo classificar y_v em π_1 , se y_v está em alguma região de R_1 , e em π_2 , se y_v está na região R_2 . Assume-se que R_1 e R_2 são mutuamente exclusivas e que a união delas abrange todo espaço R .

Lachenbruch (1975) define a probabilidade total de classificação errada, como:

$$\begin{aligned} T_{[R, f(y_v)]} &= p_1 \int_{R_2} f_1(y_v) dy_v + p_2 \int_{R_1} f_2(y_v) dy_v \\ T_{[R, f(y_v)]} &= p_1 [1 - \int_{R_1} f_1(y_v) dy_v] + p_2 \int_{R_1} f_2(y_v) dy_v \\ T_{[R, f(y_v)]} &= p_1 + \int_{R_1} [p_2 f_2(y_v) - p_1 f_1(y_v)] dy_v \end{aligned} \quad (9.2.2.1)$$

A quantidade 9.2.2.1 é minimizada se R_1 é definida, onde $p_2 f_2(y_v) - p_1 f_1(y_v) < 0$ para todos os pontos em R_1 . A regra de classificação é: atribuir y_v para π_1 se $\frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} > \frac{p_2}{p_1}$, caso contrário atribuir em π_2 . Esta regra minimiza a probabilidade total de classificação errada. Seja a probabilidade de classificação errada dentro de cada grupo:

$$P_1 = \int_{R_2} f_1(y_v) dy_v \quad P_2 = \int_{R_1} f_2(y_v) dy_v$$

9.2.3. CASO DE DUAS POPULAÇÕES MULTINORMAIS COM DISPERSÕES CONHECIDAS E IGUAIS

Seja a função densidade de probabilidade ($f.d.p.$) da distribuição multinormal:

$$f_j(y_v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \sqrt{|\Sigma_j|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y_v - \mu_{vj})' \Sigma^{-1} (y_v - \mu_{vj})\right]$$

Considerando como critério o quociente entre as duas densidades $f_1(y_v)$ e $f_2(y_v)$:

$$\frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \sqrt{|\Sigma_1|}} \exp[-\frac{1}{2}(y_v - \mu_{v1})' \Sigma_1^{-1} (y_v - \mu_{v1})]}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \sqrt{|\Sigma_2|}} \exp[-\frac{1}{2}(y_v - \mu_{v2})' \Sigma_2^{-1} (y_v - \mu_{v2})]}$$

$$\frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} = \frac{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp[\frac{1}{2}(y_v - \mu_{v2})' \Sigma_2^{-1} (y_v - \mu_{v2}) - \frac{1}{2}(y_v - \mu_{v1})' \Sigma_1^{-1} (y_v - \mu_{v1})]$$

Sendo $\frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} = \frac{p_2}{p_1}$ e aplicando a função crescente logaritmo neperiano a ambos os lados:

$$Ln \frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} = \frac{1}{2} [y_v' (\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1}) y_v - 2(\mu_{v2}' \Sigma_2^{-1} - \mu_{v1}' \Sigma_1^{-1}) y_v + \mu_{v2}' \Sigma_1^{-1} \mu_{v2} - \mu_{v1}' \Sigma_2^{-1} \mu_{v1}] \geq Ln(\frac{p_2}{p_1} \frac{|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}})$$

Considerando $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ e a regra: classifique y_v em π_1 , se $y_v \in w_1$, donde w_1 será o conjunto:

$$w_1 = \{y_v \in R^p : \frac{1}{2} [-2(\mu_{v2} - \mu_{v1})' \Sigma^{-1} y_v + \mu_{v2}' \Sigma^{-1} \mu_{v2} - \mu_{v1}' \Sigma^{-1} \mu_{v1}] \geq Ln(\frac{p_2}{p_1})\}$$

Somando $\mu_{v1}' \Sigma^{-1} \mu_{v2} - \mu_{v1}' \Sigma^{-1} \mu_{v2}$, têm-se:

$$w_1 = \{y_v \in R^p : \frac{1}{2} [-2(\mu_{v2} - \mu_{v1})' \Sigma^{-1} y_v - (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} (\mu_{v1} + \mu_{v2})] \geq Ln(\frac{p_2}{p_1})\}$$

$$w_1 = \{y_v \in R^p : (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} [y_v - \frac{1}{2} (\mu_{v1} + \mu_{v2})] \geq Ln \frac{p_2}{p_1}\}$$

$$w_1 = [y_v \in R^p : (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v \geq \frac{1}{2} (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} (\mu_{v1} + \mu_{v2}) + Ln \frac{p_2}{p_1}]$$

O termo $(\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v$ é chamado de função linear discriminante de Fisher e $(\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1}$ são os seus coeficientes.

Considerando $p_1 = p_2$, isto é, as probabilidades a priori são iguais de y_v pertencer à população π_1 ou π_2 . Então:

$$w_1 = [y_v \in R^p : (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v \geq \frac{1}{2} (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} (\mu_{v1} + \mu_{v2})]$$

$$w_2 = [y_v \in R^p : (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v < \frac{1}{2} (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} (\mu_{v1} + \mu_{v2})]$$

Figura 9.2.3.1 - Probabilidades de classificação incorreta.
Fonte: Johnson & Wichern (1992)

De acordo com a figura 9.2.3.1, têm-se:

$P(1/2)$: probabilidade de y_v pertencer à população π_2 e ser classificado na π_1 .

$P(2/1)$: probabilidade de y_v pertencer à população π_1 e ser classificado na π_2 .

9.2.4. CASO DE TRÊS POPULAÇÕES MULTINORMAIS COM DISPERSÕES CONHECIDAS E IGUAIS, ASSIM COMO ($P_1 = P_2$)

$$w_1 = [y_v \in R^p : p_1 f_1(y_v) \geq p_2 f_2(y_v) \text{ e } p_1 f_1(y_v) \geq p_3 f_3(y_v)] \rightarrow$$

$$\text{Classifique } y_v, \text{ em } \pi_1, \text{ se } \frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} \geq \frac{p_2}{p_1} \text{ e } \frac{f_1(y_v)}{f_3(y_v)} \geq \frac{p_3}{p_1}.$$

$$w_2 = [y_v \in R^p : p_2 f_2(y_v) \geq p_1 f_1(y_v) \text{ e } p_2 f_2(y_v) \geq p_3 f_3(y_v)] \rightarrow$$

$$\text{Classifique } y_v, \text{ em } \pi_2, \text{ se } \frac{f_1(y_v)}{f_2(y_v)} \leq \frac{p_2}{p_1} \text{ e } \frac{f_2(y_v)}{f_3(y_v)} \geq \frac{p_3}{p_2}.$$

$$w_3 = [y_v \in R^p : p_3 f_3(y_v) \geq p_1 f_1(y_v) \text{ e } p_3 f_3(y_v) \geq p_2 f_2(y_v)] \rightarrow$$

$$\text{Classifique } y_v, \text{ em } \pi_3, \text{ se } \frac{f_1(y_v)}{f_3(y_v)} \leq \frac{p_3}{p_1} \text{ e } \frac{f_2(y_v)}{f_3(y_v)} \leq \frac{p_3}{p_2}.$$

Seja o exemplo para três populações apresentado por Morrison (1976), donde as estatísticas discriminantes citadas são:

$$w_{12} = y_v' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2}) - \frac{1}{2} (\bar{y}_{v1} + \bar{y}_{v2})' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v2})$$

$$w_{13} = y_v' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v3}) - \frac{1}{2} (\bar{y}_{v1} + \bar{y}_{v3})' S^{-1} (\bar{y}_{v1} - \bar{y}_{v3})$$

$$w_{23} = y_v' S^{-1} (\bar{y}_{v2} - \bar{y}_{v3}) - \frac{1}{2} (\bar{y}_{v2} + \bar{y}_{v3})' S^{-1} (\bar{y}_{v2} - \bar{y}_{v3})$$

O autor citado observa que, devido $w_{23} = w_{13} - w_{12}$, é somente necessário usar as estatísticas w_{12} e w_{13} , estabelecendo as seguintes regras de classificação: classificar y_v a partir de:

Na população π_1 se $w_{12} > 0$ e $w_{13} > 0$

Na população π_2 se $w_{12} < 0$ e $w_{13} > w_{12}$

Na população π_3 se $w_{13} > 0$ e $w_{12} > w_{13}$

9.2.5. MÉTODO NÃO PARAMÉTRICO PARA CALCULAR A PROBABILIDADE DE MÁ CLASSIFICAÇÃO

Este método é não tendencioso e independe da distribuição, não precisando de homogeneidade de matrizes de covariâncias. Godoi (1985) cita que se n_1 e n_2 forem grandes, toma-se uma parte dos dados para construir a função linear de discriminação, sendo a classificação feita somente para os indivíduos pertencentes à outra parte dos dados, resultando em uma tabela de duas entradas, possibilitando obter as estimativas não tendenciosas para $P(1/2)$ e $P(2/1)$.

Classificação	π_1	π_2
Classificação correta	a	B
Classificação errada	c	d
	a+c	b+d

Por conseguinte:

$$\hat{P}(1/2) = \frac{d}{b+d} \quad \hat{P}(2/1) = \frac{c}{a+c}$$

$P(1/2)$: probabilidade de y_v pertencer à população π_2 e ser classificado na π_1 .

$P(2/1)$: probabilidade de y_v pertencer à população π_1 e ser classificado na π_2 .

9.2.6. ANÁLISE DE DISCRIMINANTE, CONSIDERANDO AS VARIÁVEIS (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5), PARA AS QUATRO POPULAÇÕES (E1, E2, E3, E4)

No caso exposto, têm-se duas alternativas para efetuar a análise discriminante. A primeira é obter a função discriminante utilizando o total das 30 parcelas medidas por espécie (população). A segunda é considerar uma parte dos dados para obter as funções discriminantes e efetuar a classificação a partir dos dados restantes. Optou-se em usar 15 parcelas por espécie para construir as funções discriminantes e 15 parcelas para efetuar as classificações, e assim, obter estimativas de classificações erradas não tendenciosas. A tabela C15 do apêndice C, mostra o programa SAS desenvolvido para análise discriminante para as espécies E1, E2, E3 e E4.

a) Vetores de médias e matrizes de covariâncias, considerando 15 parcelas, para as espécies (E1, E2, E3, E4)

$$\bar{Y}'_{V1} = [9,67462000 \mid 4,3875800 \mid 7,0476333 \mid 9,388426720,9754800]$$

$$\bar{Y}'_{V2} = [9,74884000 \mid 4,4294133 \mid 7,1509267 \mid 9,544320021,1748200]$$

$$\bar{Y}'_{V3} = [9,70720667 \mid 3,1688267 \mid 6,3109400 \mid 7,8071067 \mid 9,4173867]$$

$$\bar{Y}'_{V4} = [9,69040000 \mid 3,1931667 \mid 6,4878400 \mid 8,1113467 \mid 9,6555800]$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,01850860,01513720,01262080,01485830,0072885 \\ 0,01513720,05143980,06821040,08654010,0910265 \\ 0,01262080,06821040,11795070,16263730,1833055 \\ 0,01485830,08654010,16263730,23600230,2682735 \\ 0,00728850,09102650,18330550,26827350,3210484 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0,03497300,03172970,03032230,02259000,0139370 \\ 0,03172970,04210650,05108800,04597700,0421845 \\ 0,03032230,05108800,09025680,08895220,0981381 \\ 0,02259000,04597700,08895220,10135040,1153184 \\ 0,01393700,04218450,09813810,11531840,1411477 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0,01939650,02185760,02942820,03682080,0352956 \\ 0,02185760,04294400,06041610,07211560,0721124 \\ 0,02942820,06041610,09271850,10979900,1107514 \\ 0,03682080,07211560,10979900,13984350,1462786 \\ 0,03529560,07211240,11075140,14627860,1634582 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0,01679830,00897210,00679750,00797260,0047087 \\ 0,00897210,03231210,04780390,05568400,0550067 \\ 0,00679750,04780390,08405710,09468170,0983453 \\ 0,00797260,05568400,09468170,12003990,1235505 \\ 0,00470870,05500670,09834530,12355050,1359118 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \begin{bmatrix} 0,02241910,01942410,01979220,02056040,0153075 \\ 0,01942410,04220060,05687960,06507920,0650825 \\ 0,01979220,05687960,09624580,11401750,1226351 \\ 0,02056040,06507920,11401750,14930900,1633553 \\ 0,01530750,06508250,12263510,16335530,1903915 \end{bmatrix}$$

b) Função Linear discriminante por espécie

Considerando, por exemplo, as espécies E1 e E2, classifique em E1, se:

$$w_{E1} = [y_v \in R^p : (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} y_v \geq \frac{1}{2} (\mu_{v1} - \mu_{v2})' \Sigma^{-1} (\mu_{v1} + \mu_{v2})]$$

$$w_{E1} = \{y_v \in R^p : [f = \mu'_{v1} \Sigma^{-1} y_v - \frac{1}{2} \mu'_{v1} \Sigma^{-1} \mu_{v1} - (\mu'_{v2} \Sigma^{-1} y_v - \frac{1}{2} \mu'_{v2} \Sigma^{-1} \mu_{v2})] \geq 0\}$$

$$w_{E1} = [y_v \in R^p : f_{E1} - f_{E2} \geq 0]$$

Considerando: $\Sigma = E(S)$ e $\mu_{vi} = E(\bar{y}_{vi})$, têm-se:

$$f_{E1} = \bar{y}'_{v1} S^{-1} y_v - \frac{1}{2} \bar{y}'_{v1} S^{-1} \bar{y}_{v1} \quad f_{E2} = \bar{y}'_{v2} S^{-1} y_v - \frac{1}{2} \bar{y}'_{v2} S^{-1} \bar{y}_{v2}$$

$$f_{E3} = \bar{y}'_{v3} S^{-1} y_v - \frac{1}{2} \bar{y}'_{v3} S^{-1} \bar{y}_{v3} \quad f_{E4} = \bar{y}'_{v4} S^{-1} y_v - \frac{1}{2} \bar{y}'_{v4} S^{-1} \bar{y}_{v4}$$

y_v : indivíduo a ser classificado, de acordo com o seu desempenho no tempo, com base em uma (e somente uma) das populações E1, E2, E3, E4 com chance mínima de erro.

A tabela 9.2.6.1 apresenta os coeficientes das funções lineares discriminantes das espécies E1, E2, E3, E4.

Tabela 9.2.6.1 - Funções discriminantes das espécies E1, E2, E3 e E4.

Funções lineares discriminantes por ESPÉCIE				
Variável	F _{E1}	F _{E2}	F _{E3}	F _{E4}
Constante	-3383	-3419	-3091	-3044
OC1	277,24113	284,37115	349,80662	348,49615
OC2	462,44627	456,58042	286,36560	270,56530
OC3	-157,49399	-156,90469	-1,83273	1,25295
OC4	-388,41390	-390,49938	-445,89852	-420,93560
OC5	364,50245	368,39111	359,73214	343,08402

c) Classificação das espécies E1, E2, E3 e E4

Tabela 9.2.6.2 - Número de observações e porcentagens de classificação na ESPÉCIE.

Da ESP	E1	E2	E3	E4	Total
E1	9 (60,00)	6 (40,00)	0 (0,00)	0 (0,00)	15 (100,00)
E2	4 (26,67)	11 (73,33)	0 (0,00)	0 (0,00)	15 (100,00)
E3	0 (0,00)	0 (0,00)	14 (93,33)	1 (6,67)	15 (100,00)
E4	0 (0,00)	0 (0,00)	3 (20,00)	12 (80,00)	15 (100,00)
Total	13 (21,67)	17 (28,33)	17 (28,33)	13 (21,67)	60 (100,00)
Prob. a priori	0,25	0,25	0,25	0,25	

Na tabela 9.2.6.2, observa-se que das 15 observações da espécie E1, seis (40 %) foram classificadas como E2, enquanto que das 15 observações da espécie E2 quatro (26,67 %) foram classificadas em E1, assim como, das 15 observações da espécie E3, apenas uma (6,67 %) foi classificada como E4, enquanto que das 15 observações da espécie E4 três (20 %) foram classificadas em E3. É importante verificar que nenhuma observação de E1 ou de E2 foi classificada em E3 ou em E4, e como também, nenhuma da espécie E3 ou de E4 foi classificada em E1 ou em E2. Estes resultados da análise discriminante confirmam os resultados obtidos no capítulo 8, seção 8.1., item g, dendrograma do agrupamento de Ward para as quatro espécies, ou seja, as espécies E1 e E2 formam um grupo distinto do cluster formado pelas espécies E3 e E4, o que pode ser confirmado na figura 9.2.6.1.

Tabela 9.2.6.3 - Erros de classificação por espécie e para o total.

