DIAGRAMA DE ALLAN MARQUAND NA LÓGICA MATEMÁTICA

USO, APLICAÇÕES E DEFINIÇÕES DE NOVAS PROPRIEDADES LÓGICAS

VERA JUSSARA LOURENZI
ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA
NEUZA TEREZINHA ORO

Editora Poisson

Vera Jussara Lourenzi
Rosana Maria Luvezute Kripka
Neuza Terezinha Oro

Diagrama de Allan Marquand na lógica matemática: Uso, aplicações e definição de novas propriedades lógicas

Belo Horizonte
Poisson
2021

Editor Chefe: Dr. Darly Fernando Andrade

Conselho Editorial

Dr. Antônio Artur de Souza – Universidade Federal de Minas Gerais

Msc. Davilson Eduardo Andrade

Dra. Elizângela de Jesus Oliveira – Universidade Federal do Amazonas

Msc. Fabiane dos Santos

Dr. José Eduardo Ferreira Lopes – Universidade Federal de Uberlândia

Dr. Otaviano Francisco Neves – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Dr. Luiz Cláudio de Lima – Universidade FUMEC

Dr. Nelson Ferreira Filho – Faculdades Kennedy

Msc. Valdiney Alves de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D536

Diagrama de Allan Marquand na lógica matemática: Uso, aplicações e definição de novas propriedades lógicas / Vera Jussara Lourenzi; Rosana Maria Luvezute Kripka; Neuza Terezinha Oro – Belo Horizonte– MG: Poisson,2021

Formato: PDF

ISBN: 978-65-5866-049-1

DOI: 10.36229/978-65-5866-049-1

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

1. Matemática 2. Diagrama I. LOURENZI, Vera Jussara II. KRIPKA, Rosana Maria Luvezute. III. ORO, Neuza Terezinha IV. Título

CDD-510

Sônia Márcia Soares de Moura – CRB 6/1896

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

www.poisson.com.br

contato@poisson.com.br

SOBRE AS AUTORAS

Vera Jussara Lourenzi - Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (1977) e mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (1989). Atualmente em Regime Especial - Titular III da Universidade de Passo Fundo. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada. Atuando principalmente nos seguintes temas: Ensino e aprendizagem; Lógica Matemática.

Rosana Maria Luvezute Kripka - Possui graduação em Licenciatura em Matemática com ênfase em Computação pela Universidade de São Paulo (ICMC-USP/São Carlos, 1992), mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo (ICMC-USP/São Carlos, 1995) e doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (EDUCEM), da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS/Porto Alegre, 2018). É professora Titular II da Área de Matemática da Universidade de Passo Fundo (UPF)/RS/BR. Atua com pesquisa nas linhas de ensino e aprendizagem de matemática com uso de TIC, modelagem matemática, otimização e lógica matemática. Também atua em projeto de extensão na área de ensino de ciências e matemática.

Neuza Terezinha Oro - Possui graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade de Passo Fundo (1987) e mestrado em Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijui) em 1997. Atualmente é professor titular iii da Universidade de Passo Fundo é doutoranda em Modelagem Matemática na Unijui. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática e computacional, modelagem hidrodinâmica e de poluentes em águas superficiais, constructal design.

APRESENTAÇÃO

O raciocínio lógico matemático, geralmente aplicado a problemas de nosso cotidiano pode ser aprimorado por meio de estímulos e desafios, principalmente, com uso de ferramentas próprias da Lógica Matemática.

Os diagramas utilizados por Venn para representações geométricas de eventos e operações lógicas foram pouco explorados e utilizados pelas dificuldades de suas aplicações para análise de problemas um pouco mais complexos.

Em razão do descrédito na teoria das representações geométricas de eventos da lógica, o diagrama de Allan Marquand também foi pouco explorado. Porém, sua construção possui uma estrutura simples, bem organizada e permite a análise de fórmulas proposicionais mais complexas de maneira rápida e direta, conforme foi constatado em investigações realizadas na Universidade de Passo Fundo (UPF, Passo Fundo, RS, BR) com aplicações em todo o cálculo proposicional. Além disso, vale ressaltar que a sua utilização dispensa praticamente todo o cálculo algébrico (com exceção das primeiras regras de De Morgan), o que significa uma enorme vantagem no tratamento de problemas complexos ou de difícil resolução. Outra vantagem é que o uso do diagrama de Allan Marquand propicia a compreensão e a significação dos conceitos do cálculo proposicional, favorecendo, dessa forma, o processo de ensino e de aprendizagem da Lógica Matemática.

Assim, a aplicação do diagrama de Allan Marquand à lógica matemática vem sendo realizada no estudo do cálculo proposicional com uma série de vantagens em relação aos demais instrumentais lógicos.

O diagrama tem permitido uma compreensão mais aprofundada das operações lógicas, próprias do raciocínio, contribuindo para um processo de ensino-aprendizagem mais aperfeiçoado e significativo, pois proporciona tanto ao professor quanto ao estudante um tratamento especial, de fácil compreensão, dos vários conceitos e aplicações referentes aos conteúdos da disciplina de lógica matemática.

As aplicações e os resultados apresentados neste livro foram obtidos através de pesquisas e atividades desenvolvidas na disciplina de Lógica Matemática na Universidade de Passo Fundo.

Esperamos que os resultados aqui apresentados possam contribuir para o desenvolvimento de novas pesquisas em relação à Lógica Matemática.

As autoras.

PREFÁCIO

Foi com grande satisfação que recebi o convite para prefaciar este livro.

A minha satisfação deve-se, em primeiro lugar, ao fato de as autoras, além de amigas, serem docentes da Universidade de Passo Fundo, onde tive a felicidade de realizar minha graduação em matemática e iniciar minha carreira como formador de professores. Ainda guardo em minha memória lembranças agradáveis de convivência e de compartilhamento de sonhos por uma educação matemática mais significativa e por um projeto de formação de professores coerente com esses sonhos.

Em segundo lugar, porque foi ali que eu tive minhas primeiras lições de lógica matemática, com o saudoso professor Mendonça. Depois, mais tarde, no início dos anos de 1980, Vera Jussara e eu assumiríamos esta disciplina. Porém, foi Vera quem daria continuidade aos estudos em lógica, tendo, inclusive, concluído, sob a orientação do professor Ubiratan D'Ambrosio, sua dissertação de mestrado sobre esta temática.

Vera, a partir de então, tornar-se-ia uma das *experts* brasileiras sobre o ensino de lógica. Mais tarde, ao constituir parceria com Neuza e Rosana, daria outro salto qualitativo às experiências de ensino de lógica nos cursos de licenciatura plena em Matemática e Ciência da Computação. Ou seja, este livro é fruto de um processo de sistematização de mais de vinte anos de experiência das autoras no ensino de lógica na Universidade de Passo Fundo.

Hargreaves et al.¹ têm afirmado que os professores “são criadores da sua atividade profissional e também criaturas de seu próprio processo de trabalho”, ou seja, a pesquisa e a docência, enquanto funções básicas do professor universitário, acabam determinando, dependendo da relação que estabelece com elas, a construção de sua identidade profissional. Nesse sentido, as autoras deste livro podem ser identificadas como *formadoras pesquisadoras*, pois, como docentes universitárias, têm assumido a docência como função principal de seu trabalho na universidade, tendo a pesquisa sobre seu campo de conhecimento – o ensino da lógica matemática – como suporte fundamental para a realização e desenvolvimento dessa função.

A principal contribuição deste livro diz respeito ao uso e à exploração didática do diagrama de Allan Marquand para o ensino da lógica matemática. As autoras, ao longo do livro, ilustram e descrevem, de maneira cuidadosa e detalhada, esse recurso didático, mostrando suas possibilidades e potencialidades como recurso para o desenvolvimento do cálculo proposicional.

Trata-se, portanto, de uma obra que traz subsídios curriculares para uma abordagem diferenciada do cálculo proposicional, tendo por base a representação e o tratamento de proposições por meio de diagramas retangulares que expressam todas as combinações possíveis dos valores de verdade relativos a cada elemento de uma proposição declarativa composta.

¹ HARGREAVES, A. et al. *Aprendendo a mudar: o ensino para além dos conteúdos e da padronização*. Porto Alegre: Artmed, 2002, p. 151.

Em suma, com a publicação deste livro, a comunidade de educadores matemáticos ganha mais uma referência importante destinada a professores e alunos envolvidos com o ensino e a aprendizagem dos processos lógicos do pensamento humano, sobretudo aqueles relativos às enunciações declarativas e à construção de argumentos logicamente válidos.

Dario Fiorentini²

² Doutor em Educação e docente pesquisador da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). O prefácio escrito quando foi inicialmente publicado junto com a primeira versão do livro em 2007.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1. CÁLCULO PROPOSICIONAL	14
1.1 PROPOSIÇÕES E FÓRMULAS PROPOSICIONAIS	15
1.2 PROPOSIÇÕES DECLARATIVAS SIMPLES	15
1.3 PROPOSIÇÕES DECLARATIVAS COMPOSTAS	16
1.4 FÓRMULAS PROPOSICIONAIS	17
2. DIAGRAMA DE ALLAN MARQUAND	22
2.1 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA.....	23
2.2 USO DO DIAGRAMA	27
2.3 LEITURA DO DIAGRAMA	35
2.4 REPRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO LÓGICO DE FÓRMULAS PROPOSICIONAIS.....	37
3. PROPOSIÇÕES VÁLIDAS, CONTRAVÁLIDAS E INDETERMINADAS	48
3.1 PROPOSIÇÕES VÁLIDAS	49
3.2 PROPOSIÇÕES CONTRAVÁLIDAS	50
3.3 PROPOSIÇÕES INDETERMINADAS	51
4. RELAÇÕES LÓGICAS	53
4.1 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA	54
4.1.1 Verificação	54
4.1.2 Vantagens do uso do diagrama	60
4.2 RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO.....	63
4.2.1 Verificação	63
4.2.2 Vantagens do uso do diagrama	67
4.3 RELAÇÃO DE INCONSISTÊNCIA	71
4.3.1 Verificação	71
4.4 RELAÇÃO SUBCONTRÁRIA.....	74
4.4.1 Verificação	74
4.5 RELAÇÃO CONTRADITÓRIA.....	77
4.5.1 Verificação	78
4.6 VERIFICAÇÃO SIMULTÂNEA DAS RELAÇÕES.....	82
5. ARGUMENTOS	89
5.1 DEFINIÇÃO DE ARGUMENTO	90
5.2 ARGUMENTO VÁLIDO	90
5.3 CRITÉRIO DE VALIDADE DE UM ARGUMENTO.....	92
5.4 CONSTRUÇÃO DE ARGUMENTOS VÁLIDOS.....	95
6. RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE PROVAS DE CONCURSOS OU PROCESSOS SELETIVOS PARA PÓS-GRADUAÇÃO	98
6.1 QUESTÕES DE CONCURSOS DIVERSOS.....	99
6.2 QUESTÕES DE PROCESSOS SELETIVOS PARA INGRESSO EM PÓS-GRADUAÇÃO.....	111

7. DEFINIÇÃO DE NOVAS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS	120
7.1 DEMONSTRAÇÃO DAS NOVAS PROPRIEDADES.....	121
7.1.1 DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE (I).....	122
7.1.2 DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE (II).....	124
7.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	127
REFERÊNCIAS	131

Introdução

O conteúdo de lógica matemática vem sendo trabalhado regularmente nos cursos de Licenciatura Plena em Matemática e Ciência da Computação na Universidade de Passo Fundo, onde a utilização do diagrama de Marquand tem possibilitado a otimização do ensino do cálculo proposicional. Essa otimização decorre de diversas vantagens que o diagrama apresenta em relação aos métodos clássicos encontrados em livros-texto geralmente adotados em sala de aula (ALENCAR FILHO, 1999; JONOFON, 2000). Como resultado desse processo apresenta-se, inicialmente, um breve histórico do diagrama de Allan Marquand e, em seguida, a construção, a forma de uso e a descrição das vantagens mencionadas.

A lógica matemática tem sua importância como disciplina nos cursos das ciências exatas ao cumprir o objetivo de levar o estudante a tomar conhecimento do processo de raciocinar e apropriar-se da sistemática desse processo como um instrumental. Nesse sentido, a inserção do diagrama de Allan Marquand visa contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de forma que se torne mais aperfeiçoado e significativo.

A lógica simbólica ou matemática teve seu surgimento em meados do século XIX com as obras de George Boole (1815-1864), *Las leyes del pensamiento*, publicada em 1854, e de Gottlob Frege (1848-1925), *Conceptografia*, publicada em 1879. Boole propôs que fossem transportadas para a lógica a notação e as leis da álgebra, de forma a possibilitar a conversão das proposições categóricas em equações e os silogismos, em sistemas de equações, cuja solução seria possível por métodos algébricos (GARRIDO, 1995, p. 476-477).

Willian S. Jevons (1835-1882), apresentando diversas críticas ao sistema de Boole, propôs um sistema mais puro, livre dos complicados cálculos algébricos. Criou um outro sistema com várias modificações. Contudo, os cálculos de Jevons, pelos quais pretendia clarificar e simplificar os processos de Boole, resultaram em grandes complicações e ele não conseguiu realizar o intento de simplificar o sistema de Boole (BLANCHÉ, 1985, p. 280 e 286).

Jonh Venn (1834-1923) foi simpático à lógica de Boole e propôs ilustração da álgebra lógica através de diagramas. Tomou círculos de Euler para fazer interpretação de termos e de proposições, tendo constatado que se prestavam para representar ou expressar as operações lógicas, mas não serviam para interpretar raciocínios mais complexos. Relata Blanché (1985, p. 289): “A figuração por círculos só convém para a combinação de dois ou três termos, no máximo. Isso basta para o silogismo, mas não já para raciocínios um pouco mais complexos em que o número de termos é maior”.

Na mesma época, além dos círculos de Euler utilizados por Venn, outros diagramas foram propostos. Allan Marquand, em 1881; Alexander MacFarlane, em 1855, e Lewis Carrol,³ em 1886, propuseram diagramas retangulares que do cálculo das classes podiam ser transportados para o cálculo das proposições (BLANCHÉ, 1985, p. 290-291; CARROLL, 1986; GARDNER, 1958). Entretanto, as limitações encontradas no uso dos círculos de Euler levaram ao abandono do uso dos diagramas no cálculo dos predicados e das proposições.

L. Wittgenstein e E. L. Post, nos primeiros anos do século XX, resolveram o problema do cálculo das proposições com a tabela-verdade ou matriz de verdade. O uso da tabela-verdade constitui-se num processo de decisão no cálculo das proposições sem recorrência a axiomas. Segundo Blanché (1985, p. 352), “pode-se, com efeito, utilizar essas tabelas para reconhecer, de uma maneira direta, que dispensa que se percorra uma cadeia demonstrativa mais ou menos longa, se uma dada fórmula de cálculo é ou não uma lei lógica”.

Da mesma forma que os círculos de Euler mostraram-se inadequados quando o número de termos era grande, por ser difícil a representação, a tabela-verdade é inadequada para uma fórmula proposicional com um grande número de letras proposicionais, por ser um trabalho demasiadamente exaustivo. Diante dessa dificuldade, o cálculo algébrico continuou sendo utilizado como o melhor recurso pela maioria dos lógicos.

Entretanto, o uso dos diagramas retangulares, abandonados como recurso para o cálculo de termos e de proposições, tem sido adotado como recurso metodológico no sentido de facilitar o processo de aprendizagem da lógica. É o caso da proposta constante no livro *Lógica*, do Conselho Nacional de Professores de Matemática do México (1970), no qual se encontra a representação das operações lógicas nos diagramas retangulares.

Pedroso faz uso desse mesmo instrumental, chamando-o de “gráfico de Gonseth”, na álgebra dos interruptores; da mesma forma que o livro do Conselho Nacional de Professores de Matemática faz a representação dos juntores binários-operadores (1993, p. 59-60).

No início da década de 1980, os professores do Laboratório de Matemática da Universidade de Passo Fundo, em contato com o Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (Geempa), tomaram o diagrama de Allan Marquand para realizar atividades de desenvolvimento de raciocínio lógico de crianças de séries iniciais, fazendo uso dos blocos lógicos criados por Dienes (1975). O objetivo, nesse momento, era que as crianças compreendessem o significado das operações lógicas.

³ O nome verdadeiro de Lewis Carroll era Charles Lutwidge Dodgson (Carroll, 1986).

Nessa época foi criado o curso de Licenciatura Plena em Ciências, com o objetivo de instrumentalizar o professor para o ensino fundamental de matemática e ciências. A partir de então, na disciplina de Lógica Matemática do curso, o diagrama de Allan Marquand começou a ser utilizado como recurso metodológico.

Desde então foram feitos estudos exploratórios do uso do diagrama em todo o cálculo proposicional, tendo-se percebido várias vantagens desse instrumental em relação aos demais. Em decorrência dessas vantagens foi possível otimizar o ensino da lógica. Dessa forma, o diagrama também passou a ser utilizado na disciplina de Lógica Matemática nos cursos de licenciatura em Matemática e Ciências da Computação. As atividades desenvolvidas nesta disciplina até o presente momento têm servido para demonstrar que o diagrama retangular de Allan Marquand pode ser utilizado com grande vantagem não apenas como recurso metodológico, mas como recurso eficaz no cálculo proposicional.

Capítulo 1

Cálculo Proposicional

Todo conhecimento humano, científico ou não, é expresso através de conjuntos de frases (proposições) declarativas. O objetivo da lógica consiste em realizar estudos relativos à forma de raciocínio, tanto no processo de investigação como de divulgação de resultados.

1.1 PROPOSIÇÕES E FÓRMULAS PROPOSICIONAIS

Uma proposição é uma sentença, ou enunciado, que expressa uma ideia. Existem vários tipos de proposições, tais como as imperativas, as exclamativas, as interrogativas e as declarativas. Por exemplo: “Que linda paisagem!” é uma proposição exclamativa; “Limpe o jardim” é uma proposição imperativa; “Qual a distância entre a Lua e a Terra?” é uma proposição interrogativa; “Os elefantes são pesados” é uma proposição declarativa. Observemos que somente à última podemos associar um único valor de verdade, no caso, verdadeiro, que é definido com base na experiência comum. No cálculo proposicional consideram-se apenas as proposições declarativas.

1.2 PROPOSIÇÕES DECLARATIVAS SIMPLES

São aquelas que expressam apenas uma declaração sobre uma pessoa, um fenômeno, um fato, enfim, sobre um sujeito ou objeto qualquer. Essas são chamadas “átomos de linguagem”.

Exemplos:

- As crianças brincam.
- A ovelha Dolly foi o primeiro clone animal.
- O branco é a cor da paz.
- A temperatura de solidificação da água é de 0 °C.
- O número 3 (três) é primo.
- A raiz quadrada de 2 (dois) é um número racional.

Facilmente associamos o valor de verdade verdadeiro (V) às cinco primeiras proposições, e o valor de verdade falso (F), à última.

Ao analisar qualquer proposição declarativa simples quanto ao seu valor de verdade, utilizamos os seguintes princípios fundamentais da lógica:

1. *Princípio da não-contradição*: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
2. *Princípio do terceiro excluído*: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, ficando excluída uma terceira possibilidade.

Esses princípios definem a característica de bivalência da lógica matemática.

1.3 PROPOSIÇÕES DECLARATIVAS COMPOSTAS

São aquelas que expressam duas ou mais declarações sobre um mesmo sujeito ou sobre sujeitos diferentes, ou seja, uma proposição composta se constitui de, no mínimo, duas proposições simples.

Exemplos:

- A água mineral é incolor e inodora.
- Santos Dumont é o pai da aviação e Sigmund Freud é o inventor da lâmpada.
- O inverno do Rio Grande do Sul é frio ou chuvoso.
- Numa refeição, como ou bebo.
- Se ocorre tempestade, então acontecem destruições.
- Mosquitos picam se, e somente se, são fêmeas.
- Ou Picasso é famoso ou é pintor.
- Pessoas gestam se, e somente se, são do sexo feminino.