	E1	E2	E3	E4	Total
Observado	0,4000	0,2667	0,0667	0,2000	0,2333
Pr. a priori	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	

A Tabela 9.2.6.3 mostra as estimativas, por espécie e para o total, dos erros de classificação. As espécies E1 e E2 apresentaram, respectivamente, classificações erradas de 40 % e 26,67 %. As espécies E3 e E4 tiveram, respectivamente, classificações erradas de 6,67 % e 20 %. O total de classificações erradas foi de 23,33 %, ou seja, 14 observações, de um total de 60, foram classificadas erroneamente.

Figura 9.2.6.1 - Mostra a discriminação, considerando as variáveis OC1 e OC5, para as quatro espécies (A=E1, B=E2, C=E3 e D=E4). Nota do programa SAS: 8 obs. ocultas.

As letras A, B, C e D, denominadas de label no programa SAS, foram criadas para possibilitar a criação do gráfico.

Apesar do exemplo apresentado não ser propriamente uma pesquisa de classificação de espécies com referência às suas características florísticas, mas sim aos seus perfis de crescimento no tempo, os resultados revelam conclusões interessantes que confirmam os resultados da análise de perfil para as espécies E1, E2, E3 e E4 vista no capítulo 8.

9.3. ANÁLISE DE CORRELAÇÃO CANÔNICA

A aplicação geral e usual da análise de correlação canônica é investigar as relações existentes entre dois conjuntos distintos de variáveis. Por exemplo, em uma área florestal pode-se pesquisar qual o seu perfil florístico de acordo com o padrão edafoclimático ocorrente. O método foi desenvolvido por Hotelling (1935).

A análise de correlação canônica ajuda a responder a esses questionamentos, determinando combinações lineares das características florísticas que mais se correlacionam com outras combinações lineares envolvendo as características edafoclimáticas.

Supondo que o primeiro conjunto das variáveis (florísticas) seja definido por $X_1, X_2, \dots, X_p$, e as inerentes ao segundo conjunto de variáveis (edafoclimáticas) por $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$. A técnica consiste em determinar as combinações lineares W e V , ou seja, obter $u'_v = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ e $v'_v = [v_1, v_2, \dots, v_q]$, tal que a correlação (r_{ZW}) entre as combinações lineares W e V atinja o máximo valor possível. Então:

$$W = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_p X_p \quad V = v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + \dots + v_q Y_q$$

Da definição de correlação linear simples:

$$r_{W_i V_i} = \frac{\sum w_{ij} v_{ij}}{\sqrt{\sum w_{ij}^2 \times \sum v_{ij}^2}} = \frac{u'_v S_{xy} v_v}{\sqrt{(u'_v S_{xx} u_v)(v'_v S_{yy} v_v)}}$$

$i = 1, 2, \dots, (q \text{ ou } p)$, donde: (q se $q < p$ ou p se $p < q$);

$j = 1, 2, \dots, n$ (número de parcela).

Estabelecendo as condições, $u'_v S_{xx} u_v = 1$ e $v'_v S_{yy} v_v = 1$, têm-se pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$F(u_v, v_v) = u'_v S_{xy} v_v - \frac{\lambda}{2} (u'_v S_{xx} u_v - 1) - \frac{\mu}{2} (v'_v S_{yy} v_v - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_v} = S_{xy} v_v - \lambda S_{xx} u_v = 0_v \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_v} = u'_v S_{xy} - \mu v'_v S_{yy} = 0'_v \rightarrow 2$$

Pré-multiplicando (1) por u'_v e pós-multiplicando (2) por v_v , resulta:

$$u'_v S_{xy} v_v = \lambda u'_v S_{xx} u_v = \mu v'_v S_{yy} v_v$$

Dado que $u'_v S_{xx} u_v = v'_v S_{yy} v_v = 1$, então $u'_v S_{xy} v_v = \lambda = \mu$. Logo, $\lambda = \mu$ é o valor máximo possível para r_{ZW} .

De (1) e (2), têm-se:

$$S_{xy} v_v = \mu S_{xx} u_v \quad (3)$$

$$S_{yx} u_v = \mu S_{yy} v_v \quad (4)$$

Sendo S_{yy} uma matriz não singular, tem-se de (4):

$$v_v = \frac{1}{\mu} S_{yy}^{-1} S_{yx} u_v \quad (5)$$

Substituindo (5) em (3), tem-se: $S_{xy} \frac{1}{\mu} S_{yy}^{-1} S_{yx} u_v = \mu S_{xx} u_v$ (6)

Pré-multiplicando ambos os membros de (6) por μS_{xx}^{-1} , tem-se:

$$[S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx} - \mu^2 I] u_v = 0_v \quad (7)$$

Com efeito, o maior autovalor μ_1^2 do produto matricial $S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$, corresponde ao quadrado do máximo valor de r_{ZW} . Os elementos do autovetor, associado ao autovalor μ_1^2 , são os coeficientes da função linear do conjunto das variáveis $X_1, X_2, \dots, X_p$. Os elementos do autovetor $v_{v1} = \frac{1}{\mu_1} S_{yy}^{-1} S_{yx} u_{v1}$ são os coeficientes da função linear das variáveis $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$. O valor máximo possível para r_{ZW} é μ_1 .

Os pares das combinações lineares W_i e V_i são denominados variáveis canônicas. O número de variáveis canônicas será igual ao posto da matriz $S_{xx}^{-1} S_{xy} S_{yy}^{-1} S_{yx}$, ou seja, o menor valor entre p e q .

As combinações lineares W_i e W_j para $(i \neq j)$ são não correlacionadas, assim como para V_i e V_j ($i \neq j$), estendendo-se a independência para W_i e V_j para $(i \neq j)$.

Godoi (1985) cita que as variáveis canônicas, ao contrário dos componentes principais, não variam pela mudança de escala.

Tatsuoka (1971) mostra que o teste de significância das variáveis canônicas, usando o critério (Λ) de Wilks (a), pode ser escrito em função de μ_i^2 (b), donde r é o menor valor entre p e q .

$$\Lambda = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 + \lambda_i)} \quad (a) \quad \Lambda = \prod_{i=1}^r (1 - \mu_i^2) \quad (b)$$

9.3.1. ANÁLISE DE CORRELAÇÃO CANÔNICA CONSIDERANDO OS MÉTODOS DE MANEJO (M1, M2, M3, M4) E AS QUATRO ESPÉCIES (E1, E2, E3, E4)

Considerando a existência de cinco variáveis que são os volumes medidos, nas cinco ocasiões OC1, OC2, OC3, OC4, OC5, nas duas populações de espécies e de métodos de manejo, foram obtidos os cinco pares de variáveis canônicas. A tabela C16, do apêndice C, apresenta o programa desenvolvido no sistema SAS para análise de correlação canônica, considerando as inter-relações entre os grupos (M1, M2, M3 e M4) versus (E1, E2, E3, E4).

A tabela 9.3.1.1 mostra que o teste geral de significância apresentou uma relação linear altamente significativa (p -valor $< 0,0001$) das ocasiões entre duas as populações.

Tabela 9.3.1.1 – Teste de significância geral da análise de correlação canônica.

Estatísticas multivariadas e aproximações da estatística F (S= 5; M = -0,5; N* = 54).					
Estatística	Valor	Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
Wilks Lambda	0,02709784	26,93	25	410,13	< 0,0001
Pillai Trace	1,18189381	7,06	25	570	< 0,0001
Hotelling-Lawley Trace	28,68651913	124,88	25	260,76	< 0,0001
Roy Greatest Root	28,45051946	648,67	5	114	< 0,0001

Tabela 9.3.1.2 - Coeficientes de correlação dos cinco pares de variáveis canônicas.

Correlação Canônica	Correlação Canônica Ajustada	Teste de H_0 : As correlações canônicas dos cinco pares são nulas.				
		Razão de Probabilidade	Aproximações do Valor F	Num GL	Den GL	Pr > F
1	0,982876	0,02709784	26,93	25	410,13	< 0,0001
2	0,326018	0,79804554	1,63	16	339,75	0,0599
3	0,282519	0,89295608	1,44	9	272,73	0,1696
4	0,151592	0,97041127	0,85	4	226	0,4919
5	0,082243	0,99323604	0,78	1	114	0,3801

Na tabela 9.3.1.2 são apresentados os valores dos coeficientes de correlação dos cinco pares de variáveis canônicas e os respectivos testes de nulidade $H_0: r_{V_i W_i} = 0$. Do resultado altamente expressivo do valor do coeficiente da correlação canônica apresentado pelas funções lineares V_1 e W_1 ($r_{V_1 W_1} = 0,982876$), depreende-se que o primeiro par de variáveis canônicas deve ser usado para explicar as inter-relações, concernentes ao comportamento dentro das ocasiões, entre o grupo das espécies versus o grupo dos métodos de manejo. Os demais pares de variáveis canônicas não apresentam importância, pois foram não significativos ($\alpha = 0,05$) para o teste de hipótese $H_0: r_{V_i W_i} = 0$.

Tabela 9.3.1.3 - Coeficientes das cinco variáveis canônicas da população Espécie.

ESP	V1	V2	V3	V4	V5
OC1	-0,64226575	5,108813586	-4,952066114	2,258133900	2,902715309
OC2	1,75069585	-4,59027763	-3,597833545	-2,812345386	0,671023990
OC3	-1,65797666	-2,18489350	2,842566157	-7,892334625	-0,18043754
OC4	0,410219689	8,496290285	1,832121098	4,6451865293	-9,34327408
OC5	0,2334971928	-3,68806721	-0,22616514	1,4392687648	8,761691969

Na tabela 9.3.1.3 são apresentados os coeficientes das cinco variáveis canônicas, V1, V2, V3, V4, V5, da população ESPÉCIE, onde se observa que para V1 os coeficientes das ocasiões OC2 e OC3 apresentaram valores absolutos superiores às das demais ocasiões, significando que contribuem mais significativamente na construção de V1. As ocasiões OC2 e OC3 apresentam sinais diferentes formando um contraste.

Tabela 9.3.1.4 - Coeficientes das cinco variáveis canônicas da população Manejo Florestal.

MM	W1	W2	W3	W4	W5
OC1	0,060216817	0,354471296	0,883643286	0,0834517268	0,0768368829
OC2	-0,19072233	-0,81376746	0,028547624	0,0726938549	-0,168580501
OC3	0,25078963	-0,40408516	-0,661500325	0,026470001	-0,922437684
OC4	-0,07918303	1,70977664	0,310897736	-1,462769623	0,6193247797
OC5	-0,03564363	-0,75020581	0,005366130	1,4576417761	0,0307107047

Na tabela 9.3.1.4 são mostrados os coeficientes das cinco variáveis canônicas, W1, W2, W3, W4, W5, da população manejo florestal, onde se observa que para W1 os coeficientes das ocasiões OC2 e OC3 apresentaram também valores absolutos superiores às das demais ocasiões, significando que OC2 e OC3 contribuem mais significativamente na construção de W1. As ocasiões OC2 e OC3 apresentam sinais diferentes (contraste).

Do exposto, tem-se o primeiro par ($V_1 * W_1$) de variáveis canônicas:

$$V1 = -0,642266OC1 + 1,750696OC2 - 1,657977OC3 + 0,41022OC4 + 0,2334971OC5$$

$$W1 = 0,0602168OC1 - 0,190722OC2 + 0,2507896OC3 - 0,079183OC4 - 0,035644OC5$$

A figura 9.3.1.1 (gráfico $V_1 * V_2$) confirma o resultado da análise de agrupamento produzido para as espécies E1, E2, E3, E4, mostrado na figura 8.1.1.3, capítulo 8, seção 8.1., item g, dendrograma do agrupamento de Ward, o qual demonstra que as espécies E1 e E2 formam um grupo distinto do estruturado pelas espécies E3 e E4.

Figura 9.3.1.1 - Agrupamento da população de Espécies (A=E1, B=E2, C=E3, D=E4).
Nota do programa SAS: 37 obs. ocultas.

A figura 9.3.1.2 (gráfico $W_1 * W_2$) confirma o resultado da análise de agrupamento realizada para os métodos de manejo M1, M2, M3 e M4, mostrado na figura 7.7.1.3, capítulo 7, seção 7.7.1., item *i*, dendrograma do agrupamento de Ward, o qual demonstra que os métodos de manejo M1 e M2 formam um grupo distinto do organizado pelos métodos M3 e M4.

Figura 9.3.1.2 - Agrupamento da população de Métodos de Manejo (A= M1, B= M2, C= M3, D= M4). Nota do programa SAS: 38 obs. ocultas.

9.4. ANÁLISE DE FATORES (AF)

Com esta análise estudam-se as relações internas de um conjunto de variáveis, substituindo-as por um número menor de variáveis hipotéticas denominadas fatores, que podem ser correlacionados (fatores oblíquos) ou não correlacionados (fatores ortogonais). Esses fatores devem explicar parte significativa da variância do conjunto das variáveis originais.

Spearman (1904) publicou pela primeira vez uma teoria sobre análise de fatores. Este autor obteve um fator “*g*” que explicaria as inter-relações de uma série de características cognitivas. Bartlett (1962) cita que a fatoração da matriz de dispersão proposta por Spearman (1904) é inadequada, pois está estruturada somente a partir de um fator comum, quando na realidade deveria ser introduzidos mais fatores no modelo.

Seja o modelo m -dimensional linear $x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}F_j + e_i$ ($i = 1, \dots, p$) que na forma matricial apresenta a seguinte formulação:

$$x_v = Af_v + e_v \quad (9.4.1)$$

A é a matriz dos pesos correspondentes a i -ésima variável resposta e ao j -ésimo fator, sendo m o número de fatores do modelo, onde $m \leq p$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{bmatrix}$$

$x'_v = [x_1, x_2, \dots, x_p]$: vetor correspondente às p variáveis respostas observadas;

$f'_v = [F_1, F_2, \dots, F_m]$: vetor correspondente aos fatores comuns (variáveis hipotéticas) aleatórios, independentes e de variâncias iguais a um;

$e'_v = [e_1, e_2, \dots, e_p]$: vetor inerente aos resíduos específicos aleatórios de média zero.

Seja $\Sigma = E(x_v x'_v) = [\sigma_{ij}]$ a matriz populacional de covariância das p variáveis respostas $x_1, x_2, \dots, x_p$, considerando as seguintes pressuposições:

$$\begin{aligned} E(f_v e'_v) &= \phi \\ E(f_v f'_v) &= I_m \\ E(e_v e'_v) &= \psi_p = \text{diag}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p) \end{aligned}$$

Pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= E(x_v x_v') = E[(Af_v + e_v)(Af_v + e_v)'] \\
 \Sigma &= E[(Af_v + e_v)(f_v' A' + e_v')] \\
 \Sigma &= AE(f_v f_v') A' + E(e_v e_v') \\
 \Sigma &= AA' + \psi
 \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

Portanto, conclui-se que a matriz de covariância de $x_v' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ sob o modelo fatorial $x_v = Af_v + e_v$, é:

$$\Sigma = AA' + \psi$$

Denotando que:

$$\begin{aligned}
 V(x_i) &= \sigma_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{im}^2 + \psi_i \\
 Cov(x_i, x_j) &= \sigma_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{im}a_{jm}
 \end{aligned}$$

Os elementos diagonais da matriz AA' são denominados de comunalidades das variáveis respostas $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Da expressão 9.4.2., tem-se: $\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = \sigma_{ii} - \hat{\psi}_i$.

Desta maneira, se as pressuposições citadas anteriormente forem atendidas, então os parâmetros a_{ij} corresponderão às covariâncias entre x_i e F_j , entretanto, se Σ exprimir a matriz das correlações entre as variáveis observáveis, então os valores de a_{ij} expressarão os coeficientes de correlação entre x_i e F_j , pois:

$$\begin{aligned}
 Cov(x_v, f_v') &= E[(Af_v + e_v)f_v'] \\
 Cov(x_v, f_v') &= AE(f_v f_v') + E(e_v f_v') \\
 Cov(x_v, f_v') &= A
 \end{aligned}$$

Quando os fatores comuns forem correlacionados (oblíquos) ou apresentarem variâncias não unitárias, a matriz de covariância de x_v sob o modelo fatorial 9.4.1 será dada por:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= A\Gamma A' + \psi \\
 \Gamma &= E(f_v f_v')
 \end{aligned} \tag{9.4.3}$$

As equações 9.4.1, 9.4.2 e 9.4.3 são invariantes para transformações ortogonais não singulares dos fatores. Essas expressões não são alteradas quando da substituição de:

$$f_v \text{ por } Mf_v, A \text{ por } AM', \Gamma \text{ por } M\Gamma M'$$

M : é uma matriz ortogonal de ordem correspondente ao número de fatores.