No caso de proposições declarativas compostas, o valor de verdade associado depende dos valores de verdade de cada uma das proposições simples que as compõem. Nos exemplos acima, a segunda e a sétima proposições são falsas; as demais são verdadeiras.

A forma de determinação do valor lógico de uma proposição composta será apresentada no capítulo 2.

1.4 FÓRMULAS PROPOSICIONAIS

As fórmulas proposicionais são obtidas mediante a simbolização de proposições. Para representar proposições declarativas simples (átomos de linguagem) utilizaremos as letras minúsculas da sequência $p, q, r, s, t, \dots$, as quais chamaremos de “letras proposicionais”. Denotaremos o valor de verdade de uma letra proposicional p por $V(p) = V$, caso seja verdadeira, e $V(p) = F$, caso seja falsa.

Exemplos:

- a) p : o número 3 (três) é primo, $V(p) = V$.
- b) q : o número 4 (quatro) é primo, $V(q) = F$.

Na representação de proposições declarativas compostas utilizaremos letras maiúsculas, tais como $A, B, C, \dots$. Se uma proposição composta A se constitui de n proposições simples, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, então podemos indicá-la por $A(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$.

Na simbolização de uma proposição composta, além das letras proposicionais (que representam as proposições simples), utilizamos símbolos para representar os conectivos, que são palavras ou expressões na linguagem corrente que unem as proposições simples. Os conectivos aparecem de várias formas na linguagem corrente, porém se constituem num reduzido número de operações.

Os principais conectivos na linguagem corrente podem ser agrupados de acordo com a operação específica da conexão que representam, conforme listados a seguir:

- (i) e, mas, porém, contudo, todavia, etc.;
- (ii) ou, ora, etc.,
- (iii) ou...ou, ora... ora..., etc.,
- (iv) se... então..., implica, portanto, logo, acarreta, em consequência, condição suficiente para, assim, daí, por conseguinte, etc.;
- (v) ...se, e somente se..., biimplica, condição necessária e suficiente, etc.

Os conectivos apresentados indicam operações do tipo:

- em (i) a operação de *conjunção* entre proposições simples. Vários símbolos são utilizados para denotar a conjunção, entre eles $\wedge$, $\cap$, $\bullet$, $\&$;
- em (ii) a operação de *disjunção inclusiva*, a qual é usualmente denotada por $\vee$, $+$ ou $\cup$;
- em (iii) a operação de *disjunção exclusiva*, a qual é usualmente denotada por $\underline{\vee}$;
- em (iv) a operação de *implicação (condicional)*, a qual é usualmente denotada por $\rightarrow$ ou $\supset$;
- em (v) a operação de *biimplicação (bicondicional)*, a qual é usualmente denotada por $\leftrightarrow$.

Os símbolos que denotam as operações lógicas são chamados conectivos lógicos ou operadores lógicos.

Qualquer proposição composta, quando simbolizada, constitui-se numa “fórmula proposicional”, representada por letras proposicionais e operadores lógicos arranjados conforme a estrutura lógica da sentença.

Exemplos:

a) Seja A : A água mineral é incolor e inodora.

Tomando:

p : A água mineral é incolor.

q : A água mineral é inodora.

Temos a fórmula proposicional $A(p, q) = p \wedge q$.

b) Seja B : O inverno do Rio Grande do Sul é frio ou chuvoso.

Tomando:

p : O inverno do Rio Grande do Sul é frio.

q : O inverno do Rio Grande do Sul é chuvoso.

Temos a fórmula proposicional $B(p, q) = p \vee q$.

c) Seja C : Nos meus exercícios diários ou faço uma hora de caminhada ou uma hora de bicicleta.

Tomando:

p : Nos meus exercícios diários faço uma hora de caminhada.

q : Nos meus exercícios diários faço uma hora de bicicleta.

Temos a fórmula proposicional $C(p,q) = p \vee q$

d) Seja D : Se ocorre tempestade, então acontecem destruições.

Tomando:

p : Ocorre tempestade.

q : Acontecem destruições.

Temos a fórmula proposicional $D(p,q) = p \rightarrow q$

e) Seja E : Mosquitos picam se, e somente se, são fêmeas.

Tomando:

p : Mosquitos picam.

q : Mosquitos são fêmeas.

Temos a fórmula proposicional: $E(p,q) = p \leftrightarrow q$

Em todos os exemplos apresentados foram utilizadas apenas as letras p e q , pois representam situações independentes.

Caso tenhamos várias proposições inter-relacionadas, devem ser utilizadas diferentes letras proposicionais.

Exemplo:

“João tem prova de lógica. Ou João estuda para a prova ou joga futebol com seus amigos. Se estuda, então tem boa nota em lógica.”

Na representação da conjunção entre as proposições, temos a fórmula proposicional

$$p \wedge (q \vee r) \wedge (q \rightarrow s),$$

onde:

p : João tem prova de lógica.

q : João estuda para a prova.

r : João joga futebol com os amigos.

s : João tem boa nota em lógica.

O valor de verdade $V(A)$ associado a uma proposição composta A depende dos valores de verdade de cada proposição que a compõe, sendo possível determiná-lo de forma única, onde $V(A) = V$ ou $V(A) = F$.

Uma fórmula proposicional qualquer possui um conjunto de valores de verdade associado a ela, o qual é obtido considerando-se todas as combinações possíveis dos valores de verdade associados às letras proposicionais que a compõem.

A forma clássica de apresentação dessas combinações é a tabela-verdade, cuja definição foi feita por Wittgenstein em 1920, a qual é apresentada como um instrumental do cálculo proposicional na maior parte dos livros de lógica matemática (ALENCAR FILHO, 1999; WITTGENSTEIN, 1921). Para ilustrar tal instrumento, considere-se a fórmula:

$$A: (p \rightarrow (q \wedge r)) \vee (p \leftrightarrow \sim q),$$

cuja tabela-verdade correspondente é a Tabela 1.1.

Tabela 1.1 - Tabela-verdade de A

$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$r))$	V	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V

Fonte: Autoras

Conforme observamos na coluna hachurada da Tabela 1.1, os valores de verdade associados à fórmula A são $V(A) = VFVVVVVV$.

Outro instrumento do cálculo proposicional que permite obter o conjunto dos valores de verdade associados a uma fórmula proposicional é o diagrama de Allan Marquand.

No capítulo 2 apresentamos o diagrama de Allan Marquand e suas aplicações no cálculo proposicional.

Capítulo 2

Diagrama de Allan Marquand

O uso do diagrama, assim como a utilização da tabela-verdade, permite obter o conjunto de valores de verdade associados a uma fórmula proposicional, a verificação da existência de relações entre fórmulas proposicionais, a obtenção das maiores fórmulas normais conjuntivas (FNC) e normais disjuntivas (FND) e a verificação da validade de argumentos.

Entretanto, o uso do diagrama também permite a obtenção das menores fórmulas equivalentes a uma fórmula dada, inclusive as menores FNCs e FNDs, e a construção de argumentos válidos.

Além dessas vantagens, o uso do diagrama independe de quaisquer outros instrumentais, com exceção da aplicação das primeiras leis de De Morgan na obtenção da FNC, e é um instrumento de fácil compreensão e utilização quando comparado aos demais instrumentais clássicos disponíveis na literatura para os mesmos fins.

2.1 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA

Permitindo representar a estrutura lógica de fórmulas proposicionais quaisquer, o diagrama de Allan Marquand consiste numa figura retangular que pode ser subdividida conforme o número de letras proposicionais da fórmula a ser representada. Para n letras, temos um diagrama com 2^n regiões.

Assim, para fórmulas proposicionais constituídas de apenas uma letra proposicional, temos 2^1 regiões, cujo diagrama correspondente está representado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Diagrama para fórmulas com uma letra proposicional

Fonte: Autoras

Para fórmulas proposicionais compostas por duas letras, p e q , temos o diagrama dividido em quatro regiões, tal como representado na Figura 2.2.

Figura 2.2 - Diagrama para fórmulas com duas letras proposicionais

Fonte: Autoras

Observe-se que cada região do diagrama fica bem definida pela disposição das letras, que é feita no sentido horário. A disposição de cada letra e sua respectiva negação obedecem aos sentidos convencionais da escrita ocidental, isto é, na horizontal, da esquerda para a direita e, na vertical, de cima para baixo.

Essa forma de construção aplica-se a fórmulas com qualquer número de letras proposicionais. Por exemplo, para fórmulas com três letras proposicionais p , q e r , temos o diagrama conforme representado na Figura 2.3.

Figura 2.3 - Construção do diagrama para fórmulas com três letras proposicionais

Fonte: Autoras

Para facilitar a localização das regiões, procedemos à sua enumeração seguindo o sentido das subdivisões. Fixando a localização da letra p à esquerda do diagrama, tal como nas Figuras 2.1 e 2.2, a enumeração é feita conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4 - Enumeração do diagrama para representação de fórmulas com uma letra proposicional

Fonte: Autoras

A primeira divisão é realizada no sentido vertical e da mesma forma é feita a enumeração, conforme indicado pela seta na Figura 2.4, onde identificamos a região 1 como a região de p e a região 2, como a de $\sim p$.

A subdivisão orientada pela inclusão de uma segunda letra proposicional q divide cada região da Figura 2.4 horizontalmente, e a nova enumeração das regiões do diagrama deve ser feita considerando a ordem crescente das divisões anteriores, na horizontal, no sentido da esquerda para a direita, conforme as setas no diagrama ilustrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 - Enumeração do diagrama para representação de fórmulas com duas letras proposicionais

Fonte: Autoras

Neste caso, identificamos as regiões enumeradas no diagrama correspondentes às letras proposicionais, conforme apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Identificação de regiões num diagrama para duas letras proposicionais

Letra proposicional	Regiões
p	1 e 2
$\sim p$	3 e 4
q	1 e 3
$\sim q$	2 e 4

Fonte: Autoras

As demais subdivisões e novas enumerações seguem o mesmo procedimento. Em seguida, apresentamos as enumerações dos diagramas para fórmulas com três e quatro letras, representados nas Figuras 2.6.(a) e 2.6.(b), respectivamente.