Comprovações:

$$\begin{aligned}x_v &= AM'(Mf_v) + e_v = A(M'M)f_v + e_v = Af_v + e_v \\ \Sigma &= (AM')(MA') + \psi = AA' + \psi \\ \Sigma &= AM'(M\Gamma M')MA' + \psi = A'(M'M)\Gamma(M'M)A' + \psi = A\Gamma A' + \psi\end{aligned}$$

No uso da análise de fatores (AF), após verificar a multinormalidade dos dados, é importante efetuar os seguintes procedimentos:

O primeiro consiste em identificar na matriz de correlação o número de correlações que são estatisticamente diferentes de zero. Hair et al. (2009) citam que para aplicar a análise de fatores, o número de correlações com valores menores que 0,30 não deve ser grande. Por outro lado, Fávero et al. (2009) observam que as variáveis com alta correlação tendem a ser incluídas no mesmo fator.

O segundo passo é obter a estatística de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) que de acordo com Maroco (2007) compara as correlações simples com as correlações parciais entre as variáveis. A estatística de KMO é dada pela fórmula 9.4.4, onde r_{ij} é o coeficiente de correlação entre as variáveis e a_{ij} é o coeficiente de correlação parcial.

$$KMO = \frac{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} a_{ij}^2} \quad (9.4.4)$$

Tabela 9.4.1 - Estatística KMO (Kaiser-Meyer-Olkin)

KMO	Análise de Fatores	KMO	Análise de Fatores
1,0 – 0,9	Muito boa	0,6 – 0,7	Razoável
0,8 – 0,9	Boa	0,5 – 0,6	Má
0,7 – 0,8	Média	< 0,5	Inaceitável

Os valores da estatística KMO variam de 0 a 1 e, segundo Fávero et al. (2009), quanto mais próximo da unidade mais recomendável é a aplicação da análise de fatores. Citam os intervalos de análise dos valores de KMO, tabela 9.4.1, e concluem que os valores iguais ou inferiores a 0,6 indicam que aplicação da análise de fatores pode ser inadequada.

O terceiro procedimento é aplicar o teste de esfericidade de Bartlett. Este critério mostra a probabilidade estatística da matriz de correlação de apresentar correlações significantes, em pelo menos algumas variáveis, pois, se a matriz for igual à matriz identidade, então não tem sentido usar a técnica de análise de fatores. Mingoti (2005) apresenta a estatística T de Bartlett para testar a esfericidade da matriz de correlação. Sob a hipótese nula, para grandes amostras de tamanho N , a estatística T tem uma distribuição aproximadamente qui-quadrado com $\nu = \frac{1}{2} p(p-1)$ graus de liberdade.

$$T = -[N - \frac{1}{6}(2p + 1)](\sum_{i=1}^p \lambda_i)$$

O quarto passo, de acordo com Fávero et al. (2009), é verificar se a matriz de correlação anti-imagem contém os valores negativos das correlações parciais. É uma forma de obter indícios sobre a necessidade de eliminar variáveis do modelo. A diagonal da matriz anti-imagem fornece os valores de MSA (Measure of Sampling Adequacy):

$$MSA = \frac{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2}$$

Fávero et al. (2009) citam que quanto maiores forem os valores de MSA, melhor será o uso da análise de fatores. Se uma variável apresentar baixo valor na diagonal principal e alto valor fora dela, há indicativo de excluí-la do modelo, mas também ressaltam que, por vezes, a baixa correlação de determinada variável com as demais, não necessariamente, implica na sua eliminação, uma vez que essa variável pode representar um fator isoladamente.

9.4.1. ANÁLISE DE FATORES PELO MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Lawley (1940) aborda originalmente o problema da estimação na análise de fatores, tornando-a um método estatístico propriamente dito. Este autor emprega o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo fatorial $x_v = Af_v + e_v$, mostrando que as estimativas dos pesos fatoriais $\hat{A}$ e as estimativas das variâncias específicas $\hat{\psi}$, tal que $E(e'_v e_v)$, são soluções das seguintes equações matriciais implícitas:

$$\begin{cases} \hat{\psi} = \text{diag}(S - A'A) \\ S\hat{\psi}^{-1}A = \hat{A}(I + \hat{A}'\hat{\psi}^{-1}\hat{A}) \end{cases}$$

O método de estimadores de máxima verossimilhança consiste em adotar como estimativas dos parâmetros, os valores que maximizam a probabilidade (variável discreta) ou a densidade de probabilidade (variável contínua) de ser obtida a amostra observada. É necessário para obter os estimadores de máxima verossimilhança conhecer a distribuição da variável de interesse. Para obter os estimadores de máxima verossimilhança é necessário obter a função de máxima verossimilhança.

Seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x, \theta)$, sendo θ o parâmetro desconhecido. Considere uma amostra aleatória simples da variável X de tamanho n e $x_1, x_2, \dots, x_n$ os valores observados. A função de verossimilhança L é definida como:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Na aplicação do método da máxima verossimilhança na análise de fatores, considera-se que o vetor dos fatores comuns f_v e o vetor dos resíduos específicos e_v são independentes e multinormalmente distribuídos, com vetor de médias nulas (sem perda de generalidade), e respectivamente, com matrizes de covariâncias ${}_m I_m$ e ${}_p \hat{\psi}_p$.

Não obstante, sendo x_v formado por funções lineares de f_v e e_v , então x_v é multinormalmente distribuído com matriz de covariâncias $\Sigma = AA' + \psi$ e, sem perda de generalidade, com vetor de médias nulo.

Seja $S = [s_{ij}]$ a matriz de covariância amostral, tal que $E(S) = \Sigma$, originada de uma amostra aleatória com $N > p$ observações de x_v . Então, segundo Anderson (1958), os elementos de S ou de nS seguem a distribuição de Wishart, equação 9.4.1.1, com $n = N - 1$ graus de liberdade.

$$f(S) = c |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n} \exp[-\frac{1}{2}n \text{tr}(S \Sigma^{-1})] \quad (9.4.1.1)$$

Como o logaritmo é uma função monotônica crescente, os valores dos parâmetros que maximizam a função de máxima verossimilhança $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, também maximizam a função $\text{Ln}L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$.

Seja o logaritmo natural (neperiano) da função de verossimilhança, somente com informações denotadas por S , omitindo-se os termos independentes A e Ψ :

$$\text{Ln}L(A, \psi) = -\frac{1}{2}n[\text{Ln}|\Sigma| + \text{tr}(S \Sigma^{-1})] \quad (9.4.1.2)$$

De acordo com Lawley e Maxwell (1971), maximizar $\text{Ln}L(A, \psi)$ é equivalente a minimizar F_m , pois $\text{Ln}L(A, \psi)$ é $-\frac{1}{2}n$ vezes F_m mais uma função (constante) de observações. O índice m indica o número de fatores.

$$F_m = \text{Ln}|\Sigma| + \text{tr}(S \Sigma^{-1}) - \text{Ln}|S| - p \quad (9.4.1.3)$$

A diferenciação da expressão 9.4.1.3 com respeito a A e Ψ resulta no seguinte sistema de equação matricial:

$$\frac{\partial F_m}{\partial A} = 2 \Sigma^{-1} (\Sigma - S) \Sigma^{-1} A \quad (9.4.1.4)$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial \psi} = \text{Diag}[\Sigma^{-1} (\Sigma - S) \Sigma^{-1}] \quad (9.4.1.5)$$

Lawley e Maxwell (1971) recomendam a utilização de um procedimento em duas etapas para a determinação do mínimo da função F_m . A primeira etapa consiste em calcular o mínimo condicional para $F_m(\psi)$, onde Ψ é uma matriz fixa e sob a condição de que $\Delta = A' \psi^{-1} A$ seja diagonal.

Igualando a zero a expressão 9.4.1.4 e pré-multiplicando pela matriz Σ , tem-se:

$$(\Sigma - S) \Sigma^{-1} A = \phi \quad (9.4.1.6)$$

Seja o lema definido pela expressão 9.4.1.7, onde $\Delta = A' \psi^{-1} A$, o qual pode ser comprovado pós-multiplicando 9.4.1.7 por $AA' + \psi$.

$$\Sigma^{-1} = \psi^{-1} - \psi^{-1} A (I + \Delta)^{-1} A' \psi^{-1} \quad (9.4.1.7)$$

Pós-multiplicando, 9.4.1.7, pela matriz A , resulta:

$$\Sigma^{-1} A = \psi^{-1} A (I + \Delta)^{-1} \quad (9.4.1.8)$$

Logo, pode-se escrever a expressão 9.4.1.6 da seguinte forma:

$$(\Sigma - S) \psi^{-1} A (I + \Delta)^{-1} = \phi \quad (9.4.1.9)$$

Pós-multiplicando a expressão 9.4.1.9 pela matriz $(I + \Delta)$ e substituindo a matriz Σ por $AA' + \psi$, tem-se:

$$S \psi^{-1} A = A (I + \Delta) \quad (9.4.1.10)$$

Finalmente, pré-multiplicando 9.4.1.10 por $\Psi^{-\frac{1}{2}}$, resulta:

$${}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} S \Psi^{-\frac{1}{2}}) {}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} A) {}_m = {}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} A) {}_m (I + \Delta) {}_m \quad (9.4.1.11)$$

Impondo a condição de que a matriz $\Delta = A' \psi^{-1} A$ seja diagonal, então a expressão 9.4.1.11 é um sistema de equações, donde ${}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} A) {}_m$ é a matriz com colunas iguais aos vetores característicos da matriz $S^* = {}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} S \Psi^{-\frac{1}{2}}) {}_p$, assim como ${}_m(I + \Delta) {}_m$ é a matriz diagonal correspondente aos seus maiores valores característico (próprios).

Seja $\theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ a matriz das m maiores raízes características de $S^* = {}_p(\Psi^{-\frac{1}{2}} S \Psi^{-\frac{1}{2}}) {}_p$, supondo-as distintas e maiores que a unidade, arranjadas na ordem decrescente e associadas respectivamente à matriz de vetores característicos $W = (w_{v1}, w_{v2}, \dots, w_{vm})$, na forma normalizada ($W'W = I$), satisfazendo $S^*W = W\theta$.

Fazendo-se:

$\psi^{-\frac{1}{2}}A_0 = W(\theta - I)^{\frac{1}{2}}$ e $\Delta = A_0'\psi^{-1}A_0$, obtém-se de 9.4.1.11:

$$S^*W(\theta - I)^{\frac{1}{2}} = W(\theta - I)^{\frac{1}{2}}\theta \quad (9.4.1.12)$$

Pós-multiplicando 9.4.1.12 pela matriz diagonal $(\theta - I)^{-\frac{1}{2}}$, tem-se:

$$S^*W = W\theta \quad (9.4.1.13)$$

Portanto, pode-se escrever que:

$$A_0 = \psi^{\frac{1}{2}}W(\theta - I)^{\frac{1}{2}} \quad (9.4.1.14)$$

Essa conceituação não é válida quando pelo menos dois valores próprios são iguais, pois os correspondentes vetores próprios são indeterminados, e também quando pelo menos uma das raízes característica é menor do que a unidade, o que corresponderia a ter elementos imaginários na matriz A_0 .

Lawley e Maxwell (1971) mostram que $A_0 = \psi^{\frac{1}{2}}W(\theta - I)^{\frac{1}{2}}$ minimiza a função 9.4.1.3, dada por: $F_m = Ln|\Sigma| + tr(S\Sigma^{-1}) - Ln|S| - p$. A segunda etapa consiste em determinar $\hat{\psi}$ que a minimize.

Igualando a zero a expressão 9.4.1.5 e usando a identidade 9.4.1.7, tem-se:

$$\hat{\psi} = diag(S - A_0A_0') \quad (9.4.1.15)$$

Resume-se que, o método de análise de fatores de máxima verossimilhança, onde $F_m(\psi)$ seja mínimo, consiste em calcular:

$$\hat{A} = \hat{\psi}^{\frac{1}{2}}W(\theta - I)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\psi} = diag(S - \hat{A}'\hat{A})$$

Os procedimentos e demonstrações nas obtenções de $\hat{A}$ e $\hat{\psi}$ mostram que é operacionalmente mais fácil minimizar a expressão $F_m = Ln|\Sigma| + tr(S\Sigma^{-1}) - Ln|S| - p$ do que maximizar $LnL(A, \psi) = -\frac{1}{2}n[Ln|\Sigma| + tr(S\Sigma^{-1})]$.

Usando a restrição de que $A'\psi^{-1}A$ seja diagonal, o sistema é resolvido de maneira iterativa. Do ponto de vista computacional, as estimativas de $\hat{A}$ e $\hat{\psi}$ são obtidas por procedimentos iterativos, ressaltando que nem sempre ocorrem convergências.

Queiroz (1984) desenvolveu um programa computacional, em linguagem FORTRAN, para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos pesos fatoriais e variâncias específicas, utilizando o processo de Newton-Raphson, para minimizar a função 9.4.1.3, posta em função das m maiores raízes características da matriz $\psi^{-\frac{1}{2}}S\psi^{-\frac{1}{2}}$.

9.4.2. TESTE DE HIPÓTESE PARA DETERMINAR O NÚMERO DE FATORES (M) ADEQUADO PARA REPRODUZIR O MODELO (MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA)

A mais importante vantagem do método de máxima verossimilhança é verificar se um determinado número de fatores m está adequado para reproduzir o modelo.

Segundo Bartlett (1954), quando H_0 é verdadeiro a variável:

$U_m = (n - \frac{2p+5}{6} - \frac{2}{3}m)(\text{Log}_e|\hat{\Sigma}| - \text{Log}_e|S|)$ é aproximadamente $\chi^2_{(v,\alpha)}$, onde:

$$\hat{\Sigma} = AA' + \hat{\psi} \quad v = \frac{1}{2}[(p-m)^2 - p - m]$$

9.4.3. ESTIMAÇÃO DOS ESCORES DOS FATORES

Os escores fatoriais não são estimados no sentido estatístico usual, pois não são parâmetros do modelo de fatores, mas valores atribuídos às variáveis hipotéticas. Há a necessidade de atribuir um princípio de quadrados mínimos para predizer os escores dos fatores. O método de THOMSON (1951) consiste em obter m regressões lineares de f_v sobre x_v e escolher o estimador linear $\hat{f}_v = Ax_v$ que minimize $E(\hat{f}_v - f_v)^2$:

$$\hat{f}_v = (I_m + A' \psi^{-1} A)^{-1} A' \psi^{-1} x_v \quad x'_v = [x_1, x_2, \dots, x_p] : \text{vetor das observações}$$

Generalizando para a matriz F de ordem $N \times n$ dos escores fatoriais e X a matriz $n \times p$ das observações, tem-se: $F = X\psi^{-1}A(I_m + A' \psi^{-1} A)^{-1}$.

9.4.4. METODOLOGIA DOS ÍNDICES NORMALIZADOS

De acordo com Queiroz (1984), o índice normalizado é definido como o módulo da resultante da soma vetorial dos escores fatoriais ponderados pela contribuição (p_j) do respectivo fator à comunalidade total. Os valores obtidos são divididos pelo de maior magnitude, implicando numa normalização entre 0 e 1. A justificativa da aplicação desses índices deve-se ao fato dos fatores serem ortogonais. A Figura 9.4.4.1 mostra a representação gráfica do índice normalizado. A expressão 9.4.4.1 representa o exposto:

$$I_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m p_j f_{ij}^2} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.4.4.1)$$

Figura 9.4.4.1 - Representação gráfica do índice normalizado

9.4.5. ANÁLISE DE FATORES POR COMPONENTES PRINCIPAIS

São as combinações lineares, componentes principais, das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_p$. Tal que b_{ij} são os valores dos autovetores da matriz de correlações ou de covariâncias.

$$\begin{aligned} Z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1p}x_p \\ Z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2p}x_p \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ Z_p &= b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pp}x_p \end{aligned}$$

A transformação dos valores de x_v para os valores de Z_v é ortogonal. Manly (2008) cita que o relacionamento inverso é simplesmente:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}Z_1 + b_{21}Z_2 + \dots + b_{p1}Z_p \\ x_2 &= b_{12}Z_1 + b_{22}Z_2 + \dots + b_{p2}Z_p \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_p &= b_{1p}Z_1 + b_{2p}Z_2 + \dots + b_{pp}Z_p \end{aligned}$$

O método considera os m primeiros componentes. O valor de e_i se torna uma combinação linear dos componentes principais de Z_{m+1} a Z_p .

$$\begin{aligned}x_1 &= b_{11}Z_1 + b_{21}Z_2 + \dots + b_{m1}Z_m + e_1 \\x_2 &= b_{12}Z_1 + b_{22}Z_2 + \dots + b_{m2}Z_m + e_2 \\&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_p &= b_{1p}Z_1 + b_{2p}Z_2 + \dots + b_{mp}Z_m + e_p\end{aligned}$$

O próximo passo é escalonar os componentes $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ para, como exigido pela análise de fatores (AF), ter variâncias unitárias. Manly (2008) cita que a divisão de Z_i pelo seu desvio padrão, raiz quadrada do correspondente autovalor da matriz de correlações, por exemplo, escalona os componentes $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ para terem variâncias unitárias e atender a (AF).