(a) Fórmulas com três letras proposicionais.

(b) Fórmulas com quatro letras proposicionais.

Figura 2.6 - Enumeração de diagramas

Fonte: Autoras

No caso do diagrama representado na Figura 2.6.(a), temos a identificação de regiões conforme a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Identificação de regiões num diagrama para três letras proposicionais

Letra proposicional	Regiões
p	1, 2, 3 e 4
$\sim p$	5, 6, 7 e 8
q	1, 2, 5 e 6
$\sim q$	3, 4, 7 e 8
r	1, 3, 5 e 7
$\sim r$	2, 4, 6 e 8

Fonte: Autoras

Por último, no caso do diagrama representado na Figura 2.6.(b), temos a identificação de regiões conforme a Tabela 2.3.

Tabela 2.3 - Identificação de regiões num diagrama para quatro letras proposicionais

Letra proposicional	Regiões
p	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8
$\sim p$	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16
q	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12
$\sim q$	5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 e 16
r	1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 e 14
$\sim r$	3, 4, 7, 8, 11, 12, 15 e 16
s	1, 3, 9, 11, 5, 7, 13 e 15
$\sim s$	2, 4, 10, 12, 6, 8, 14 e 16

Fonte: Autoras

2.2 USO DO DIAGRAMA

Inicialmente, mostramos como fica representada a estrutura lógica de cada uma das fórmulas proposicionais fundamentais.

Figura 2.7 - Representação da estrutura das fórmulas proposicionais fundamentais.

Fonte: Autoras

A Figura 2.7.(a), que representa o conteúdo lógico da fórmula conjuntiva $p \wedge q$, tem a região 1 hachurada, pois, no diagrama, para duas letras proposicionais, é a região onde p e q ocorrem conjuntamente.

A Figura 2.7.(b), que representa o conteúdo lógico da fórmula disjuntiva inclusiva $p \vee q$, tem as regiões 1, 2 e 3 hachuradas, porque essas representam as regiões de ocorrência de p , de q e, inclusive, a ocorrência simultânea de p e q . Já a Figura 2.7.(c) representa o conteúdo lógico da disjunção exclusiva $p \underline{\vee} q$, sendo excluída a região 1 da representação de $p \vee q$, onde p e q ocorreram simultaneamente.

A Figura 2.7.(d), que representa o conteúdo lógico da fórmula condicional $p \rightarrow q$, tem as regiões 1, 3 e 4 hachuradas, visto que a ocorrência de p determina a ocorrência de q (região 1) e a ocorrência de $\sim p$ não é determinante na ocorrência de q , isto é, q pode ou não ocorrer (regiões 3 e 4).

A Figura 2.7.(e), que representa o conteúdo lógico da fórmula bicondicional $p \leftrightarrow q$, tem as regiões 1 e 4 hachuradas, pois a ocorrência de p implica a ocorrência de q e vice-versa. Em

outras palavras, a ocorrência de p determina a ocorrência de q (região 1), ao passo que a não-ocorrência de p determina a não-ocorrência de q (região 4).

Observe-se que as regiões hachuradas num diagrama representam o conteúdo lógico relativo à estrutura lógica de uma respectiva fórmula proposicional, onde o conteúdo lógico é a expressão da situação em que tal estrutura ocorre, ou seja, verifica-se.

Para facilitar a compreensão do processo de representação do conteúdo lógico das fórmulas proposicionais apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 1:

Considerando a proposição

A : As flores de plástico enfeitam ambientes e dispensam água.

Fazendo a simbolização da proposição A obtemos a fórmula proposicional $p \wedge q$,

onde:

p : As flores de plástico enfeitam ambientes.

q : As flores de plástico dispensam água.

A representação do conteúdo lógico de $p \wedge q$ pode ser visualizada na Figura 2.8.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.8 - Representação de $p \wedge q$

Fonte: Autoras

Para uma fórmula proposicional qualquer com mais de duas letras proposicionais ou com mais de um conectivo, a representação do conteúdo lógico é realizada em etapas, que obedecem aos sinais de associação, quando existirem, ou à hierarquia das operações lógicas, a qual respeita a seguinte ordem: negação, conjunção, disjunção inclusiva, disjunção exclusiva, condicional, bicondicional. As etapas de construção do diagrama são representadas por meio de símbolos, tais como: $\circ$, $+$, Δ , $*$ e $\oplus$.

Exemplo 2:

Seja a fórmula proposicional

$$A: p \wedge (q \vee r).$$

Conforme determinam os parênteses, representamos primeiro o conteúdo lógico da disjunção $p \vee q$, o qual será indicado no diagrama pelo símbolo o (Fig. 2.9); a seguir, representamos o conteúdo lógico da conjunção, ou seja, da fórmula A , pelo hachuramento das regiões correspondentes a $p \wedge o$ (Fig. 2.10).

	q	$\sim q$	
p	o 1	3 o	r
	o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	o 5	7 o	r
	o 6	8	$\sim r$

Figura 2.9 - Representação de $q \vee r$

Fonte: Autoras

Observe-se que na Figura 2.9 todas as regiões, tanto de q como de r , foram marcadas por o , porque indicam a ocorrência de q ou r .

	q	$\sim q$	
p	o 1	3 o	r
	o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	o 5	7 o	r
	o 6	8	$\sim r$

Figura 2.10 - Representação de $p \wedge o$

Fonte: Autoras

Na Figura 2.10 as regiões hachuradas indicam a ocorrência simultânea de p e o , o que representa o conteúdo lógico de A .

Exemplo 3:

Seja a fórmula proposicional

$$B: (p \rightarrow q) \vee (\sim q \rightarrow r),$$

onde é considerado:

$$o : p \rightarrow q$$

$$+ : \sim q \rightarrow r$$

$$\square : o \vee +$$

Inicialmente, temos o seguinte diagrama da Figura 2.11, no qual representamos o conteúdo lógico de $p \rightarrow q$.

	q	$\sim q$	
p	o 1	3 o	r
	o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	o 5	7 o	r
	o 6	8	$\sim r$

Figura 2.11 - Representação de $o: p \rightarrow q$

Fonte: Autoras

Neste caso, as regiões 1 e 2 foram marcadas, pois a ocorrência de p define a ocorrência de q , porém as regiões 5, 6, 7 e 8 foram marcadas, porque a não-ocorrência de p não define a ocorrência ou não de q (Fig. 2.11).

Em seguida, tomando o diagrama da Figura 2.11, representamos o conteúdo lógico de $\sim q \rightarrow r$, que pode ser visualizado na Figura 2.12.

	q	$\sim q$	
p	+ o 1	3 +	r
	+ o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	+ o 5	7 o +	r
	+ o 6	8 o	$\sim r$

Figura 2.12 - Representação de $+: \sim q \rightarrow r$

Fonte: Autoras

Como no caso anterior, na Figura 2.12 as regiões 3 e 7 foram marcadas por +, porque a ocorrência de $\sim q$ define a ocorrência de r , e a não-ocorrência de $\sim q$, ou seja, a ocorrência de q , não define a ocorrência ou não de r .

Por último, tomando o diagrama da Figura 2.12, finalizamos a representação do conteúdo lógico de B , onde, na Figura 2.13, foram hachuradas todas as regiões, exceto a 4, pois contém o ou +.

	q	$\sim q$	
p	+ o 1	3 +	r
	+ o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	+ o 5	7 o +	r
	+ o 6	8 o	$\sim r$

Figura 2.13 - Representação de B : o $\vee$ +

Fonte: Autoras

Exemplo 4:

Seja a fórmula proposicional

$$C: (\sim p \leftrightarrow r) \underline{\vee} (q \leftrightarrow (\sim r \wedge s)),$$

onde é considerado:

$$o : p \leftrightarrow r$$

$$+ : \sim r \wedge s$$

$$\Delta : q \leftrightarrow +$$

$$\square : o \underline{\vee} \Delta$$

Para representar o conteúdo lógico de C procedemos da mesma forma que no exemplo 3, onde é feita a representação dos símbolos sucessivamente, conforme as Figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17.

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	o 3	o 4	o 7	o 8	$\sim r$
$\sim p$	o 9	o 10	o 13	o 14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.14 - Representação de o: $\sim p \leftrightarrow r$

Fonte: Autoras

Na Figura 2.14, as regiões 9, 10, 13 e 14 foram marcadas, porque a ocorrência de $\sim p$ define a ocorrência de r , e as regiões 3, 4, 7 e 8 foram marcadas, porque a não-ocorrência de $\sim p$, ou seja, a ocorrência de p define a não-ocorrência de r , ou seja, a ocorrência de $\sim r$.

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	+ o 3	o 4	+ o 7	o 8	$\sim r$
$\sim p$	o 9	o 10	o 13	o 14	r
	+ 11	12	+ 15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.15 - Representação de + : $\sim r \wedge s$.

Fonte: Autoras

Na Figura 2.15 foram assinaladas por + as regiões que representam a intersecção das regiões de $\sim r$ e s , o que corresponde à conjunção de $\sim r$ e s .

	q		$\sim q$		
p	1	2	Δ 5	Δ 6	r
	+ Δ o 3	o 4	+ o 7	o Δ 8	$\sim r$
$\sim p$	o 9	o 10	o Δ 13	o Δ 14	r
	+ Δ 11	12	+ 15	Δ 16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.16 - Representação de Δ : $q \leftrightarrow +$

Fonte: Autoras

Na Figura 2.16 foram assinaladas as regiões 3 e 11, porque a ocorrência de q define a ocorrência de $+$, e as regiões 5, 6, 8, 13, 14 e 16 foram assinaladas, porque a não-ocorrência de q define a não-ocorrência de $+$.

	q		$\sim q$		
	1	2	Δ 5	Δ 6	r
p	$+$ Δ $\circ$ 3	$\circ$ 4	$+$ $\circ$ 7	$\circ$ Δ 8	$\sim r$
	$\circ$ 9	$\circ$ 10	$\circ$ Δ 13	$\circ$ Δ 14	r
$\sim p$	$+$ Δ 11	12	$+$ 15	Δ 16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.17 - Representação de C : o Δ

Fonte: Autoras

Na Figura 2.17 as regiões hachuradas representam o conteúdo lógico de C .