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{\lambda_1}b_{11}F_1 + \sqrt{\lambda_2}b_{21}F_2 + \dots + \sqrt{\lambda_m}b_{m1}F_m + e_1 \\x_2 &= \sqrt{\lambda_1}b_{12}F_1 + \sqrt{\lambda_2}b_{22}F_2 + \dots + \sqrt{\lambda_m}b_{m2}F_m + e_2 \\&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_p &= \sqrt{\lambda_1}b_{1p}F_1 + \sqrt{\lambda_2}b_{2p}F_2 + \dots + \sqrt{\lambda_m}b_{mp}F_m + e_p\end{aligned}$$

$$F_i = \frac{Z_i}{\sqrt{\lambda_i}} \rightarrow Z_i = \sqrt{\lambda_i}F_i;$$

$\sqrt{\lambda_i}$: é a raiz quadrada do correspondente autovalor, por exemplo, da matriz de correlação que é o desvio padrão de Z_i .

Fazendo-se $a_{ij} = \sqrt{\lambda_j}b_{ji}$, tem-se o modelo não rotacionado:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \dots + a_{1m}F_m + e_1 \\x_2 &= a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \dots + a_{2m}F_m + e_2 \\&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_p &= a_{p1}F_1 + a_{p2}F_2 + \dots + a_{pm}F_m + e_p\end{aligned}$$

Aplicando-se uma determinada rotação, por exemplo, varimax, tem-se uma nova solução:

$$\begin{aligned}x_1 &= g_{11}F_1^* + g_{12}F_2^* + \dots + g_{1m}F_m^* + e_1 \\x_2 &= g_{21}F_1^* + g_{22}F_2^* + \dots + g_{2m}F_m^* + e_2 \\&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\x_p &= g_{p1}F_1^* + g_{p2}F_2^* + \dots + g_{pm}F_m^* + e_p\end{aligned} \tag{9.4.5.1}$$

Os valores do i -ésimo fator, não rotacionado, são justamente os valores do i -ésimo componente principal após eles terem sido escalonados para terem uma variância igual a um.

De acordo com Manly (2008), os valores dos fatores rotacionados são mais complicados de obter, mas podem ser dados pela equação matricial $F^* = XG(G'G)^{-1}$.

F^* : é uma matriz $n \times m$ contendo os valores para os m fatores rotacionados em suas colunas;

X : é uma matriz $n \times p$ dos dados originais para as p variáveis das n observações, após transformar as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_p$ para média zero e variância unitária;

G : é uma matriz $p \times m$ das cargas fatoriais rotacionados de acordo com 9.4.5.1.

9.4.6. MÉTODOS DE ROTAÇÃO DOS FATORES

Um procedimento importante na interpretação de fatores é a rotação fatorial. Por este método, os eixos de referência dos fatores são rotacionados em torno da origem até que alguma outra posição seja alcançada. O caso mais simples é a rotação ortogonal, na qual os eixos são mantidos a 90° . Também é possível rotacionar os eixos sem manter o ângulo de 90° entre os eixos de referência. Este procedimento de rotação se chama rotação oblíqua.

Hair et al. (2009) citam que o efeito final de rotacionar a matriz fatorial é redistribuir a variância dos primeiros fatores para os últimos com o objetivo de atingir um padrão fatorial mais simples e teoricamente mais significativo. Comentam também que as soluções de fatores não-rotacionadas extraem fatores na ordem de sua importância. O primeiro fator tende a ser um fator geral com quase todas as variáveis com carga significativa, explicando a quantia maior de variância. O segundo fator e os seguintes são então baseados na quantia residual de variância. Cada fator explica porções sucessivamente menores de variância.

Fávero et al. (2009) citam que dos métodos rotacionais ortogonais, merecem destaque o varimax, o quartimax e o equamax. O método varimax minimiza a ocorrência de uma variável possuir altas cargas fatoriais para diferentes fatores. Ele simplifica a interpretação dos fatores. A rotação varimax é o método mais utilizado em análise de fatores.

O método quartimax objetiva minimizar o número de fatores necessários para explicar cada variável. Corrar et al. (2007) citam que o quartimax tende a concentrar grande parte das variáveis em um único fator, o que pode resultar na produção de estruturas de difícil interpretação.

O equamax é também um método que busca uma combinação dos outros (varimax e quartimax). Fávero et al. (2009) citam que o equamax tem como objetivo simplificar as linhas e as colunas simultaneamente, ou seja, resulta na simplificação dos fatores e das variáveis.

9.4.7. ANÁLISE DE FATORES, PELO MÉTODO DOS COMPONENTES PRINCIPAIS, PARA QUATRO ESPÉCIES (E1, E2, E3, E4) EM RELAÇÃO ÀS VARIÁVEIS (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5).

Não foi possível, no exemplo, como era o objetivo deste livro, analisar os dados pelo método da máxima verossimilhança, pela sua grande característica de ser um método estatístico, devido ter ocorrido soluções impróprias, tendo em vista o fato de ocorrer variâncias específicas negativas. Usando o comando (proc factor nfact=1 method=ml mineigen = 0.0001 out=prova3;) no programa desenvolvido, o resultado da análise expediou a mensagem: (ERROR: Communality greater than 1.0), ou seja, comunalidade maior do que 1,0.

A opção mineigen = λ especifica o valor do critério, ou seja, os autovalores menores que λ não serão considerados na análise. A tabela C14, do apêndice C, apresenta o programa desenvolvido no SAS para as análises de componentes principais e de fatores das espécies.

a) Matriz de correlação das variáveis (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5)

Na tabela 9.4.7.1 é mostrado que todas as correlações apresentaram resultados significativos (p -valor > 0,01), sendo as correlações entre as ocasiões diferentes de zero.

Tabela 9.4.7.1 - Matriz de correlação de (OC1, OC2, OC3, OC4, OC5).

Coeficiente de correlação de Pearson, N = 120, Prob > r Sob H0: Rho=0					
	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
OC1	1,00000	0,28874 0,0014	0,42286 < 0,0001	0,28149 0,0018	0,26303 0,0037
OC2	0,28874 0,0014	1,00000	0,91060 < 0,0001	0,96935 < 0,0001	0,95130 < 0,0001
OC3	0,42286 < 0,0001	0,91060 < 0,0001	1,00000	0,95820 < 0,0001	0,95361 < 0,0001
OC4	0,28149 0,0018	0,96935 < 0,0001	0,95820 < 0,0001	1,00000	0,99242 < 0,0001
OC5	0,26303 0,0037	0,95130 < 0,0001	0,95361 < 0,0001	0,99242 < 0,0001	1,00000

b) Autovalores da matriz de correlação

A tabela 9.4.7.2 mostra que o primeiro autovalor explica 79,99 % da variação total e o segundo 17,78 % , totalizando 97,77%, enquanto que os demais somam apenas 2,23 %.

Tabela 9.4.7.2 - Autovalores da matriz de correlação.

Autovalores da matriz de correlação: Total = 5 e Média = 1					
	Autovalor (λ_i)	$Ln(\lambda_i)$	Diferença	Proporção	Acumulado
1	3,99949056	1,386167	3,11034875	0,7999	0,7999
2	0,88914181	-0,117499	0,80876697	0,1778	0,9777
3	0,08037485	-2,521054	0,05405550	0,0161	0,9938
4	0,02631935	-3,637451	0,02164592	0,0053	0,9991
5	0,00467343	-5,365862		0,0009	1,0000
Total		-10,255699			

c) Cálculo do KMO e do teste de esfericidade de Bartlett.

O teste de Kaiser-Meyer-Olkin (Measure of Sampling Adequacy-MSA) mostra o grau de explicação dos dados considerando os fatores encontrados. Um grau de explicação menor que (0,6) indica que os fatores obtidos não conseguiram explicar adequadamente as variações dos dados originais. Os valores da estatística KMO variam de 0 a 1 e segundo Fávero et al. (2009) quanto mais próximo da unidade mais recomendável é a aplicação da análise de fatores. O valor obtido de 0,74910545, tabela 9.4.7.3, mostra uma classificação média de acordo com a tabela 9.4.1.

Tabela 9.4.7.3 – Medida de Adequação da Amostragem de Kaiser (MSA).

Medida de Adequação da Amostragem de Kaiser: MSA Geral = 0,74910545				
OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
0,47883069	0,79052135	0,81752638	0,68364487	0,78460597

A matriz Anti-imagem indica o poder de explicação dos fatores em cada uma das variáveis. Os valores de MSA para cada variável, apresentados na tabela 9.4.7.3, correspondem aos valores diagonais dessa matriz. Observa-se que o valor de MSA da variável OC1 é igual a 0,47883069. Os valores menores que (0,5) indicam pouco poder de explicação dos fatores e podem ser retirados da análise. Entretanto, por tratar-se de um levantamento longitudinal, tal procedimento não seria recomendável.

De acordo com Mingoti (2005), seja a estatística T de Bartlett para testar a esfericidade da matriz de correlação, que sob H_0 , para grandes amostras de tamanho N, tem uma distribuição aproximadamente qui-quadrado com $\nu = \frac{1}{2} p(p-1)$ graus de liberdade.

$$T = -[N - \frac{1}{6}(2p+1)](\sum_{i=1}^p \lambda_i)$$

$$T = -[120 - \frac{1}{6}(2 \times 5 + 1)] \times 10,255699 = 1.194,7886$$

$$\nu = \frac{1}{2} p(p-1) = 10 \quad \chi_{10;0,01} = 23,2$$

Conclusão: rejeita-se a hipótese de que a matriz de correlação seja esférica.

d) Pesos fatoriais padrão e rotacionados pelo método Varimax

Os valores dos pesos do primeiro fator padrão (Factor1), tabela 9.4.7.4, mostram que o fator1 é explicado pelas ocasiões OC2, OC3, OC4 e OC5, enquanto que o segundo fator (Factor2), expressa a ocasião OC1. Em relação aos fatores rotacionados, pelo método de rotação varimax, verifica-se a mesma interpretação dos fatores padrão.

Tabela 9.4.74 - Pesos fatoriais padrão e rotacionado (Varimax)

	Fator padrão		Fator padrão rotacionado		Estimativas comunalidade
	Factor1	Factor2	Factor1	Factor2	
OC1	0,40982	0,91155	0,15523	0,98731	0,99888264
OC2	0,96700	-0,12314	0,96529	0,13593	0,95025738
OC3	0,97882	0,03120	0,93603	0,28794	0,95906634
OC4	0,98816	-0,13644	0,98920	0,12868	0,99506893
OC5	0,98076	-0,15317	0,98647	0,11059	0,98535709
Total					4,88863238
Variância explicada por cada fator					
	3,9994906	0,8891418	3,7836739	1,1049585	

A figura 9.4.7.1 apresenta, e de modo similar ao que ocorreu nos resultados das análises multivariadas já realizadas, uma discriminação dos dados, mostrando um perfeito agrupamento das espécies em dois clusters, o primeiro grupo formado pelas espécies E1 e E2, e o segundo pelas espécies E3 e E4. Estes resultados são os mesmos apresentados na figura 8.1.1.3, capítulo 8, seção 8.1, item g, dendrograma do agrupamento de Ward, onde as espécies E1 e E2 formam um grupo distinto do grupo das espécies E3 e E4.

Figura 9.4.7.1 - Distribuição das espécies, (A = E1, B = E2, C = E3, D = E4), de acordo com os fatores 1 e 2 (Factor Pattern).

Os valores dos índices normalizados podem ser obtidos conforme a expressão 9.4.4.1, mas considerando que a estrutura do banco está baseada nas variáveis ocasiões, e que estas não apresentam um interesse prático na montagem de um mapa de pós-estratificação multidimensional, então os valores dos índices não foram calculados. Entretanto, caso fosse aplicada essa metodologia, a equação considerando os fatores factor1 e factor2 teria a seguinte formulação:

$$I_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m p_j f_{ji}^2} = \sqrt{(0,8181 \times f_{1i}^2 + 0,1819 \times f_{2i}^2)}$$

$$p_1 = \frac{3,9994906}{3,9994906 + 0,8891418} = 0,8181 \quad p_2 = \frac{0,8891418}{3,9994906 + 0,8891418} = 0,1819$$

f_{1i} : valor de factor1 obtido na i -ésima parcela;

f_{2i} : valor de factor2 obtido na i -ésima parcela;

$j = 1, 2, \dots, m = 2$ e $i = 1, 2, \dots, N = 120$.

Queiroz (1984) efetuou a análise de fatores, pelo método da máxima verossimilhança, usando o modulo da resultante da soma vetorial dos escores dos fatores, na pós-estratificação multidimensional de uma área localizada na Floresta Nacional do Tapajós, no Estado do Pará. O estudo envolveu seis variáveis, três dendrométricas e três referentes ao potencial madeireiro ocorrente de três classes de espécies de acordo com a sua importância econômica. De acordo com o teste de verificação da suficiência do número de fatores, quatro fatores foram aceitáveis para reprodução do modelo. O fator2 evidenciou a distribuição volumétrica das espécies pertencentes ao grupo ou classe I, o fator3 explicou a ocorrência volumétrica das espécies da classe II, enquanto que o fator4 caracterizou a distribuição do potencial madeireiro do grupo de espécies III. Esses resultados propiciaram a elaboração de um mapa com a localização (estratificação) desses três grupos de espécies, o que possibilitaria, por exemplo, a elaboração do planejamento da exploração desses tipos florestais.

Considerações Finais

O foco principal deste livro foi discutir técnicas de análise de perfil de inventário florestal contínuo. Contudo, considerando a enorme importância da análise multivariada, no contexto da disciplina Inventário Florestal, principalmente em florestas naturais, optou-se em acrescentar mais um capítulo abrangendo algumas noções sobre os métodos de componentes principais, análise discriminante, análise de correlação canônica e análise de fatores. A execução do Inventário Florestal Nacional (IFN) do Brasil e as necessidades de informações multidimensionais, na elaboração de planos de manejo florestal, exigem dos estudantes uma formação mais aprimorada em métodos estatísticos, tendo em vista que, além das variáveis dendrométricas e florísticas, observações sobre as condições edafoclimáticas, em especial sobre as características do solo, incluindo o uso da terra, assim como as informações socioeconômicas da região e outras variáveis de interesse coletadas, resultam na necessidade de analisar um diversificado banco de dados multidimensional.

Neste livro, as observações analisadas foram simuladas procurando uma adequação com a realidade de uma floresta natural, devido à impossibilidade de acessar um banco de dados compatível com as exigências da modelagem matemática requerida pelos levantamentos longitudinais, e assim atender as especificações demandadas pelos exemplos apresentados nos capítulos 7 e 8. Mas, por outro lado, considerando o caráter didático a que se propõe esta obra, acredita-se que os exemplos citados com os quatro métodos de manejo e as quatro espécies, atenderam aos objetivos estabelecidos.

No entanto, apesar de os dados utilizados não apresentarem características ideais, para produzir exercícios práticos mais apropriados sobre as técnicas multidimensionais de componentes principais, análise de fatores, análise de correlação canônica e análise discriminante, pois foram estruturados para realizar as análises de perfil dos exemplos citados nos capítulos 7 e 8, os exercícios apresentados no capítulo 9, considerando o caráter didático proposto neste livro, abrangendo os quatro métodos de manejo e as quatro espécies, atenderam aos objetivos propostos, pois resultados interessantes ocorreram nas análises.

As análises foram realizadas por meio de programas desenvolvidos usando a linguagem de programação de análise estatística SAS, dadas às facilidades operacionais e à amplitude nas análises oferecidas por este sistema.

Espera-se que com o desenvolvimento do Inventário Florestal Nacional (IFN-BR) e o avanço do manejo florestal em concessões florestais nas florestas públicas, e outras iniciativas no campo dos inventários florestais contínuos, essas contribuições possam ser úteis, assim como contribuam para o aprendizado dos estudantes e profissionais que labutam na área de inventário florestal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, D. F. & SINGER, J. M. Análise de dados longitudinais. **VII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**. Campinas – SP, 1986. 106 p.
- ANDERSON, T.W. **An introduction to multivariate Statistical Analysis**. New York: John Wiley e Sons, 1958. 374 p.
- BARTLETT, M.S. **Factor analysis in psychology as a statistician see it, in essays on probability and Statistics**. New York, Wiley. 1962.
- BARTLETT, M.S. 'A note on the multiplying factor for various χ^2 approximations', **J. R. Static. Soc.**, B 16, 296-298. 1954.
- BOX, G. E. P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**. 36, 317-346. 1949.
- BOX, G. E. P. Problems in the analysis of growth and wear curves. **Biometrics**, 6: 362-389. 1950.
- BOX, G. E. P. Some theorems on quadratic forms applied to the study of analysis of variance problems. **Annals of the Mathematical Statistics**. 25, 290-302, 484 – 498. 1954.
- COLLIER, R.O.; BAKER, F.B.; MANDEVILLE, G.R.; HAYES, T.F. Estimates of test size for several test procedures based on convention variance ratios in the repeated measures design. **Psychometrika**, 32, 339-353. 1967.
- COOK, R. D. & TSAI, C. L. Residual in nonlinear regression. **Biometrika**. London, v.72, p. 23-29, 1985.
- CORRAR, L. J.; PAULO, E.; DIAS FILHO, J. M.(Coordenadores). **Análise multivariada para os cursos de administração, ciências contábeis e economia**. São Paulo: Atlas, 2007.
- DRAPER, N. R. & SMITH, H. **Applied regression analysis**. 2nd. ed. New York: John Wiley, 1981. 709 p.
- DUARTE, J. B. **Introdução às inversas generalizadas de matrizes de aplicação comum em estatística experimental**. Texto didático produzido durante o curso de Álgebra de Matrizes, na Escola Superior de Agricultura 'Luiz de Queiroz' / USP, Piracicaba, SP, em 1996.
- DRAPER, N. R & SMITH, H. **Applied regression analysis**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1981. 709 p.
- FARHADIAN, R. & ASADIAN, N. On the Helmert and application in stochastic processes. **International Journal of Mathematics and Computer Science**, 12, n. 2, 107-115. 2017.

FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P.; SILVA, F. L.; CHAM, B. L. **Análise de dados: modelagem multivariada para tomada de decisão**. São Paulo: Campus, 2009. 646 p.

FERREIRA, F. F. **Recursos computacionais utilizando R**. Departamento de ciências exatas da Universidade Federal de Lavras. Lavras-Minas Gerais- Brasil, 2013. 240 p.

FERREIRA, F. F. **Estatística multivariada**. 2. ed. rev. e ampliada- Lavras: Ed. UFLA, 2011. 675 p.

FISHER, R. A. The use of multiple measurements in taxonomic problems, **Annals of Eugenics**, 7 (1936),179-188.

FLEMMING, D. M & GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 464 p.

GALLANT, A. R. **Nonlinear statistical models**. New York: John Wiley, 1987. 611p.

GONÇALVES, M. B & FLEMMING, D. M. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2. Ed. São Paulo: Pearson, Prentice Hall. 2007. 435 p.

GEISSER, S. & GREENHOUSE, S. W. An extension of Box's results on the use of F distribution in multivariate analysis. **Ann. Math. Statist.**, 29, 855-891. 1958.

GODOI, C. R. M. **Análise estatística multidimensional**. 1º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica. 3º Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria. Piracicaba- São Paulo. 1985.

GOMES, F. P. & NOGUEIRA, I. R. **Análise matemática**. 2. ed. Piracicaba: Augegraf: produções gráficas, 1980. 371 P.

GRAYBIL, F. A. **Theory and application of linear model**. Belmont: Duxbury Press, 1976. 704 p.

GREENHOUSE, S. W. & GEISSER, S. On methods in the analysis of profile data. **Psychometrika**, 24: 95-112, 1959.

GUJARATI, D. & PORTER, D. C. **Econometria básica**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH. 2011. 924 p.

HAIR Jr., J. F.; ANDRESON, R. E.; TATHAM, R. L.; BLACK, W. C. **Análise multivariada de dados**. 6. Ed. São Paulo: Bookman, 2009. 688 p.

HOFFMANN, R. **Análise estatística de relações lineares e não lineares**. 1. ed. São Paulo: LP-Books, 2011. 270 p.

HOTELLING, H. The most predictable criterion. **Journal of Educational Psychology**, 26,139 -142, 1935.

HUYNH, H. & FELDT, L.S. Estimation of the Box correction for degrees of freedom from sample data in randomized block and split-plot designs. **J. Ed. Statist.**, 1, 69-82. 1976.

HUYNH, H. & FELDT, L.S. Conditions under which means square ratios in repeated measurements designs have exact F-distributions. **Journal of the American Statistical Association**, Boston, v.65, n. 322, 1582-1589. 1970.

IEMMA, A. F. Valores singulares de matrizes uniformes. **Ciência e Natura**, 4: 21 – 26. 1982.

JOHNSON, R.A. & WICHERN, D.W. **Applied multivariate analysis**. New Jersey: Prantice - Hall, 816 p. 1992.

KANKAINEN, A; TASKINEN, S.; OJA, H. On Mardia's test of multinormality. **Mathematics Subject Classification**. 1991.

KENDALL, M. G. Factor analysis as statistical techniques. **J. R. Statist. Soc.**, B, 22: 60-73, 1950.

KOIZUMI, K; SUMIKAWA, T; PAVLENKO, T. Measures of multivariate skewness and kurtosis in high-dimensional framework. **Sut Journal of mathematics**, v.50, n. 2, 483-511. 2014.

KOOLLO, T. Multivariate skewness and kurtosis measures with an application in ICA. **Journal of Multivariate Analysis**. 99: 2328-2338. 2008.

KORKMAZ, S.; GOKSULUK, D.; ZARARSIZ, G. MVN: An R package for assessing multivariate normality. **The R Journal**. Vol. 6/2, 2014.

LACHENBRUCH, P. A. **Discriminant analysis**. Hafner Press, Division of Macmillan Publishing Co., Inc. 1975.

LANCASTER, H. O. The Helmert matrices. **Am. Math. Monthly**, 72 (1): 4-12, 1965.

LAWLEY, D.N. The estimation of factor loading by the method of maximum likelihood. **Proceedings of the Royal Society of Edinburger**, 60: 64-82. 1940.

LAWLEY, D. N. & MAXWELL, A. E. **Factor analysis as statistical method**. Butterworths, London. 1971.

LEAL, M. L. S. **Análise de dados de experimentos com medidas repetidas**. Brasília. (Mestrado - Universidade de Brasília). 99 p. 1979.

MARCHAND, L. **Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita**. Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado. Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande. 2016.

MAHALANOBIS, P. C. On the generalized distance in statistics. **Proc. Nat. Inst. Sci., India**, 2: 49-55, 1936.

MANLY, B. F. J. **Métodos estatísticos multivariados: uma introdução**. Tradução: Sara Landa Carmona- 3. Ed.- Porto Alegre, Bookman. 229p. 2008.

MARDIA, K. V. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. **Biometrika**, v. 57, p. 519 - 530. 1970.

MARDIA, K. V. Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. **Sankhyā**, Ser B 36(2), 115-128. 1974.

MARDIA, K. V. Mardia, Tests of univariate and multivariate normality. In: P.R. Krishnaiah (ed.), **Handbook of Statistics**, vol 1, 279-320, North Holland, 1980.

MARTINS, M. C. **Análise de resíduo projetado em modelos lineares de regressão: uma aplicação em crescimento de frutos**. 90 p. Tese de mestrado. ESALQ-USP. Piracicaba-SP. 2013.

MAUCHLY, J. W. Significance Test for Sphericity of a Normal n-Variate Distribution. **The Annals of Mathematical Statistics**. Baltimore, v.11, n.6, p. 204-209, 1940.

MAROCO, J. **Análise estatística com utilização do SPSS**. 3. ed. Lisboa: Edições Sílabo, 2007.

MELO, J. M. Proposta de um teste exato para avaliar a normalidade multivariada baseado em uma transformação t de Student. 86 p. Dissertação (mestrado acadêmico). Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras: UFLA. Lavras, 2016.

MINGOTI, S.A. **Análise de Dados Através de Métodos de Estatística Multivariada: Uma abordagem aplicada**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

MORRISON, D.F., **Multivariate Statistical Methods**. 2. ed. Tokyo, McGraw-Hill, Inc. 1976. 415 p.

NETER, J.; KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J. & WASSERMAN, W. **Applied linear statistical models**. 4. ed. USA, Richard D. Irwin, 1996. 1408 p.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. 7. ed. Porto, Lopes da Silva, v. I, 1979, 515 p.

PONTES (2005), A. C. F. Análise de variância multivariada com a utilização de testes não paramétricos e componentes principais baseados em matrizes de postos. 106 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica)–Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz/USP, Piracicaba, 2005.

PRUDENTE, A. A. **Modelos não lineares de regressão: alguns aspectos de teoria assintótica**. 108 p. Dissertação de mestrado, Departamento de Estatística e informática. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 2009.

QUEIROZ, W. T. **Análise de fatores ("Factor analysis") pelo método de máxima verossimilhança**: aplicação ao estudo de estrutura de florestas tropicais. 112 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz/USP, Piracicaba, 1984.

QUEIROZ, W. T. **Amostragem em Inventário Florestal**. Belém: Universidade Federal Rural da Amazônia, 2012. 441 p.

QUEIROZ, W. T. Análise de Perfil Multivariada de um Inventário Contínuo com Parcelas Permanentes. **Atualidades em Mensuração florestal**. Ed. Ana Paula Dalla Corte [et al.]. 1. Ed. – Curitiba, 2014. 407 p.

QUEIROZ, W. T.; SILVA, M. L.; JARDIM, F. C. S.; VALE, R.; VALENTE, M. D. R.; PINHEIRO, J. G. Índice de valor de importância de espécies arbóreas da Floresta Nacional do Tapajós via análise de componentes principais e de fatores. **Ciência Florestal-UFSM**, v. 27, p. 47-59, 2017.

RAO, C. R. **Linear statistical inference and its applications**. New York: John Wiley, 1973. 522 p.

RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: Marcel Dekker, 1990. 241 p.

REGAZZI, A. J. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear. **Revista Ceres**, v.50, n. 287, p. 9-26, 2003.

REGAZZI, A. J. & SILVA, C. H. O. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear. I. Dados no delineamento inteiramente casualizado. **Rev. Mat. Estat.**, São Paulo, v.22, n.3, p.33-45, 2004

ROY, S.N. On a heuristic method of test construction and its uses in multivariate analysis. **The Annals of Mathematical Statistics**. Baltimore, 24: 220-238, 1953.

ROY, S.N. **Some aspects of multivariate analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York. 1957.

SAS INSTITUTE INC. SAS/STAT. Version 9.00, Cary, NC, USA, 2002.

SEARLE, S. R. 1971. **Linear models**. New York: John Wiley & Sons. 420 p.

SILVA, R. B. V. **Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado**. 59p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras: UFLA. Lavras, 2009.

SPEARMAN, C. General intelligence objectively determined and measured. **Amer. J. Psychol.**, 15: 201-293.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília, DF: **Embrapa**, 1998. 505 p.

STEEL, R. G. D. & TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics: with special reference to the biological sciences**. New York: McGraw-Hill, 1960. 481 p.

STOLOFF, P.H. Correcting for heterogeneity of covariance for repeated measures designs of the analysis of variance. **Educ. and Psych. Measurements**, 30, 909-924. 1970.

TATSUOKA, M.M. **Multivariate analysis: techniques for educational and psychological research**. New York, John Wiley e Sons. 310 p.

THOMSON, G.H. **The factorial analysis of human ability**. London, University of London. 1951.

WELCH, B. L. 'Note on discriminant functions ' , **Biometrika**, 31, 218-220. 1939.

WILKS, S. S. Sample criteria for equality of means, equality of variances and equality of covariances in a normal multivariate distribution. **The Annals Mathematical Statistics**, London, 17: 257-281, 1946.

YARED, J. A. G. **Comportamento e viabilidade de procedimento de Cordia alliodora (Ruiz e pav.) Oken, no Planalto do Tapajós – Belterra, PA**. 1983. 108 p. (Dissertação Mestrado em Engenharia Florestal)–Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 1983.

Apêndice A

Distribuições Estatísticas

Tabela A1 - Distribuição “ t ” de Student.

Tabela A2 - Distribuição F de Snedecor para $\alpha = 5\%$.

Tabela A3 - Distribuição F de Snedecor para $\alpha = 1\%$.

Tabela A4 - Distribuição de χ^2 .

Tabela A1 - Distribuição “t” de Student.

$k \backslash \alpha$	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,00000	2,4142	6,3138	12,706	25,542	63,657	127,32
2	0,81650	1,6036	2,9200	4,3127	6,2053	9,9248	14,089
3	0,76489	1,4226	2,3534	3,1825	4,1765	5,8409	7,4533
4	0,74070	1,3444	2,1318	2,7764	3,4954	4,6041	5,5976
5	0,72669	1,3009	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733
6	0,71756	1,2733	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168
7	0,71114	1,2543	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0293
8	0,70639	1,2403	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325
9	0,70272	1,2297	1,8331	2,2622	2,6850	3,2498	3,6897
10	0,69981	1,2213	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814
11	0,69745	1,2145	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966
12	0,69548	1,2089	1,7823	2,1788	2,5600	3,9545	3,4284
13	0,69384	1,2041	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725
14	0,69200	1,2001	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257
15	0,69120	1,1967	1,7530	2,1315	2,4899	2,9467	3,2860
16	0,69013	1,1937	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520
17	0,68919	1,1910	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2225
18	0,68837	1,1887	1,7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966
19	0,68763	1,1866	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1737
20	0,68696	1,1848	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534
21	0,68635	1,1831	1,7207	2,0796	2,4138	2,8314	3,1352
22	0,68580	1,1816	1,7171	2,0739	2,4055	2,8188	3,1188
23	0,68531	1,1802	1,7139	2,0687	2,3979	2,8073	3,1040
24	0,68485	1,1789	1,7109	2,0639	2,3910	2,7969	3,0905
25	0,68443	1,1777	1,7081	2,0595	2,3846	2,7874	3,0782
26	0,68405	1,1766	1,7056	2,0555	2,3788	2,7787	3,0669
27	0,68370	1,1757	1,7033	2,0518	2,3734	2,7707	3,0565
28	0,68335	1,1748	1,7011	2,0484	2,3685	2,7633	3,0469
29	0,68304	1,1739	1,6991	2,0452	2,3638	2,7564	3,0380
30	0,68276	1,1731	1,6973	2,0423	2,3596	2,7500	3,0298
40	0,68066	1,1673	1,6839	2,0211	2,3289	2,7045	2,9712
60	0,67862	1,1616	1,6707	2,0003	2,2991	2,6603	2,9146
120	0,67656	1,1559	1,6577	1,9799	2,2699	2,6174	2,8599
∞	0,67449	1,1503	1,6449	1,9600	2,2414	2,5758	2,8070

Tabela A2 - Distribuição F de Snedecor para $\alpha = 5\%$.

$k \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	248,0	250,1	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,46	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,62	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,75	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,50	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,38	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,08	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,86	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,70	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,65	2,57	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,90	2,85	2,80	2,75	2,54	2,47	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,46	2,38	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,39	2,31	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,33	2,25	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,19	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,23	2,15	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,11	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,16	2,07	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	2,04	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,10	2,01	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,07	1,98	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,05	1,96	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,03	1,94	1,79
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,93	1,84	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,21	2,18	2,12	2,08	1,84	1,74	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,75	1,65	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,66	1,55	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,46	1,22

Tabela A3 - Distribuição F de Snedecor para $\alpha = 1\%$.

$k \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	120
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6209	6261	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,45	99,47	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,69	26,50	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,02	13,84	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,55	9,38	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,40	7,23	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,16	5,99	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,36	5,20	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,81	4,65	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,41	4,25	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,10	3,94	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	3,86	3,70	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,66	3,51	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,51	3,35	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,37	3,21	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,26	3,10	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,16	3,00	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,08	2,92	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,00	2,84	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	2,94	2,78	2,52
21	8,02	5,78	4,82	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	2,88	2,72	2,46
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	2,83	2,67	2,40
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	2,78	2,62	2,35
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	2,74	2,58	2,31
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,70	2,54	2,27
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,66	2,50	2,23
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,63	2,47	2,20
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,60	2,44	2,17
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,57	2,41	2,14
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,55	2,39	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,37	2,20	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,20	2,03	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,03	1,86	1,53
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	1,88	1,70	1,32

Tabela A4 - Distribuição de χ^2 .

α k	0,995	0,990	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,0001	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,021	2,37	4,11	6,25	7,81	9,25	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,23	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,80	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,4	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,5	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,1	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,5
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7

Apêndice B

Banco de Dados

Tabela B1 - Dados (simulados) para os quatro métodos de Manejo M1, M2, M3 e M4.

Tabela B2 - Dados (simulados) para as quatro espécies florestais E1, E2, E3 e E4.