Nos exemplos citados, as representações dos conteúdos lógicos indicados pelos símbolos foram feitas separadamente para que o leitor pudesse ter uma melhor compreensão do processo. Contudo, todas as representações dos símbolos podem ser realizadas sucessivamente no mesmo diagrama.

Aquilo a que denominamos como “conteúdo lógico” na representação da estrutura lógica de uma fórmula proposicional no diagrama de Allan Marquand equivale ao conjunto dos valores de verdade Vs na tabela-verdade.

É fundamental que seja observada a ordem de colocação das letras proposicionais no diagrama, como anteriormente apresentado, e considerada a ordem alfabética destas na construção da tabela-verdade de uma dada fórmula proposicional, para que a correspondência entre os dois instrumentos seja facilmente percebida.

Para melhor compreender essa correspondência, apresentamos o diagrama e a tabela-verdade da fórmula

$$D: p \rightarrow (q \vee r \leftrightarrow \sim q) \wedge r$$

Considerando a hierarquia das operações, podemos acrescentar em D alguns parênteses, obtendo $E: (p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$, a qual é equivalente à fórmula proposicional D .

Seguindo a ordem das operações, definida pelos parênteses, associamos os seguintes símbolos:

$$o: (q \vee r)$$

$$+ : o \leftrightarrow \sim q$$

$$\Delta : + \wedge r$$

$$\Box : (p \rightarrow \Delta)$$

Esquemáticamente, temos:

$$\Box \quad o \quad + \quad \Delta \\ E: p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r)$$

cuja representação no diagrama pode ser visualizada na Figura 2.18.

	q	$\sim q$	
p	o 1	3 oΔ +	r
	o 2	4	$\sim r$
$\sim p$	o 5	7 oΔ +	r
	o 6	8	$\sim r$

Figura 2.18 - Representação da fórmula proposicional E

Fonte: Autoras

O conjunto das regiões hachuradas na Figura 2.18 representa o conteúdo lógico de E .

A tabela-verdade da fórmula proposicional E encontra-se na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 - Tabela-verdade de E

$(p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$	
V F V V V F F F V	1ª linha
V F V V F F F F F	2ª linha
V V F V V V V V V	3ª linha
V F F F F F V F F	4ª linha
F V V V V F F F V	5ª linha
F V V V F F F F F	6ª linha
F V F V V V V V V	7ª linha
F V F F F F V F F	8ª linha

Fonte: Autoras

Na tabela-verdade 2.4 temos oito linhas e, no diagrama da Figura 2.18, oito regiões. O valor de verdade da fórmula proposicional da primeira linha da tabela-verdade corresponde à região 1 do diagrama; a segunda linha, à região 2, e assim sucessivamente.

A estrutura lógica da fórmula dada pode ser percebida na tabela-verdade pelos Vs e Fs da coluna correspondente aos valores lógicos da mesma; no diagrama, pelas regiões hachuradas e não hachuradas, respectivamente.

2.3 LEITURA DO DIAGRAMA

Dado um diagrama com um determinado conteúdo lógico, podemos, pela leitura das regiões nele hachuradas, obter fórmulas proposicionais que o descrevam.

Exemplos:

1) Seja o diagrama da Figura 2.19.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.19 - Representação do exemplo 1.

Fonte: Autoras

Pela descrição das regiões hachuradas, por meio das operações lógicas podemos obter fórmulas proposicionais, as quais representam o conteúdo lógico contido no diagrama.

Pela leitura direta do diagrama da Figura 2.19 podemos obter, entre outras, as seguintes fórmulas proposicionais:

$$A_1: (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$A_2: p \vee \sim q$$

$$A_3: \sim p \rightarrow \sim q$$

$$A_4: q \rightarrow p$$

$$A_5: (p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$$

$$A_6: (p \underline{\vee} \sim q) \vee p$$

2) Seja o diagrama da Figura 2.20.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.20 - Representação do exemplo 2.

Fonte: Autoras

Pela leitura das regiões hachuradas, temos as seguintes fórmulas proposicionais associadas:

$$A_1: (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$$

$$\vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

$$A_2: r \vee (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$A_3: r \vee (p \leftrightarrow q)$$

$$A_4: (p \underline{\vee} \sim q) \vee r$$

$$A_5: (q \wedge r) \vee (\sim q \wedge r) \vee (p \leftrightarrow q)$$

3) Seja o diagrama da Figura 2.21.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.21 - Representação do exemplo 3.

Fonte: Autoras

Temos as seguintes fórmulas proposicionais associadas:

$$A_1: p \vee \sim p$$

$$A_2: q \vee \sim q$$

4) Seja o diagrama da Figura 2.22.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.22 - Representação do exemplo 4.

Fonte: Autoras

Temos as seguintes fórmulas proposicionais associadas:

$$A_1: p \wedge \sim p$$

$$A_2: q \wedge \sim q$$

2.4 REPRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO LÓGICO DE FÓRMULAS PROPOSICIONAIS

A seguir apresentamos exemplos de fórmulas proposicionais representados no diagrama de Allan Marquand.

$$1) p \wedge \sim q$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.23 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 1.

Fonte: Autoras

$$2) \sim p \vee q$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.24 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 2.

Fonte: Autoras

$$3) p \leftrightarrow \sim q$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.25 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 3.

Fonte: Autoras

$$4) p \rightarrow \sim q$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.26 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 4.

Fonte: Autoras

$$5) (p \wedge q) \rightarrow \sim p$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.27 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 5.

Fonte: Autoras

$$6) (\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.28 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 6.

Fonte: Autoras

$$7) (p \vee q) \rightarrow p$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.29 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 7.

Fonte: Autoras

$$8) (\sim p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.30 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 8.

Fonte: Autoras

$$9) (q \leftrightarrow \sim p) \wedge (q \rightarrow p)$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.31 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 9.

Fonte: Autoras

$$10) p \rightarrow (q \vee \sim p)$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.32 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 10.

Fonte: Autoras

$$11) (\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.33 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 11.

Fonte: Autoras

$$12) \sim((p \rightarrow q) \vee (q \leftrightarrow \sim p))$$

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 2.34 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 12.

Fonte: Autoras

$$13) (p \rightarrow r) \vee (q \underline{\vee} r)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.35 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 13.

Fonte: Autoras

$$14) ((\sim p) \leftrightarrow \sim r) \underline{\vee} (q \rightarrow (\sim r \wedge p))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.36 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 14.

Fonte: Autoras

$$15) (r \vee \sim q) \leftrightarrow (q \underline{\vee} \sim p)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.37 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 15.

Fonte: Autoras

$$16) \sim(q \vee (\sim r \wedge \sim p))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.38 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 16.

Fonte: Autoras

$$17) \sim(((\sim q \vee r) \vee p) \rightarrow (r \rightarrow \sim q))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.39 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 17.

Fonte: Autoras

$$18) (\sim p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)) \rightarrow (\sim r \vee p)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.40 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 18.

Fonte: Autoras

$$19) (\sim p \vee q) \rightarrow (q \vee p) \leftrightarrow \sim r$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.41 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 19.

Fonte: Autoras

$$20) (r \leftrightarrow q) \wedge (\sim p \leftrightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow \sim q)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.42 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 20.

Fonte: Autoras

$$21) ((q \rightarrow \sim r) \rightarrow (r \wedge \sim p)) \rightarrow (p \wedge \sim q)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.43 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 21.

Fonte: Autoras

$$22) (p \wedge q) \rightarrow (s \wedge r)$$

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.44 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 22.

Fonte: Autoras

$$23) ((\sim p \vee (q \rightarrow r)) \vee (\sim p \underline{\vee} \sim r))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.45 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 23.

Fonte: Autoras

$$24) \sim(q \leftrightarrow (\sim p \underline{\vee} r)) \vee (p \wedge \sim r \wedge q)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.46 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 24.

Fonte: Autoras

$$25) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \underline{\vee} r) \leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r)$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.47 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 25.

Fonte: Autoras

$$26) (p \wedge \sim q) \underline{\vee} (\sim p \vee \sim r) \underline{\vee} (q \rightarrow (p \vee r))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.48 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 26.

Fonte: Autoras

$$27) \sim(p \underline{\vee} \sim r) \rightarrow \sim((p \underline{\vee} \sim r) \wedge (r \underline{\vee} \sim q))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.49 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 27.

Fonte: Autoras

$$28) (((\sim p \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge p \wedge \sim r) \rightarrow q) \leftrightarrow r$$

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.50 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 28.

Fonte: Autoras

$$29) (\sim q \underline{\vee} r) \rightarrow ((p \vee \sim q \vee s) \underline{\vee} (\sim p \wedge \sim s))$$

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.51 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 29.

Fonte: Autoras

$$30) q \rightarrow \sim(p \wedge \sim q \rightarrow q \vee \sim r) \wedge \sim s$$

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.52 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 30.

Fonte: Autoras

$$31) (((\sim s \vee \sim p) \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow \sim s$$

		q		$\sim q$	
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 2.53 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 31.

Fonte: Autoras

$$32) (q \wedge \sim p \wedge r) \leftrightarrow ((q \vee \sim p \vee \sim r) \rightarrow (q \vee (\sim r \wedge p)))$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 2.54 - Representação do conteúdo lógico do exemplo 32.

Fonte: Autoras

Capítulo 3

*Proposições válidas,
contraválidas e
indeterminadas*

Uma fórmula proposicional lógica pode ser classificada como válida (tautológica), contraválida (contradição) e indeterminada (contingente), dependendo do conjunto de valores de verdade associados a ela. No caso do uso do diagrama, a classificação se dá pelo conteúdo lógico que representa a fórmula considerada.

3.1 PROPOSIÇÕES VÁLIDAS

Uma fórmula é dita válida ou tautológica quando os valores de verdade a ela associados são todos verdadeiros ou quando o seu conteúdo lógico compreende todas as regiões do diagrama.

Exemplo:

Considerando $A: (p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow p))$, obtemos a tabela-verdade 3.1 desta e o respectivo diagrama na Figura 3.1.