Tabela B1 - Dados simulados dos quatro métodos de manejo M1, M2, M3 e M4.					
MMF	OC1=0	OC2=5	OC3=10	OC4=15	OC5=20
M1	94,615	117,854	134,403	136,058	136,519
M1	96,053	117,628	133,247	134,909	135,398
M1	95,785	118,546	136,020	137,251	139,248
M1	94,358	117,248	133,796	134,482	135,317
M1	97,530	121,034	137,164	138,871	140,947
M1	99,210	120,537	137,811	139,005	139,881
M1	97,077	119,585	135,360	136,358	137,428
M1	95,955	118,884	135,719	136,661	138,842
M1	93,440	116,993	133,718	134,770	135,865
M1	95,738	115,370	132,002	132,618	133,880
M1	97,165	117,845	134,598	136,152	137,478
M1	96,523	118,165	134,463	135,796	137,458
M1	97,986	120,246	136,374	137,515	138,089
M1	97,433	119,589	135,920	137,615	137,963
M1	96,975	115,940	133,516	134,294	136,606
M1	94,282	114,849	129,462	129,582	131,759
M1	96,286	118,640	135,319	135,481	136,623
M1	96,998	122,128	140,127	141,131	141,937
M1	97,488	119,215	135,240	137,065	138,849
M1	96,578	118,723	136,597	137,852	139,700
M1	98,518	123,491	140,273	141,052	142,956
M1	96,216	119,143	135,979	136,864	138,866
M1	96,894	119,068	136,033	135,548	136,601
M1	99,217	121,152	137,255	138,262	140,089
M1	96,559	118,692	135,229	136,172	137,476
M1	96,431	117,869	134,368	135,415	136,818
M1	98,167	120,253	136,733	137,879	139,034
M1	95,750	118,697	134,855	135,960	137,998
M1	96,882	120,296	137,077	139,813	142,695
M1	97,571	118,331	134,219	135,167	136,721
M2	95,524	119,377	138,797	141,366	143,684
M2	95,183	115,833	132,058	132,745	134,317
M2	98,479	123,586	142,984	145,502	147,988
M2	95,777	120,546	138,930	140,872	142,232
M2	95,456	114,688	130,722	133,677	135,715
M2	98,218	121,870	139,487	142,192	143,360
M2	99,552	123,743	140,865	142,502	143,009
M2	97,429	121,215	140,035	142,699	144,428
M2	100,079	123,403	140,474	143,084	144,876
M2	99,240	123,466	141,219	142,647	144,880
M2	98,572	120,566	138,339	140,418	141,991
M2	98,252	120,106	136,414	137,878	138,522
M2	96,555	120,718	137,932	140,042	140,344
M2	94,814	115,831	131,590	133,398	133,746
M2	96,648	117,260	133,026	133,048	134,014

M2	97,457	121,472	138,184	140,837	142,141
M2	98,106	119,486	136,627	138,044	139,312
M2	97,650	122,648	139,788	141,364	141,901
M2	96,234	119,658	136,677	137,573	138,233
M2	97,942	120,732	138,082	138,231	138,949
M2	99,815	120,827	137,285	138,834	140,553
M2	97,010	119,731	136,787	138,605	141,199
M2	95,475	116,825	132,716	134,045	134,626
M2	95,713	120,039	138,905	141,486	142,676
M2	96,377	117,109	133,783	134,336	136,398
M2	96,410	119,202	137,199	139,641	142,359
M2	96,222	122,665	142,341	144,833	145,794
M2	95,516	119,257	136,077	138,273	138,943
M2	96,356	119,606	136,540	138,115	138,560
M2	96,177	118,587	136,929	138,243	140,310
M3	98,190	132,620	143,707	150,691	151,215
M3	96,132	131,374	142,860	150,846	152,044
M3	97,196	130,957	141,585	148,872	149,666
M3	99,092	132,450	143,637	150,820	150,724
M3	95,969	129,566	142,517	149,520	150,775
M3	99,141	131,534	142,251	147,740	147,884
M3	95,626	132,910	144,658	151,802	151,973
M3	97,487	132,187	143,261	148,352	148,689
M3	95,834	130,839	142,035	148,042	148,633
M3	94,928	129,418	142,391	149,925	151,542
M3	95,432	129,824	140,424	148,069	148,505
M3	98,470	131,710	143,227	149,088	149,241
M3	95,895	133,746	146,470	154,394	155,885
M3	97,122	130,906	142,270	149,865	151,462
M3	95,431	128,241	139,941	147,753	149,340
M3	97,822	132,356	143,929	150,325	150,988
M3	95,406	132,782	145,263	153,038	154,337
M3	95,795	128,897	139,542	145,387	146,524
M3	99,205	132,448	142,860	148,644	149,511
M3	97,058	132,026	144,084	152,295	153,700
M3	95,522	130,215	141,126	146,948	148,250
M3	94,468	125,865	137,559	145,002	146,324
M3	97,106	128,254	137,562	142,820	143,124
M3	96,724	132,536	143,382	150,759	150,886
M3	95,748	130,729	141,664	147,756	147,084
M3	96,909	133,096	147,964	157,443	159,481
M3	97,532	132,145	143,396	150,894	150,201
M3	98,125	131,411	142,013	148,978	149,930
M3	95,548	129,175	141,480	149,520	150,649
M3	97,121	127,784	138,000	145,102	145,242
M4	98,079	132,939	145,355	152,622	153,402
M4	96,861	128,322	138,876	145,122	146,096
M4	96,411	129,530	140,862	147,055	146,907

M4	95,807	130,430	141,989	148,971	147,874
M4	98,857	134,534	147,961	155,958	156,575
M4	95,472	130,218	142,139	149,195	150,062
M4	98,595	135,659	148,153	156,275	155,918
M4	97,645	131,035	142,191	148,573	149,839
M4	96,617	129,745	142,200	149,818	150,448
M4	97,962	132,890	145,852	154,337	155,329
M4	98,595	135,041	148,558	155,240	154,901
M4	96,963	130,770	142,606	148,884	150,063
M4	100,186	136,245	147,691	153,940	153,350
M4	94,085	127,957	139,836	145,867	146,367
M4	94,135	125,779	136,651	143,743	145,685
M4	96,041	129,792	142,479	150,761	152,554
M4	97,495	131,818	144,526	151,940	152,834
M4	95,771	129,718	143,371	151,745	153,444
M4	97,270	129,914	140,504	148,362	149,407
M4	95,349	128,752	140,114	147,923	149,302
M4	95,344	130,492	142,311	149,867	150,730
M4	97,071	130,555	143,306	152,105	153,363
M4	99,090	134,932	148,511	155,649	156,663
M4	97,367	131,371	140,545	147,749	147,793
M4	94,519	127,862	140,369	147,380	148,782
M4	97,446	130,066	141,061	147,140	146,949
M4	99,836	132,356	143,712	150,136	150,865
M4	98,800	131,947	143,215	149,599	149,927
M4	98,891	132,498	142,649	148,547	148,808
M4	98,736	134,371	146,193	154,098	154,887

Tabela B2 - Dados simulados das quatro espécies E1, E2, E3 e E4.

ESPÉCIE	OC1=0	OC2=5	OC3=10	OC4=15	OC5=20
E1	9,9190	14,5882	17,2448	19,5898	21,1701
E1	9,6132	14,4511	17,1552	19,6230	21,2862
E1	9,7196	14,4053	16,9914	19,4964	20,9532
E1	9,9092	14,5695	17,2364	19,6196	21,1014
E1	9,5969	14,2523	17,1020	19,4376	21,1085
E1	9,9141	14,4687	17,0701	19,2062	20,7192
E1	9,5626	14,6201	17,3591	19,7473	21,2762
E1	9,7497	14,5417	17,1913	19,4158	20,9579
E1	9,5934	14,4033	17,0442	19,3755	20,9486
E1	9,4929	14,2361	17,0869	19,4903	21,2159
E1	9,5432	14,2916	16,8509	19,3790	20,9307
E1	9,9470	14,4881	17,1872	19,3829	20,8937
E1	9,5995	14,7121	17,5764	20,0712	21,8393
E1	9,7122	14,3997	17,0724	19,4955	21,2047
E1	9,5431	14,2165	16,7929	19,2079	20,9076
E1	9,7922	14,5592	17,2715	19,5423	21,1399
E1	9,5406	14,6071	17,4316	19,8951	21,6072

E1	9,5795	14,2997	16,7450	18,9016	20,5134
E1	9,9205	14,5694	17,1552	19,4537	20,9315
E1	9,7059	14,5229	17,2913	19,7984	21,5180
E1	9,5522	14,3237	16,9351	19,1034	20,8950
E1	9,4469	13,8562	16,5071	18,8503	20,4854
E1	9,7106	14,2179	16,5074	18,5796	20,0374
E1	9,6724	14,5790	17,2070	19,5987	21,1394
E1	9,5749	14,3802	16,9997	19,2083	20,5932
E1	9,6909	14,6406	17,7557	20,4676	22,3287
E1	9,7532	14,5360	17,2075	19,6292	21,0281
E1	9,9125	14,4552	17,0416	19,4973	20,9902
E1	9,5549	14,2093	16,9788	19,4376	21,0909
E1	9,7121	14,0573	16,6800	18,8633	20,3339
E2	9,9079	14,6233	17,4426	19,8409	21,4763
E2	9,6961	14,2254	16,7971	18,8659	20,4534
E2	9,6411	14,2483	16,9154	19,1172	20,5670
E2	9,5907	14,3473	17,0399	19,4962	20,7164
E2	9,9957	14,7987	17,7553	20,2747	21,9205
E2	9,5472	14,3241	17,0567	19,3954	21,0087
E2	9,9595	14,9225	17,8984	20,3158	21,8287
E2	9,7645	14,4139	17,0629	19,4445	20,9915
E2	9,6617	14,2720	17,0640	19,4895	21,0629
E2	9,7962	14,6289	17,5142	20,0638	21,7461
E2	9,9595	14,8545	17,9471	20,1812	21,6861
E2	9,6963	14,3847	17,1127	19,4992	21,0088
E2	10,0196	14,9870	17,7229	20,0122	21,4690
E2	9,4095	14,0753	16,7923	18,9757	20,4914
E2	9,4135	13,8357	16,3981	18,6866	20,3973
E2	9,6041	14,2771	17,0975	19,5989	21,3576
E2	9,7495	14,5111	17,3431	19,7522	21,4108
E2	9,5771	14,2691	17,2045	19,7269	21,4822
E2	9,7270	14,2905	16,8605	19,4171	20,9170
E2	9,5349	14,2727	16,8137	19,2300	20,9023
E2	9,5344	14,3541	17,0773	19,4957	21,1022
E2	9,7071	14,3611	17,1967	19,7737	21,4708
E2	9,9090	14,8425	17,9413	20,2344	21,9328
E2	9,7367	14,4508	16,8654	19,2074	20,6910
E2	9,4519	14,0758	16,8443	19,1607	20,9709
E2	9,7446	14,3073	16,9273	19,1282	20,5729
E2	9,9936	14,5592	17,2454	19,5177	21,1351
E2	9,9900	14,5142	17,1858	19,4479	20,9898
E2	9,9991	14,5749	17,1179	19,4411	20,9873
E2	9,9736	14,7808	17,5432	20,0329	21,6996
E3	9,4615	12,9749	16,1284	17,6877	19,1127
E3	9,6053	12,9392	15,9896	17,5382	18,9559
E3	9,5795	13,1501	16,3224	17,8426	19,4949
E3	9,4359	12,8974	16,0555	17,4840	18,9444
E3	9,7530	13,3137	16,4597	18,1962	19,7326

E3	9,9210	13,2591	16,5493	18,0707	19,5987
E3	9,7077	13,1555	16,2432	17,7267	19,2401
E3	9,5955	13,1993	16,2863	17,7659	19,5919
E3	9,3440	12,8692	16,0463	17,5201	19,0351
E3	9,5739	12,6907	15,8402	17,2405	18,7586
E3	9,7165	12,9740	16,1519	17,6998	19,2471
E3	9,6523	13,1082	16,1356	17,6535	19,2443
E3	9,7996	13,2271	16,3649	17,8770	19,4739
E3	9,7433	13,1559	16,3104	17,8900	19,3148
E3	9,6975	12,7534	16,0219	17,4582	19,1248
E3	9,4292	12,6444	15,5354	16,8470	18,4463
E3	9,6296	13,1604	16,2383	17,6138	19,1272
E3	9,6999	13,4342	16,8152	18,3470	19,8712
E3	9,7499	13,1137	16,2288	17,8185	19,5929
E3	9,6579	13,1695	16,3916	17,9338	19,5580
E3	9,9519	13,5840	16,8328	18,3368	20,0138
E3	9,6216	13,1057	16,3175	17,8053	19,5952
E3	9,6994	13,0976	16,3240	17,6214	19,1241
E3	9,9217	13,3267	16,4706	18,1041	19,6139
E3	9,6559	13,1661	16,2275	17,7024	19,2466
E3	9,6431	12,9766	16,1243	17,6040	19,1687
E3	9,9167	13,2278	16,4080	17,9373	19,4648
E3	9,5750	13,1667	16,1946	17,6748	19,3199
E3	9,6992	13,2326	16,4492	18,1887	19,9773
E3	9,7571	13,1264	16,1063	17,5717	19,1409
E4	9,5524	13,1315	16,7756	18,3776	20,1172
E4	9,5193	12,7526	15,8471	17,2569	18,8044
E4	9,9479	13,5956	17,1593	18,9153	20,7199
E4	9,5777	13,2601	16,7916	18,3264	19,9125
E4	9,5456	12,6169	15,6866	17,3780	19,0001
E4	9,9219	13,4167	16,7396	18,4850	20,0704
E4	9,9552	13,6117	16,9158	18,5253	20,0213
E4	9,7429	13,3337	16,8042	18,5509	20,2201
E4	10,0079	13,5743	16,8569	18,6022	20,2966
E4	9,9240	13,5813	16,9463	18,5441	20,2986
E4	9,9572	13,2623	16,7207	18,2545	19,8787
E4	9,9252	13,2117	16,3697	17,9373	19,5331
E4	9,6555	13,2791	16,5518	18,2055	19,6482
E4	9,4914	12,7524	15,7908	17,3419	18,7244
E4	9,6649	12,8986	15,9631	17,2964	18,7620
E4	9,7457	13,3619	16,7033	18,3218	19,8997
E4	9,9106	13,1446	16,3952	18,0757	19,5037
E4	9,7650	13,4914	16,7759	18,3773	19,8661
E4	9,6234	13,1625	16,4012	17,8845	19,4926
E4	9,7942	13,2805	16,6910	18,1000	19,5929
E4	9,9915	13,3020	16,4754	18,1914	19,6774
E4	9,7010	13,1704	16,4156	18,1487	19,7679
E4	9,5475	12,8618	15,9259	17,4259	18,8476

E4	9,5713	13,2043	16,7886	18,3945	19,9746
E4	9,6377	12,8820	16,0552	17,4637	19,0959
E4	9,6410	13,1122	16,4639	18,1533	19,9303
E4	9,6222	13,4932	17,0809	18,8413	20,4112
E4	9,5516	13,1183	16,3292	18,1055	19,5920
E4	9,6356	13,1567	16,3848	18,0850	19,5384
E4	9,6177	13,1557	16,4315	18,1016	19,6434

Apêndice C

Programas SAS

Tabela C1 - Operações com vetores e matrizes.

Tabela C2 - Uniformidade da matriz de covariância comum de M1, M2, M3 e M4.

Tabela C3 - Teste de Mauchly e correções de Greenhouse-Geisser e de Huynh e Feldt da matriz de covariância comum de M1, M2, M3 e M4.

Tabela C4 - Análise de variância multivariada, capítulo 4, seção 4.2.1.

Tabela C5 - Análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando apenas um tratamento M1.

Tabela C6 - Análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando dois tratamentos M1 e M2.

Tabela C7 - Análise da homogeneidade de matrizes de covariâncias dos métodos de manejo M1, M2, M3 e M4.

Tabela C8 - Análise de perfil de M1, M2, M3 e M4.

Tabela C9 - Análise agrupamento pelo método de Ward para M1, M2, M3 e M4.

Tabela C10 - Coincidência de perfis, pelo teste “t” de Student, entre M3 e M4 (Proc IML).

Tabela C11 - Teste de coincidência de perfis entre M3 e M4 (Proc GML).

Tabela C12 - Análise de regressão: Mitscherlich para M1, M2, M3 e M4.

Tabela C13 - Análise de regressão: Mitscherlich para M3 e M4.

Tabela C14 - Análise de componentes principais e de fatores para as espécies E1, E2, E3 .

Tabela C15 - Análise discriminante para as espécies E1, E2, E3 e E4.

Tabela C16 - Análise de correlação canônica considerando os grupos métodos de manejo (M1, M2, M3, M4) versus o grupo das espécies (E1, E2, E3, E4).