Tabela 3.1 - Tabela-verdade de A.

$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$((p$	$\rightarrow$	$\sim q)$	$\wedge$	$(\sim q$	$\rightarrow$	$p))$
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F

Fonte: Autoras

Pela tabela-verdade de A, $V(A) = V V V V$, ou seja, A é válida.

Figura 3.1 - Conteúdo lógico de A.

Fonte: Autoras

Na representação do conteúdo lógico de A , consideramos:

$$o : (p \leftrightarrow \sim q)$$

$$+ : (p \rightarrow \sim q)$$

$$\Delta : (\sim q \rightarrow p)$$

$$\square : + \wedge \Delta$$

$$\blacksquare : o \rightarrow \square$$

Como o conteúdo lógico de A coincide com a área total do diagrama, A é válida.

3.2 PROPOSIÇÕES CONTRAVÁLIDAS

Uma fórmula proposicional é contraválida ou é uma contradição quando todos os valores de verdade a ela associados são falsos, ou quando o seu conteúdo lógico corresponde a um diagrama vazio.

Exemplo:

Considerando $B: (\sim p \vee q) \wedge \sim(p \rightarrow q)$, obtemos a tabela-verdade 3.2 desta e o respectivo diagrama na Figura 3.2.

Tabela 3.2 - Tabela-verdade de B .

$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F

Fonte: Autoras

Pela tabela-verdade de B , $V(B) = F F F F$, ou seja, B é contraválida.

	q	$\sim q$
p	$\begin{matrix} + \\ 1 \\ o \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ \Delta \end{matrix}$
$\sim p$	$\begin{matrix} + \\ 3 \\ o \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ o + \end{matrix}$

Figura 3.2 - Conteúdo lógico de B .

Fonte: Autoras

Na representação do conteúdo lógico de B consideramos:

$$o : \sim p \vee q$$

$$+ : p \rightarrow q$$

$$\Delta : \sim +$$

$$\square : o \wedge \Delta$$

Como o conteúdo lógico de B é vazio, B é contraválida.

3.3 PROPOSIÇÕES INDETERMINADAS

Uma fórmula proposicional é indeterminada ou contingente quando o conjunto de valores de verdade associado a ela contém verdades e falsidades, ou quando, no diagrama de Allan Marquand, o conteúdo lógico da mesma não corresponde a um diagrama vazio nem à totalidade das regiões.

Exemplo:

Considerando $C: \sim(p \leftrightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow p)$, obtemos a tabela-verdade 3.3 desta e o respectivo diagrama na Figura 3.3.

Tabela 3.3 - Tabela-verdade de C .

$\sim$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	F

Fonte: Autoras

Pela tabela-verdade de C , $V(C) = V \vee F \vee V$, ou seja, C é indeterminada.

	q	$\sim q$
p	1 $\Delta +$	2 $+ o$
$\sim p$	3 o	4 $+ \Delta$

Figura 3.3 - Conteúdo lógico de C .

Fonte: Autoras

Na representação do conteúdo lógico de C , consideramos:

$$o : p \rightarrow \sim q$$

$$+ : p \rightarrow q$$

$$\Delta : \sim o$$

$$\square : \Delta \vee +$$

Como o conteúdo lógico de C está representado pelas regiões 1, 2 e 4, não por todas, C é indeterminada.

Capítulo 4

Relações Lógicas

Neste capítulo apresentamos cinco relações lógicas entre fórmulas proposicionais e as formas de sua verificação. Nas relações de equivalência e implicação, serão destacadas vantagens do diagrama de Allan Marquand em relação aos métodos clássicos.

Salientamos que, caso não existam relações lógicas entre duas fórmulas proposicionais dadas, dizemos que são independentes.

4.1 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Sejam A e B duas fórmulas proposicionais, dizemos que existe relação de equivalência entre A e B , ou seja, A é equivalente a B se, e somente se, a operação bicondicional entre A e B , $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

Denotamos a relação de equivalência entre A e B por $A \Leftrightarrow B$ ou $A \equiv B$.

4.1.1 VERIFICAÇÃO

A verificação da relação de equivalência pode ser realizada por tabela-verdade, por propriedades das operações lógicas ou por diagrama de Allan Marquand.

- (i) *Por tabela-verdade:* $A \equiv B$ se, e somente se $A \leftrightarrow B$ é tautológica, ou seja, as tabelas-verdade de A e B possuem os mesmos resultados.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$A: ((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$ e

$B: ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r),$

cujas tabelas-verdade podem ser visualizadas na Tabela 4.1 e Tabela 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1 - Tabela-verdade de A.

$((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$										
V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V

Fonte: Autoras

Tabela 4.2 - Tabela-verdade de B.

$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r)$									
V	V	V	V	V	F	F	F	V	
V	V	V	F	F	V	F	F	F	
V	F	F	V	V	F	F	F	V	
V	F	F	V	F	F	F	F	F	
F	F	V	V	V	V	V	V	V	
F	F	V	V	F	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	V	V	V	V	
F	F	F	V	F	F	V	F	F	

Fonte: Autoras

Pela tabela-verdade 4.1 de A obtemos os seguintes valores de verdade associados à fórmula A :

$$V(A) = F \vee F \vee F \vee F \vee F,$$

e pela tabela-verdade 4.2 de B obtemos os valores de verdade associados à fórmula B :

$$V(B) = F \vee F \vee F \vee F \vee F$$

Como os resultados de A e B são iguais, podemos concluir que $A \equiv B$.

(ii) *Por propriedades das operações lógicas:* $A \equiv B$ se, e somente se $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia, ou seja, A e B podem ser transformadas em fórmulas idênticas.

A seguir apresentamos as propriedades das operações lógicas.

Propriedades da conjunção

a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotente
b) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Comutativa
c) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$	Associativa
d) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$	Contradição
e) $p \wedge V \Leftrightarrow p$	Propriedade do V
f) $p \wedge F \Leftrightarrow F$	Propriedade do F

Propriedades da disjunção

a) $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotente
b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Comutativa

$$c) (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$$

Associativa

$$d) p \vee \sim p \Leftrightarrow V$$

Tautológica

$$e) p \vee V \Leftrightarrow V$$

Propriedade do V

$$f) p \vee F \Leftrightarrow p$$

Propriedade do F

Propriedade distributiva

$$a) p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$b) p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Propriedade da absorção

$$a) p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$b) p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Propriedade da dupla negação

$$\sim\sim p \Leftrightarrow p$$

Leis de De Morgan

$$a) \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$b) \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Equivalências notáveis

$$a) p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad E\ 1$$

$$b) p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \quad E\ 2$$

$$c) p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad E\ 3$$

$$d) p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad E\ 4$$

Exemplo: Tomemos as fórmulas

$$A: ((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$$

$$\text{e } B: ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r)$$

as quais já foram comparadas por tabela-verdade, e apliquemos propriedades das operações lógicas.

Temos a fórmula A :

$$\begin{aligned} A: ((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) &\equiv \\ \equiv ((\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) &\equiv \text{Substituição da implicação (E2)} \\ \equiv (\sim p \vee (q \vee (q \wedge \sim r))) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) &\equiv \text{Associativa da disjunção} \\ \equiv (\sim p \vee q) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) &\equiv \text{Absorção} \\ \equiv (\sim p \vee q) \wedge ((r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge p)) &\equiv \text{Substituição da -biimplicação (E3)} \\ \equiv ((\sim p \vee q) \wedge (r \wedge \sim p)) \vee ((\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge p)) &\equiv \text{Distributiva} \\ \equiv ((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \wedge r)) \vee ((\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim r)) &\equiv \text{Comutativa da conjunção} \\ \equiv (((\sim p \vee q) \wedge \sim p) \wedge r) \vee (((\sim p \vee q) \wedge p) \wedge \sim r) &\equiv \text{Associativa da conjunção} \\ \equiv (\sim p \wedge r) \vee (((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge \sim r) &\equiv \text{Absorção Distributiva} \\ \equiv (\sim p \wedge r) \vee ((F \vee (q \wedge p)) \wedge \sim r) &\equiv \text{Contradição} \\ \equiv (\sim p \wedge r) \vee ((q \wedge p) \wedge \sim r) &\equiv \text{Propriedade do F na disjunção} \\ \equiv (\sim p \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \sim r) &\equiv \text{Comutativa da conjunção} \\ \equiv ((p \wedge q) \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r) &\equiv \text{Comutativa da disjunção} \end{aligned}$$

Temos a fórmula B :

$$B: ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r) \equiv$$

$$\equiv \sim(\sim(p \wedge q) \vee r) \vee (\sim p \wedge r) \equiv$$

Substituição das implicações (E2)

$$\equiv ((p \wedge q) \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r) \equiv$$

Leis de Morgan

Conforme demonstrado por aplicação de propriedades, obtivemos fórmulas idênticas para A e B , portanto $A \equiv B$.

(iii) *Pelo diagrama de Allan Marquand: $A \equiv B$ se, e somente se, $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia, ou seja, os conteúdos lógicos de A e B são idênticos.*

Exemplo: Tomemos novamente as fórmulas A e B .

$A: ((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$ e

$B: ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \wedge r)$.

Para a fórmula A , considerando os símbolos

$\circ : p \rightarrow q$
 $+: p \wedge \sim r$
 $\Delta : \circ \vee +$
 $\square : r \leftrightarrow \sim p$
 $\boxplus : \Delta \wedge \square$

temos o conteúdo lógico de A representado no diagrama da Figura 4.1.

	q	$\sim q$	
p	$\Delta \circ$		r
	$\Delta + \circ \square$	$\square$	$\sim r$
$\sim p$	$\circ \Delta \square$	$\circ \Delta \square$	r
	$\circ + \Delta$	$\circ \Delta$	$\sim r$

Figura 4.1 - Diagrama de A .

Fonte: Autoras

Para a fórmula B , considerando os símbolos

$$o : p \wedge q$$

$$+ : \sim p \wedge r$$

$$\Delta : o \rightarrow r$$

$$\square : \Delta \rightarrow +$$

temos o conteúdo lógico de B representado no diagrama da Figura 4.2.

		q	$\sim q$	
	p	Δo	Δ	r
		o	Δ	$\sim r$
	$\sim p$	$+ \Delta$	$+ \Delta$	r
		Δ	Δ	$\sim r$

Figura 4.2 - Diagrama de B .

Fonte: Autoras

Conforme pode ser observado nas Figuras 4.1 e 4.2, as regiões hachuradas no diagrama de Allan Marquand, que representam o conteúdo lógico de A , são as mesmas que representam o conteúdo lógico de B . Logo, podemos afirmar que $A \equiv B$.

4.1.2 VANTAGENS DO USO DO DIAGRAMA

Na verificação da relação de equivalência, o diagrama constitui-se num instrumental mais vantajoso quando são analisadas fórmulas mais complexas, tanto em termos de quantidade de operadores como de letras, pois é realizada de forma simples e direta. Além disso, dada uma fórmula proposicional, o diagrama também permite obter, pela sua leitura, várias fórmulas equivalentes, inclusive as maiores fórmulas normais conjuntivas e disjuntivas (FNC e FND) e,

ainda, as fórmulas mais simples equivalentes, dispensando o uso de tabela-verdade e o processo clássico de manipulação algébrica.

A seguir apresentamos um exemplo para obtenção de fórmulas equivalentes a uma dada fórmula proposicional pela leitura do seu conteúdo lógico no diagrama.

Exemplo: Dada a fórmula proposicional

$$A: (p \rightarrow ((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r).$$

Seguindo a ordem das operações definida pelos parênteses, associamos os seguintes símbolos:

$$o: (q \vee r)$$

$$+: o \leftrightarrow \sim q$$

$$\Delta: + \wedge r$$

$$\square: p \rightarrow \Delta$$

Esquemáticamente, temos:

$$\square \quad o \quad + \quad \Delta$$

$$A: p \rightarrow ((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r$$

cuja representação no diagrama pode ser visualizada na Figura 4.3, onde o conjunto das regiões hachuradas representa o conteúdo lógico de A .

	q	$\sim q$	
p	o_1	$o \Delta +_3$	r
	o_2	4	$\sim r$
$\sim p$	o_5	$o \Delta +_7$	r
	o_6	8	$\sim r$

Figura 4.3 - Representação da fórmula proposicional A .

Fonte: Autoras

O conteúdo lógico de A representado no diagrama da Figura 4.3 pode ser traduzido por outras fórmulas proposicionais, equivalentes à A , as quais podem ser obtidas pela leitura do diagrama de A . Temos, por exemplo, as fórmulas:

$A_1: (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$, que corresponde à maior fórmula normal disjuntiva (FND) equivalente à A ;

$A_2: \sim p \vee (\sim q \wedge r)$, que é a menor fórmula normal disjuntiva (FND) equivalente à A ;

$A_3: \sim((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r))$, que corresponde à maior fórmula equivalente à A , obtida pela leitura das regiões vazias do diagrama da Figura 4.3, cuja negação corresponde à fórmula A_4 ;

$A_4: (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r)$, que corresponde à maior fórmula normal conjuntiva (FNC) equivalente à A ;

$A_5: \sim((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r))$, que corresponde à menor fórmula equivalente à A , obtida por leitura das regiões vazias do diagrama da Figura 4.3, cuja negação corresponde à fórmula A_6 .

$A_6: (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$, que corresponde à menor fórmula normal conjuntiva (FNC) equivalente à A .

Além dessas, outras fórmulas podem expressar o conteúdo lógico de A , como por exemplo:

$A_7: (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$;

$A_8: p \rightarrow (\sim q \wedge r)$;

$$A_9: ((\sim p \leftrightarrow q) \vee \sim p) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r).$$

Para expressar A da forma mais simplificada, utilizando apenas as operações binárias de conjunção e disjunção, tomamos entre as diversas fórmulas obtidas as menores FND e FNC equivalentes a ela.

4.2 RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO

Sejam A e B duas fórmulas proposicionais, dizemos que existe relação de implicação entre A e B , ou seja, A implica B se, e somente se, a operação condicional entre A e B , $A \rightarrow B$, é uma tautologia.

Denotamos a relação de implicação entre A e B por $A \Rightarrow B$.

4.2.1 VERIFICAÇÃO

Da mesma forma que na relação de equivalência, a verificação da relação de implicação pode ser realizada por tabela-verdade, por propriedades das operações lógicas, embora tal procedimento não seja comumente utilizado, ou por diagrama de Allan Marquand.

(i) *Por tabela-verdade:* $A \Rightarrow B$ se, e somente se, $A \rightarrow B$ é tautológica.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$$A: ((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) \text{ e}$$

$$B: ((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p).$$

Tomando a condicional $A \rightarrow B$ e determinando os seus valores de verdade, conforme apresentado na Tabela 4.3, podemos afirmar que, como são todos verdadeiros, existe relação de implicação entre A e B .

Tabela 4.3 - Tabela-verdade de $A \rightarrow B$.

$((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p)$																				
V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F

Fonte: Autoras

(ii) *Por propriedades:* $A \Rightarrow B$ se, e somente se, $A \rightarrow B$ é uma tautologia, ou seja, se a condicional $A \rightarrow B$ pode ser transformada numa tautologia ($A \rightarrow B \equiv V$).

Exemplo: Consideremos novamente as fórmulas proposicionais A e B

A: $((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$ e

B: $((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p)$.

Para demonstrar que $A \Rightarrow B$, basta mostrar que $A \rightarrow B$ é uma tautologia. Temos:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B &\equiv (((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)) \rightarrow (((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p)) \equiv \\
 &\equiv (((\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)) \rightarrow ((\sim(p \wedge q) \vee \sim r) \wedge (r \vee p)) \equiv && \text{E2} \\
 &\equiv ((\sim p \vee (q \vee (q \wedge \sim r))) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)) \rightarrow ((\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (r \vee p)) \equiv && \text{Associativa, De Morgam} \\
 &\equiv ((\sim p \vee q) \wedge ((r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge p))) \rightarrow ((\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (r \vee p)) \equiv && \text{Absorção, E3} \\
 &\equiv (((\sim p \vee q) \wedge (r \wedge \sim p)) \vee ((\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge p))) \rightarrow (((\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge r) \vee ((\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv && \text{Distributiva}
 \end{aligned}$$

$\equiv (((\sim p \vee q) \wedge \sim p) \wedge r) \vee (((\sim p \vee q) \wedge p) \wedge \sim r) \rightarrow (((\sim p \vee \sim q) \vee \sim r) \wedge r) \vee ((\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv$	Associativa, Comutativa
$\equiv ((\sim p \wedge r) \vee (((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge \sim r)) \rightarrow (((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee (\sim r \wedge r)) \vee ((\sim p \wedge p) \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv$	Distributiva Absorção
$\equiv ((\sim p \wedge r) \vee ((F \vee (q \wedge p)) \wedge \sim r)) \rightarrow (((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee F) \vee (F \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv$	Contradição
$\equiv ((\sim p \wedge r) \vee ((q \wedge p) \wedge \sim r)) \rightarrow (((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv$	Propriedade do F
$\equiv \sim((\sim p \wedge r) \vee ((q \wedge p) \wedge \sim r)) \vee (((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge p)) \equiv$	E2
$\equiv ((p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r)) \vee ((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge p) \equiv$	Associativa, De Morgan
$\equiv ((p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r)) \vee ((\sim p \vee \sim q) \wedge r) \vee ((\sim q \wedge p) \vee (\sim r \wedge p)) \equiv$	Distributiva
$\equiv ((p \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r)) \vee (\sim r \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r))) \vee ((\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r)) \vee (\sim q \wedge p) \vee (\sim r \wedge p) \equiv$	Associativa, Distributiva
$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge r)) \vee (((\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge r)) \vee (\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge p) \vee (\sim r \wedge p)) \equiv$	Associativa, Distributiva
$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee F \vee (p \wedge r) \vee (\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee F \vee (\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r) \vee (\sim r \wedge p) \equiv$	Contradição, Associativa, Comutativa
$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r) \vee (\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r) \vee (\sim r \wedge p)) \equiv$	Idempotente, Propriedade do F
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee ((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)) \vee ((\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge r)) \vee ((\sim p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)) \equiv$	Comutativa, Associativa
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (r \vee \sim r)) \vee (\sim q \wedge (\sim r \vee r)) \vee (\sim p \wedge (\sim r \vee r)) \equiv$	Distributiva
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge V) \vee (\sim q \wedge V) \vee (\sim p \wedge V) \equiv$	Tautologia
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee p \vee \sim q \vee \sim p \equiv$	Propriedade do V
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee (p \vee \sim p) \equiv$	Comutativa, Associativa
$\equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim q) \vee V \equiv$	Tautologia, Associativa
$\equiv V$	Propriedade do V

- (iii) *Por diagrama*: $A \Rightarrow B$ se, e somente se, $A \rightarrow B$ é uma tautologia, ou seja, se o conteúdo lógico de A está contido no conteúdo lógico de B (as regiões que representam A fazem parte da representação de B).

Exemplo: Consideremos as fórmulas proposicionais A e B .

A : $((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$ e

B : $((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p)$, temos:

a) Considerando os seguintes símbolos para a fórmula

A : $((p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (r \leftrightarrow \sim p)$:

o: $p \rightarrow q$

+: $q \wedge \sim r$

Δ : $o \vee +$

$\square$: $r \leftrightarrow \sim p$

$\boxplus$: $\Delta \wedge \square$

podemos obter a representação do conteúdo lógico de A , conforme o diagrama da Figura 4.4.

	q	$\sim q$	
p	Δo^1	3	r
	$\Delta \square + o^2$	$\square^4$	$\sim r$
$\sim p$	$\square \Delta o^5$	$\square o \Delta^7$	r
	$o + \Delta^6$	$o \Delta^8$	$\sim r$

Figura 4.4 - Representação do conteúdo lógico de A .