Tabela C1 - Operações com vetores e matrizes.

```

proc IML;
reset print;
A={4.66616 2.58743 0.46108, 2.587432 3.80823 -0.99984,0.46108 -0.99984 2.82892};
B={0.98869 0.48248 0.21579, 0.48248 1.76782 0.10562,0.21579 0.10562 0.58460};
C={1.16530 0.48109 1.12600,0.48109 3.53454 0.39000,1.12600 0.39000 3.10924};
D={1 3 1,2 -1 2,3 2 3};
TITLE'Transposta da matriz A';
TA=transp(A);
TITLE' Traço da matriz A';
trA=trace(A);
TITLE 'Matriz comum S';
S=(A+B+C)/3;
TITLE 'Multiplicação das matrizes A e B';
AB=A*B;
TITLE 'Produto direto entre A e B';
PI=A@B;
TITLE 'Potencia de uma matriz';
A2=A**2;
TITLE 'Potencia de uma matriz por elemento';
PAB=A#B;
TITLE 'Determinante da matriz A';
DETA=det(A);
title'Matriz inversa de A';
INVA=INV(A);
title'Autovalores da matriz A';
AUVALA=EIGVAL(A);
title'autovetores da matriz A';
AUVETA=EIGVEC(A);
title 'Inversa generalizada de D';
IGD=ginv(D);
QUIT;

```

Tabela C2 - Uniformidade da matriz de covariância comum de M1, M2, M3 e M4.

```

PROC IML;
RESET PRINT;
N=120;
g=4;
P=5;
S={2.1061385 2.2793064 2.2381011 2.1368150 1.9697176,
 2.2793064 4.7718804 5.5400208 5.8451530 5.5819684,
 2.2381011 5.5400208 7.2915454 7.9891048 7.9497102,
 2.1368150 5.8451530 7.9891048 9.3602169 9.5140274,
 1.9697176 5.5819684 7.9497102 9.5140274 10.153285};
SS={6.736613 5.104392 5.104392 5.104392 5.104392,
 5.104392 6.736613 5.104392 5.104392 5.104392,
 5.104392 5.104392 6.736613 5.104392 5.104392,
 5.104392 5.104392 5.104392 6.736613 5.104392,
 5.104392 5.104392 5.104392 5.104392 6.736613};
DETS=DET(S);
DETSS=DET(SS);
DELTA=(DETS/DETSS);
M=-(N-g)*LOG(DELTA);
A=p*((p+1)**2)*(2*p-3);
B=6*(N-g)*(p-1)*(p**2+p-4);
A1=A/B;
W=(1-A1)*M;
QUIT;

```

Tabela C3 - Teste de Mauchly e correções de Greenhouse-Geisser e de Huynh e Feldt da matriz de covariância comum de M1, M2, M3 e M4.

```

PROC IML;
RESET PRINT;
p=5;
N=120;
g=4;
v=N-g;
S1={1.840616815 1.768520887 1.881892461 2.014791144 2.041541897,
1.768520887 3.467288792 3.786148061 4.058735451 4.045605964,
1.881892461 3.786148061 4.573169082 4.850746154 4.855668095,
2.014791144 4.058735451 4.850746154 5.472367651 5.519759071,

```

```

2.041541897 4.045605964 4.855668095 5.519759071 5.965839275};
S2={2.17477232 2.59689899 2.68184199 2.71630059 2.85198576,
2.59689899 5.76460937 7.16915586 7.72605210 7.74732466,
2.68184199 7.16915586 9.78160489 10.73806517 11.06522376,
2.71630059 7.72605210 10.73806517 12.30778772 12.78680269,
2.85198576 7.74732466 11.06522376 12.78680269 13.80312138};
S3={1.71308108 1.14810639 0.69754194 0.25827404 -0.09560080,
1.14810639 3.47591569 3.96563570 4.17305767 3.99328305,
0.69754194 3.96563570 5.56337459 6.49248559 6.73230947,
0.25827404 4.17305767 6.49248559 8.46297747 9.04132329,
-0.09560080 3.99328305 6.73230947 9.04132329 10.09290955};
S4={2.69608384 3.60369934 3.69112813 3.55789403 3.08094366,
3.60369934 6.37970758 7.23914367 7.42276691 6.54165978,
3.69112813 7.23914367 9.24803313 9.87512234 9.14563949,
3.55789403 7.42276691 9.87512234 11.19773456 10.70822456,
3.08094366 6.54165978 9.14563949 10.70822456 10.75127134};
S=(S1+S2+S3+S4)/4;
C={0.7071068 -0.7071068 0 0 0,
0.4082483 0.4082483 -0.816497 0 0,
0.2886751 0.2886751 0.2886751 -0.866025 0,
0.2236068 0.2236068 0.2236068 0.2236068 -0.894427};
TC=transp(C);
A=C*S*TC;
AUVA=EIGVAL(A);
TRA=trace(A);
AA=A*A;
TRAA=TRACE(AA);
DETA=det(A);
B=((p-1)**(p-1))*DETA;
D=TRA**(p-1);
W=B/D;
LOGW=LOG(W);
CC=-(v-(2*(p**2)-3*p+3)/(6*(p-1)));
QUI=CC*LOGW;
MD=TRA/p;
F=TRA**2;
GG=(P-1)*TRAA;
EGG=F/GG;
EFG=(N*(p-1)*EGG-2)/((P-1)*(N-g-(p-1)*EGG));
QUIT;

```

Tabela C4 - Análise de variância multivariada, capítulo 4, seção 4.2.1.

```

title 'ANALISE DE VARIANCIA MULTIVARIADA';
data MANAVA;
input LABEL $ TRAT $ X1 X2;
CAN1=0.930763*X1-0.365623*X2; CAN2=0.998026*X1-0.062803*X2;
list;
cards;
A A 4.59461 1.01091
A A 4.83847 1.09984
A A 4.63485 1.36393
A A 4.13427 0.75682
A A 4.41401 0.99222
A A 4.49093 1.03807
A A 4.34527 1.01440
A A 4.76123 1.24293
A A 4.85951 1.28071
A A 4.54754 0.96189
B B 5.89330 1.30597
B B 6.39272 1.02454
B B 6.04890 0.95112
B B 5.83597 1.18565
B B 5.90154 0.82137
B B 6.29682 1.28870
B B 5.77850 1.09699
B B 5.51812 0.98971
B B 5.69376 1.24628
B B 6.17353 1.12303
C C 4.62760 1.13162
C C 4.57793 0.80946
C C 4.63142 0.96004
C C 4.37465 0.85200
C C 4.55534 0.82440

```

```

C      C      4.59616      0.89524
C      C      4.73959      1.12693
C      C      4.56206      0.99929
C      C      4.70658      0.99833
C      C      4.93657      0.80537
;
ods html file='MANAVA';
proc discrim method=normal pool=test wcov;
var X1 X2;
class TRAT;
run;
proc glm;
  classes TRAT;
  model X1 X2 = TRAT;
  manova h=TRAT / printE printH canonical;
proc plot;
  plot CAN2*CAN1=LABEL/vpos=14 hpos=60;
run;
proc glm;
  class TRAT;
  model CAN1=TRAT;
  means TRAT/TUKEY;
run;
ODS HTML CLOSE;
RUN;
quit;

```

Tabela C5 - Análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando apenas um tratamento M1.

```

proc IML;
reset print;
n=30;
p=5;
title ' Matriz de Covariância';
S1={1.840616815 1.768520887 1.881892461 2.014791144 2.041541897,
1.768520887 3.467288792 3.786148061 4.058735451 4.045605964,
1.881892461 3.786148061 4.573169082 4.850746154 4.855668095,
2.014791144 4.058735451 4.850746154 5.472367651 5.519759071,
2.041541897 4.045605964 4.855668095 5.519759071 5.965839275};
title ' Vetor das medias';
Y1={96.6558900, 118.867033, 135.429233, 136.519933, 137.968033};
C={1 -1 0 0 0, 0 1 -1 0 0, 0 0 1 -1 0, 0 0 0 1 -1};
TC=TRANSP(C);
TY1=TRANSP(Y1);
CS1TC=(C)*(S1)*(TC);
ICS1TC=INV(CS1TC);
title ' Estatística de Hotelling';
T2=n*(TY1)*(TC)*(ICS1TC)*(C)*(Y1);
A=n-p+1;
B=(n-1)*(p-1);
title ' Estatística F';
F=(A/B)*T2;
QUIT;

```

Tabela C6 - Análise de inventários florestais com parcelas permanentes considerando dois tratamentos M1 e M2.

```

proc IML;
reset print;
n1=30;
n2=30;
p=5;
* Vetores de médias;
Y1={96.6558900, 118.867033, 135.429233, 136.519933, 137.968033};
Y2={97.0746000, 120.001733, 137.359733, 139.151000, 140.502000};
* Matrices de covariâncias;
S1={1.840616815 1.768520887 1.881892461 2.014791144 2.041541897,
1.768520887 3.467288792 3.786148061 4.058735451 4.045605964,
1.881892461 3.786148061 4.573169082 4.850746154 4.855668095,
2.014791144 4.058735451 4.850746154 5.472367651 5.519759071,
2.041541897 4.045605964 4.855668095 5.519759071 5.965839275};
S2={2.17477232 2.59689899 2.68184199 2.71630059 2.85198576,

```



```

2.59689899 5.76460937 7.16915586 7.72605210 7.74732466,
2.68184199 7.16915586 9.78160489 10.73806517 11.06522376,
2.71630059 7.72605210 10.73806517 12.30778772 12.78680269,
2.85198576 7.74732466 11.06522376 12.78680269 13.80312138};
S=(S1+S2)/2;
dets=det(S);
Y=Y1-Y2;
C={1 -1 0 0 0, 0 1 -1 0 0, 0 0 1 -1 0, 0 0 0 1 -1};
TC=TRANSP(C);
TY=TRANSP(Y);
CSTC=(C)*(S)*(TC);
ICSTC=INV(CSTC);
k=(n1*n2)/(n1+n2);
* Estatística de Hotelling;
T2=k*(TY)*(TC)*(ICSTC)*(C)*(Y);
A=n1+n2-p;
B=(n1+n2-2)*(p-1);
* Estatística F de Snedecor;
F=(A/B)*T2;
QUIT;

```

Tabela C7 - Análise da homogeneidade de matrizes de covariâncias dos métodos de manejo M1, M2, M3 e M4.

```

title 'TESTE DE HOMOGENEIDADE DE MATRIZES DE COVARIANCIA';
data MM;
input MMF $ OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
cards;
M1      94.6152      117.854      134.403      136.058      136.519
M1      96.0525      117.628      133.247      134.909      135.398
M1      95.7847      118.546      136.020      137.251      139.248
.
.
.
DADOS TABELA B1 DO APÊNCICE
.
.
.
M4      98.800      131.947      143.215      149.599      149.927
M4      98.891      132.498      142.649      148.547      148.808
M4      98.736      134.371      146.193      154.098      154.887
;
ods html file="MM";
ods graphics on;
proc discrim method=normal pool=test wcov;
var OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
class MMF;
run;
ods html close;
run;
quit;

```

Tabela C8 - Análise de perfil de M1, M2, M3 e M4.

```

data PERFILMUL (keep = MM OC1 OC2 OC3 OC4 OC5)
ANAUNI (keep = MM OCASIAO VOL);
input MM $ OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
output PERFILMUL;
VOL = OC1; OCASIAO = 'OC1'; output ANAUNI;
VOL = OC2; OCASIAO = 'OC2'; output ANAUNI;
VOL = OC3; OCASIAO = 'OC3'; output ANAUNI;
VOL = OC4; OCASIAO = 'OC4'; output ANAUNI;
VOL = OC5; OCASIAO = 'OC5'; output ANAUNI;
cards;
M1      94.6152      117.854      134.403      136.058      136.519
M1      96.0525      117.628      133.247      134.909      135.398
M1      95.7847      118.546      136.020      137.251      139.248
.
.
.
DADOS TABELA B1 DO APÊNCICE B
.
.

```

```
.
M4      98.800      131.947      143.215      149.599      149.927
M4      98.891      132.498      142.649      148.547      148.808
M4      98.736      134.371      146.193      154.098      154.887
;
ods html file="ANAUNI";
ods graphics on;
proc glm data=PERFILMUL;
class MM;
model OC1 OC2 OC3 OC4 OC5 = MM / nouni;
manova / printe;
repeated OCASIAO 5 polynomial / summary printe;
lsmeans MM;
run;
proc sort;
by MM OCASIAO;
run;
proc means mean;
output out=ANAUNIG;
by MM OCASIAO;
var VOL;
run;
DATA ANAUNIG;
SET ANAUNIG;
IF _STAT_ ^= "MEAN" THEN DELETE;
KEEP MM OCASIAO VOL;
*PROC PRINT;
RUN;
PROC GPLOT;
SYMBOL1 V=DOT I=JOIN C=AMARANTH HEIGHT=0.5;
SYMBOL2 V=DOT I=JOIN C=RED HEIGHT=0.5;
SYMBOL3 V=DOT I=JOIN C=GREEN HEIGHT=0.5;
SYMBOL4 V=DOT I=JOIN C=BLACK HEIGHT=0.5;
SYMBOL5 V=DOT I=JOIN C=ORANGE HEIGHT=0.5;
SYMBOL6 V=DOT I=JOIN C=BROWN HEIGHT=0.5;
SYMBOL7 V=DOT I=JOIN C=AMBER HEIGHT=0.5;
SYMBOL8 V=DOT I=JOIN C=AZURE HEIGHT=0.5;
SYMBOL9 V=DOT I=JOIN C=BLUE HEIGHT=0.5;
SYMBOL10 V=DOT I=JOIN C=SCARLET HEIGHT=0.5;
plot VOL*OCASIAO=MM;
TITLE HEIGHT=1.4 'PERFIS DE CRESCIMENTO DOS METODOS DE MANEJO';
ods html close;
run;
quit;
```

Tabela C9 - Análise agrupamento pelo método de Ward para M1, M2, M3 e M4.

Programa 1: Usado o Proc IML.

```
proc IML;
reset print;
Title 'A=M1, B=M2, C=M3, D=M4';
A={96.6558900, 118.867033, 135.429233, 136.519933, 137.968033};
B={97.0746000, 120.001733, 137.359733, 139.151000, 140.502000};
C={96.7343267, 130.933367, 142.368600, 149.356333, 150.126967};
D={97.1765333, 131.251267, 143.126200, 150.286700, 150.970800};
C1=(5*5)/(5+5);
DAB=(A-B)`*(A-B);
DAC=(A-C)`*(A-C);
DAD=(A-D)`*(A-D);
DBC=(B-C)`*(B-C);
DBD=(B-D)`*(B-D);
DCD=(C-D)`*(C-D);
MAB=(A+B)/2;
MCD=(C+D)/2;
M=MAB-MCD;
C1=(5*5)/(5+5);
C4=(10*10)/(10+10);
DABCD=(C4/C1)*(M`*M);
SQCD=(C-MCD)`*(C-MCD)+(D-MCD)`*(D-MCD);
SQAB=(A-MAB)`*(A-MAB)+(B-MAB)`*(B-MAB);
MT=(A+B+C+D)/4;
SQABCD=(A-MT)`*(A-MT)+(B-MT)`*(B-MT)+(C-MT)`*(C-MT)+(D-MT)`*(D-MT);
SQABCDF=(A-MT)`*(A-MT)+(B-MT)`*(B-MT)+(C-MT)`*(C-MT)+(D-MT)`*(D-MT)-SQCD-SQAB;
QUIT;
```

Programa 2: Usando o Proc cluster method = ward.

```
data MMFIFC;
input MMF $ OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
cards;
M1      96.6558900      118.867033      135.429233      136.519933      137.968033
M2      97.0746000      120.001733      137.359733      139.151000      140.502000
M3      96.7343267      130.933367      142.368600      149.356333      150.126967
M4      97.1765333      131.251267      143.126200      150.286700      150.970800
ODS HTML FILE="MMFIFC";
ODS GRAPHICS ON;
proc CLUSTER METHOD=ward OUTTREE=TREE;
var OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
ID MMF;
run;
proc tree;
run;
ODS HTML CLOSE;
RUN;
QUIT;
```

Tabela C10 - Coincidência de perfis, pelo teste “t” de Student, entre M3 e M4 (Proc IML).

```
proc IML;
reset print;
n2=30;
n3=30;
YM3={96.7343267,      130.933367,      142.368600,      149.356333,      150.126967};
YM4={97.1765333,      131.251267,      143.126200,      150.286700,      150.970800};
S3={1.71308108 1.14810639 0.69754194 0.25827404 -0.09560080,
1.14810639 3.47591569 3.96563570 4.17305767 3.99328305,
0.69754194 3.96563570 5.56337459 6.49248559 6.73230947,
0.25827404 4.17305767 6.49248559 8.46297747 9.04132329,
-0.09560080 3.99328305 6.73230947 9.04132329 10.09290955};
S4={2.69608384 3.60369934 3.69112813 3.55789403 3.08094366,
3.60369934 6.37970758 7.23914367 7.42276691 6.54165978,
3.69112813 7.23914367 9.24803313 9.87512234 9.14563949,
3.55789403 7.42276691 9.87512234 11.19773456 10.70822456,
3.08094366 6.54165978 9.14563949 10.70822456 10.75127134};
J={1,1,1,1,1};
TJ=TRANSPOSE(J);
A=TJ*(YM4-YM3);
S=(S3+S4)/2;
B=(TJ*S*TJ);
C=(1/n2+1/n3);
D=B*C;
E= SQRT(D);
* Estatística t de student;
TT=A/E;
QUIT;
```

Tabela C11- Teste de coincidência de perfis entre M3 e M4 (Proc GML).

```
data MMF43;
input MMF $ oc1 oc2 oc3 oc4 oc5;
cards;
M3      98.1902      132.620      143.707      150.691      151.215
M3      96.1315      131.374      142.860      150.846      152.044
M3      97.1961      130.957      141.585      148.872      149.666
M3      98.1245      131.411      142.013      148.978      149.930
.
.
.
M3      95.5484      129.175      141.480      149.520      150.649
M3      97.1212      127.784      138.000      145.102      145.242
M4      98.079      132.939      145.355      152.622      153.402
M4      96.861      128.322      138.876      145.122      146.096
M4      96.411      129.530      140.862      147.055      146.907
.
.
.
M4      98.800      131.947      143.215      149.599      149.927
```

```

M4      98.891      132.498      142.649      148.547      148.808
M4      98.736      134.371      146.193      154.098      154.887
;
ods html file="MMF43";
ods graphics on;
PROC GLM DATA=MMF43;
CLASS MMF;
MODEL OC1-OC5= MMF;
MANOVA H=MMF/PRINTE;
MANOVA H=MMF M=(1 -1 0 0 0, 0 1 -1 0 0, 0 0 1 -1 0, 0 0 0 1 -1)/PRINTE; * PARALELISMO DOS
PERFIS;
MANOVA H=MMF M=(1 1 1 1 1)/PRINTE; * COINCIDENCIA DOS PERFIS;
LSMEANS MMF;
RUN;
ods html close;
RUN;
quit;

```

Tabela C12 - Análise de regressão: Mitscherlich para M1, M2, M3 e M4.

```

DATA ANAPERFIL;
INPUT MMF $ OCASIAO VOL D1 D2 D3 D4;
CARDS;
M1      0      94.615      1      0      0      0
M1      0      96.053      1      0      0      0
M1      0      95.785      1      0      0      0
.
.
.
DADOS ADAPTADOS DA TABELA B1 DO APÊNCICE B
.
.
.
M2      0      95.524      0      1      0      0
M2      0      95.183      0      1      0      0
M2      0      98.479      0      1      0      0
.
.
.
M3      0      98.190      0      0      1      0
M3      0      96.132      0      0      1      0
M3      0      97.196      0      0      1      0
.
.
.
M4      0      98.079      0      0      0      1
M4      0      96.861      0      0      0      1
M4      0      96.411      0      0      0      1
.
.
.
M4      20      149.927      0      0      0      1
M4      20      148.808      0      0      0      1
M4      20      154.887      0      0      0      1
;
ods html file="anaperfil";
ods graphics on;
PROC nlin Method=gauss;
Parms b0=144 b1=0.05122 b2=7.5;
model VOL=b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)));
output out=p p=VOLE r=resid;
run;
quit;
proc reg;
model VOLE=VOL;
test VOL=1, intercept=0;
run;
proc corr;
Var VOLE VOL;
run;
QUIT;
PROC nlin Method=gauss;
Parms b0=144 b1=0.05122 b2=7.5;
model VOL=b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)));

```

```

output out=resultado
P=ESTIMATIVAS R=RESIDUOS PARMS=B0 B1 B2;
PROC GPLOT DATA=RESULTADO;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
PLOT RESIDUOS*ESTIMATIVAS / VREF=0;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
RUN;
PROC nlin Method=gauss;
Parms b0=144 b1=0.05122 b2=7.5;
model VOL=b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)));
output out=p p=VOLE r=resid;
run;
quit;
proc reg;
model VOLE=VOL;
test VOL=1, intercept=0;
run;
proc corr;
Var VOLE VOL;
run;
PROC NLIN Method=GAUSS;
Parms b10=26 b11=0.122 b12=14.7420 b20=26 b21=0.122 b22=14.7420
b30=26 b31=0.122 b32=14.7420 b40=26 b41=0.122 b42=14.7420;
MODEL VOL=D1*b10*(1-10**(-b11*(OCASIAO+b12)))+D2*b20*(1-10**(-b21*(OCASIAO+b22)))
+ D3*b30*(1-10**(-b31*(OCASIAO+b32)))+D4*b40*(1-10**(-b41*(OCASIAO+b42)));
run;
PROC NLIN Method=GAUSS;
Parms b0=26 b1=0.122 b2=14.7420 ;
MODEL VOL=D1*b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)))+D2*b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)))
+D3*b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)))+D4*b0*(1-10**(-b1*(OCASIAO+b2)));
output out=resultado
P=ESTIMATIVAS R=RESIDUOS PARMS=B0 B1 B2;
PROC GPLOT DATA=RESULTADO;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
PLOT RESIDUOS*ESTIMATIVAS / VREF=0;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
run;
quit;
ODS HTML CLOSE;
RUN;
QUIT;

```

Tabela C13 - Análise de regressão: Mitscherlich para M3 e M4.

```

DATA ANAPERFIL;
INPUT MMF $ OCASIAO VOL D3 D4;
CARDS;
M3      0      98.190      1      0
M3      0      96.132      1      0
M3      0      97.196      1      0
.
.
.
M3      20      149.930      1      0
M3      20      150.649      1      0
M3      20      145.242      1      0
M4      0      98.079      0      1
M4      0      96.861      0      1
M4      0      96.411      0      1
.
.
.
M4      20      149.927      0      1
M4      20      148.808      0      1
M4      20      154.887      0      1
;
ods html file="anaperfil";
ods graphics on;
/*MODELO COMPLETO OMEGA*/
title1 'MODELO COMPLETO OMEGA';
PROC NLIN Method=GAUSS;
Parms b30=26 b31=0.122 b32=14.7420
b40=26 b41=0.122 b42=14.7420;
MODEL VOL=D3*b30*(1-10**(-b31*(OCASIAO+b32)))

```

```

+D4*b40*(1-10**(-b41*(OCASIA0+b42)));
run;
TITLE1;
title2 'MODELO COM RESTRIÇÃO W5: A1=A2 B1=B2 e C1=C2';
/*MODELO COM RESTRIÇÃO W5: A1=A2 B1=B2 e C1=C2*/
PROC NLIN Method=GAUSS;
Parms b0=26 b1=0.122 b2=14.7420 ;
MODEL VOL=D3*b0*(1-10**(-b1*(OCASIA0+b2)))
+D4*b0*(1-10**(-b1*(OCASIA0+b2)));
run;
PROC nlin Method=gauss;
Parms b0=144 b1=0.05122 b2=-7.5;
model VOL=b0*(1-10**(-b1*(OCASIA0+b2)));
output out=p p=VOLE r=resid;
run;
quit;
proc reg;
model VOLE=VOL;
test VOL=1, intercept=0;
run;
plot VOLE*VOL;
run;
proc corr;
Var VOLE VOL;
run;
QUIT;
PROC nlin Method=gauss;
Parms b0=144 b1=0.05122 b2=-7.5;
model VOL=b0*(1-10**(-b1*(OCASIA0+b2)));
output out=resultado
P=ESTIMATIVAS R=RESIDUOS PARMS=B0 B1 B2;
PROC GPLOT DATA=RESULTADO;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
PLOT RESIDUOS*ESTIMATIVAS / VREF=0;
SYMBOL1 VALUE=STAR CV=BLUE;
TITLE 'GRAFICO DE RESIDUOS METODOS: M3 e M4';
RUN;
ODS HTML CLOSE;
RUN;
QUIT;

```

Tabela C14 - Análise de componentes principais e de fatores para as espécies E1, E2, E3 e E4.

```

data especie;
input label $ esp $ oc1 oc2 oc3 oc4 oc5;
cards;
A      E1      9.9190      14.5882      17.2448      19.5898      21.1701
A      E1      9.6132      14.4511      17.1552      19.6230      21.2862
A      E1      9.7196      14.4053      16.9914      19.4964      20.9532
.
.
.
DADOS DA TABELA B2 (APÊNDICE B)
.
.
.
D      E4      9.5516      13.1183      16.3292      18.1055      19.5920
D      E4      9.6356      13.1567      16.3848      18.0850      19.5384
D      E4      9.6177      13.1557      16.4315      18.1016      19.6434
;
ods html file="ESPECIE";
ods graphics;
proc princomp COV out=prin;
var oc1 oc2 oc3 oc4 oc5;
run;
proc plot;
plot prin2*prin1=LABEL/vpos=14 hpos=60;
title1'A=E1 B=E2 C=E3 D=E4';
run;
proc factor nfactors=2 mineigen=0.01 rotate=varimax converge=0.01 out=prova3 all;
var OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
run;

```

```
proc print data=prova3;
proc plot;
plot factor2*factor1=LABEL/vpos=14 hpos=60;
run;
ODS HTML CLOSE;
RUN;
QUIT;
```

Tabela C15 - Análise discriminante para as espécies E1, E2, E3 e E4.

```
data ESPECIE;
input LABEL $ ESP $ OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
cards;
A E1 9.7922 14.5592 17.2715 19.5423 21.1399
A E1 9.5406 14.6071 17.4316 19.8951 21.6072
A E1 9.5795 14.2997 16.7450 18.9016 20.5134
.
. DADOS DA TABELA B2 APÊNDICE B
.
A E1 9.9125 14.4552 17.0416 19.4973 20.9902
A E1 9.5549 14.2093 16.9788 19.4376 21.0909
A E1 9.7121 14.0573 16.6800 18.8633 20.3339
B E2 9.6041 14.2771 17.0975 19.5989 21.3576
B E2 9.7495 14.5111 17.3431 19.7522 21.4108
B E2 9.5771 14.2691 17.2045 19.7269 21.4822
.
.
.
B E2 9.9900 14.5142 17.1858 19.4479 20.9898
B E2 9.9991 14.5749 17.1179 19.4411 20.9873
B E2 9.9736 14.7808 17.5432 20.0329 21.6996
C E3 9.4292 12.6444 15.5354 16.8470 18.4463
C E3 9.6296 13.1604 16.2383 17.6138 19.1272
C E3 9.6999 13.4342 16.8152 18.3470 19.8712
.
.
.
C E3 9.5750 13.1667 16.1946 17.6748 19.3199
C E3 9.6992 13.2326 16.4492 18.1887 19.9773
C E3 9.7571 13.1264 16.1063 17.5717 19.1409
D E4 9.7457 13.3619 16.7033 18.3218 19.8997
D E4 9.9106 13.1446 16.3952 18.0757 19.5037
D E4 9.7650 13.4914 16.7759 18.3773 19.8661
.
.
.
D E4 9.5516 13.1183 16.3292 18.1055 19.5920
D E4 9.6356 13.1567 16.3848 18.0850 19.5384
D E4 9.6177 13.1557 16.4315 18.1016 19.6434
;
proc print;
run;
data ESPCLAS;
input LABEL $ ESP $ OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
cards;
A E1 9.9190 14.5882 17.2448 19.5898 21.1701
A E1 9.6132 14.4511 17.1552 19.6230 21.2862
A E1 9.7196 14.4053 16.9914 19.4964 20.9532
.
.
.
A E1 9.9092 14.5695 17.2364 19.6196 21.1014
A E1 9.5969 14.2523 17.1020 19.4376 21.1085
A E1 9.9141 14.4687 17.0701 19.2062 20.7192
B E2 9.9079 14.6233 17.4426 19.8409 21.4763
B E2 9.6961 14.2254 16.7971 18.8659 20.4534
B E2 9.6411 14.2483 16.9154 19.1172 20.5670
.
.
.
B E2 9.5907 14.3473 17.0399 19.4962 20.7164
B E2 9.9957 14.7987 17.7553 20.2747 21.9205
B E2 9.5472 14.3241 17.0567 19.3954 21.0087
C E3 9.4615 12.9749 16.1284 17.6877 19.1127
C E3 9.6053 12.9392 15.9896 17.5382 18.9559
```

```

C      E3      9.5795      13.1501      16.3224      17.8426      19.4949
.
.
.
C      E3      9.7996      13.2271      16.3649      17.8770      19.4739
C      E3      9.7433      13.1559      16.3104      17.8900      19.3148
C      E3      9.6975      12.7534      16.0219      17.4582      19.1248
D      E4      9.5524      13.1315      16.7756      18.3776      20.1172
D      E4      9.5193      12.7526      15.8471      17.2569      18.8044
D      E4      9.9479      13.5956      17.1593      18.9153      20.7199
.
.
.
D      E4      9.6555      13.2791      16.5518      18.2055      19.6482
D      E4      9.4914      12.7524      15.7908      17.3419      18.7244
D      E4      9.6649      12.8986      15.9631      17.2964      18.7620
;
ODS HTML FILE="ESPECIE";
ODS GRAPHICS ON;
proc print;
proc discrim method=normal out=SAIESP data= ESPECIE testdata=ESPCLAS testlist;
var OC1 OC2 OC3 OC4 OC5;
class ESP;
proc plot data=saiesp;
plot oc1*oc5=label/vpos=14 hpos=60;
proc print data=SAIESP;
ODS HTML CLOSE;
run;

```

Tabela C16 - Análise de correlação canônica considerando os grupos métodos de manejo (M1, M2, M3, M4) versus o grupo das espécies (E1, E2, E3, E4).

```

data ACCAP;
input LABEL$ ESP $ OCE1 OCE2 OCE3 OCE4 OCE5 MMF $ OCM1 OCM2 OCM3 OCM4 OCM5 @@;
cards;
A      E1      9.9190      14.5882      17.2448      19.5898      21.1701
      M1      94.6152      117.854      134.403      136.058      136.519
A      E1      9.6132      14.4511      17.1552      19.6230      21.2862
      M1      96.0525      117.628      133.247      134.909      135.398
A      E1      9.7196      14.4053      16.9914      19.4964      20.9532
      M1      95.7847      118.546      136.020      137.251      139.248
.
.DADOS ORIGINADOS DAS TABELAS B1 E B2 DO APÊNDICE
.
B      E2      9.9079      14.6233      17.4426      19.8409      21.4763
      M2      95.524      119.377      138.797      141.366      143.684
B      E2      9.6961      14.2254      16.7971      18.8659      20.4534
      M2      95.183      115.833      132.058      132.745      134.317
B      E2      9.6411      14.2483      16.9154      19.1172      20.5670
      M2      98.479      123.586      142.984      145.502      147.988
.
.
.
C      E3      9.4615      12.9749      16.1284      17.6877      19.1127
      M3      98.1902      132.620      143.707      150.691      151.215
C      E3      9.6053      12.9392      15.9896      17.5382      18.9559
      M3      96.1315      131.374      142.860      150.846      152.044
C      E3      9.5795      13.1501      16.3224      17.8426      19.4949
      M3      97.1961      130.957      141.585      148.872      149.666
.
.
.
D      E4      9.5524      13.1315      16.7756      18.3776      20.1172
      M4      98.079      132.939      145.355      152.622      153.402
D      E4      9.5193      12.7526      15.8471      17.2569      18.8044
      M4      96.861      128.322      138.876      145.122      146.096
D      E4      9.9479      13.5956      17.1593      18.9153      20.7199
      M4      96.411      129.530      140.862      147.055      146.907
.
.
.
D      E4      9.5516      13.1183      16.3292      18.1055      19.5920
      M4      98.800      131.947      143.215      149.599      149.927
D      E4      9.6356      13.1567      16.3848      18.0850      19.5384

```


	M4	98.891	132.498	142.649	148.547	148.808
D	E4	9.6177	13.1557	16.4315	18.1016	19.6434
	M4	98.736	134.371	146.193	154.098	154.887
;						
ODS HTML FILE='ACCP';						
ODS GRAPHICS ON;						
proc cancorr corr out=LISTA;						
var OCE1 OCE2 OCE3 OCE4 OCE5;						
with OCM1 OCM2 OCM3 OCM4 OCM5;						
proc print data=LISTA;						
proc plot data=LISTA;						
plot V1*W1=LABEL/vpos=14 hpos=70;						
plot V1*V2=LABEL/vpos=14 hpos=70;						
plot W1*W2=LABEL/vpos=14 hpos=70;						
RUN;						
ODS HTML CLOSE;						
run;						
QUIT;						

www.poisson.com.br
contato@poisson.com.br

@editorapoisson

<https://www.facebook.com/editorapoisson>