Fonte: Autoras

b) Considerando os seguintes símbolos para a fórmula

B : $((p \wedge q) \rightarrow \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow p)$

$$\circ: p \wedge q$$

$$+: q \rightarrow \sim r$$

$$\Delta: \sim r \rightarrow p$$

$$\Box: + \wedge \Delta$$

podemos obter a representação do conteúdo lógico de B, conforme o diagrama da Figura 4.5.

	q	$\sim q$	
p	$\Delta \circ_1$	$\Delta +_3$	r
	$\Delta \circ +_2$	$\Delta +_4$	$\sim r$
$\sim p$	$\Delta +_5$	$\Delta +_7$	r
	$+_6$	$+_8$	$\sim r$

Figura 4.5 - Representação do conteúdo lógico de B.

Fonte: Autoras

Como as regiões 2, 5, 7, que representam o conteúdo lógico de A, estão incluídas nas regiões que representam o conteúdo lógico de B (regiões 2, 3, 4, 5, 7), podemos afirmar que

$$A \Rightarrow B$$

4.2.2 VANTAGENS DO USO DO DIAGRAMA

Nesse caso, além das vantagens já citadas no item 4.1.2, relativas à facilidade verificação da relação entre fórmulas mais complexas, o diagrama, e somente ele, permite a construção de novas fórmulas proposicionais entre as quais existe a relação de implicação. Assim, é possível construir um argumento válido partindo de um conjunto de premissas.

Para ilustrar o processo de construção, tomemos a fórmula

$$A: (p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r)),$$

cujos conteúdo lógico está representado no diagrama da Figura 4.6.

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

Figura 4.6 - Representação da fórmula proposicional A .

Fonte: Autoras

No uso do diagrama, para haver relação de implicação entre duas fórmulas proposicionais A e B o conteúdo lógico da fórmula proposicional antecedente, A , deve estar incluso no conteúdo lógico da fórmula consequente, B . Isso se deve à definição de relação de implicação.

Portanto, fixando A como antecedente, podemos obter, entre outras, as seguintes fórmulas consequentes:

$$B_1: \sim p \vee r$$

$$B_2: \sim p \vee \sim q$$

$$B_3: p \rightarrow \sim q$$

as quais foram obtidas pela leitura do conteúdo lógico de A acrescentado de outros, através de regiões quaisquer do diagrama.

Os diagramas das fórmulas B_1 , B_2 e B_3 estão apresentados nas Figuras 4.7(a), 4.7(b) 4.7(c).

Figura 4.7 - Representação do conteúdo lógico de fórmulas consequentes.

Fonte: Autoras

Note-se que o mesmo processo pode ser feito fixando uma fórmula proposicional como consequente, criando-se fórmulas antecedentes.

É sabido que a validade de um argumento pode ser verificada ou demonstrada com o uso de tabela-verdade ou de regras de inferência, entre outros processos. Com o diagrama de Allan Marquand também é possível verificar a validade de um argumento, porém pode-se fazer mais: criar argumentos válidos! Nesse caso, o referido processo é o mesmo que para a criação de fórmulas proposicionais entre as quais exista relação de implicação.

Para ilustrar a criação de argumentos válidos, tomemos o seguinte conjunto de premissas:

$$P_1: \sim p \rightarrow r$$

$$P_2: r \rightarrow p \vee q$$

$$P_3: p \rightarrow q$$

A conjunção dessas premissas no diagrama de Allan Marquand está representada na Figura 4.8, onde foram associados os seguintes símbolos para as premissas:

$$o: \sim p \rightarrow r$$

$$+: r \rightarrow p \vee q$$

$$\Delta: p \rightarrow q$$

	q	$\sim q$	
p	$\Delta + o$	$+ o$	r
	$\Delta + o$	$+ o$	$\sim r$
$\sim p$	$o \Delta +$	Δo	r
	$\Delta +$	$\Delta +$	$\sim r$

Figura 4.8 - Representação no diagrama da conjunção das premissas P_1 , P_2 e P_3 .

Fonte: Autoras

As conclusões a serem criadas devem conter o conteúdo lógico da conjunção das premissas. Assim temos como conclusões, por exemplo, as fórmulas proposicionais:

$$q$$

$$q \vee r$$

$$p \vee r$$

$$p \vee q$$

que podem ser visualizadas nas Figuras 4.9.(a), 4.9.(b), 4.9.(c) e 4.9.(d), respectivamente.

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(a) q

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(b) $q \vee r$

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(c) $p \vee r$

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(d) $p \vee q$

Figura 4.9 - Representação do conteúdo lógico de conclusões.

Fonte: Autoras

Portanto, foram criados e são válidos os seguintes argumentos:

$$(\sim p \rightarrow r), (r \rightarrow p \vee q), (p \rightarrow q) \Vdash q$$

$$(\sim p \rightarrow r), (r \rightarrow p \vee q), (p \rightarrow q) \Vdash q \vee r$$

$$(\sim p \rightarrow r), (r \rightarrow p \vee q), (p \rightarrow q) \Vdash p \vee r$$

$$(\sim p \rightarrow r), (r \rightarrow p \vee q), (p \rightarrow q) \Vdash p \vee q$$

A tabela-verdade, assim como o uso de propriedades, permite somente verificar a existência da relação de implicação.

4.3 RELAÇÃO DE INCONSISTÊNCIA

Uma fórmula proposicional A é inconsistente com uma fórmula proposicional B se, e somente se, $A \wedge B$ é contra-válida.

4.3.1 VERIFICAÇÃO

- (i) *Por tabela-verdade*: A é inconsistente com B se, e somente se, os valores de verdade associados a $A \wedge B$ são todos falsos.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais:

$A: \sim p \vee q$ e $B: \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$.

Para obter os valores de verdade associados a $A \wedge B$ calculamos os valores de verdade de A (Tab. 4.4), os valores de verdade de B (Tab. 4.5) e, finalmente, os valores de verdades $A \wedge B$ (Tab. 4.6).

Tabela 4.4 - Tabela-verdade de A

$\sim p$	$\vee$	q
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	V	F

Fonte: Autoras

Tabela 4.5 - Tabela-verdade de B .

$\sim$	$(\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p)$
F	F	V	F
V	V	F	F
F	F	V	V
F	V	V	V

Fonte: Autoras

Tabela 4.6 -Tabela verdade de $A \wedge B$.

A	$\wedge$	B
V	F	F
F	F	V
V	F	F
V	F	F

Fonte: Autoras

Como $V(A \wedge B) = F F F F$, podemos concluir que a fórmula A é inconsistente com a fórmula proposicional B .

(ii) *Por propriedades*: A é inconsistente com B se, e somente se, $A \wedge B$ for equivalente a uma contradição.

Exemplo:

Sejam as fórmulas $A: \sim p \vee q$ e $B: \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$.

$$A \wedge B \equiv$$

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim(\sim q \rightarrow \sim p)) \equiv$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim(q \vee \sim p)) \equiv$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim(\sim p \vee q)) \equiv$$

$$\equiv F$$

E2

Comutativa

Contradição

Como $A \wedge B \equiv F$, podemos dizer que A é inconsistente com B .

(iii) *Por diagrama de Allan Marquand*: A é inconsistente com B se, e somente se, os conteúdos lógicos de A e B são disjuntos (não possuem regiões comuns entre eles).

Exemplo: Sejam as fórmulas $A: \sim p \vee q$ e $B: \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$.

Os conteúdos lógicos de A e B estão representados nos diagramas das Figuras 4.10 e 4.11, respectivamente, onde foi considerado o símbolo: $o : \sim q \rightarrow \sim p$.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 4.10 - Representação do conteúdo lógico de A .

Fonte: Autoras

	q	$\sim q$
p	o 1	2
$\sim p$	o 3	o 4

Figura 4.11 - Representação do conteúdo lógico de B .

Fonte: Autoras

Como o conteúdo lógico de A compreende as regiões 1, 3 e 4 e o conteúdo lógico de B , a região 2, ou seja, A e B não possuem regiões comuns, podemos concluir que A é inconsistente com B .

Observação: O instrumento usualmente apresentado na literatura para verificação da existência da relação de inconsistência é a tabela-verdade.

4.4 RELAÇÃO SUBCONTRÁRIA

Uma fórmula proposicional A é subcontrária a uma fórmula proposicional B se, e somente se, $A \vee B$ é tautológica.

4.4.1 VERIFICAÇÃO

- (i) *Por tabela-verdade*: A é subcontrária à B se, e somente se, os valores de verdade associados a $A \vee B$ são todos verdadeiros.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$A: \sim(p \rightarrow q) \rightarrow \sim r$ e $B: p \wedge (\sim q \wedge r)$.

Para obter os valores de verdade associados à $A \vee B$, calculam-se os valores de verdade de A (Tab. 4.7), os valores de verdade de B (Tab. 4.8) e, finalmente, os valores de verdade de $A \vee B$, (Tab. 4.9).

Tabela 4.7 - Tabela-verdade de A .

$\sim$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$\sim r$
F	V	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V

Fonte: Autoras

Tabela 4.8 - Tabela-verdade de B .

p	$\wedge$	$(\sim q$	$\wedge$	$r)$
V	F	F	F	V
V	F	F	F	F
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	F	F	F	V
F	F	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	V	F	F

Fonte: Autoras

Tabela 4.9 - Tabela-verdade de $A \vee B$.

A	$\vee$	B
V	V	F
V	V	F
F	V	V
V	V	F
V	V	F
V	V	F
V	V	F
V	V	F

Fonte: Autoras

Como $V(A \vee B) = V \vee V \vee V \vee V \vee V \vee V \vee V$, podemos concluir que a fórmula proposicional A é subcontrária à fórmula proposicional B .

(ii) *Por propriedades*: A é subcontrária a B se, e somente se, $A \vee B$ for equivalente a uma tautologia.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$A: \sim(p \rightarrow q) \rightarrow \sim r$ e $B: p \wedge (\sim q \wedge r)$, temos:

$$\begin{aligned}
 A \vee B &\equiv \\
 &\equiv (\sim(p \rightarrow q) \rightarrow \sim r) \vee (p \wedge (\sim q \wedge r)) \equiv \\
 &\equiv ((\sim p \vee q) \vee \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \equiv && \text{E2, Associativa} \\
 &\equiv (\sim p \vee q \vee \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \equiv && \text{Associativa} \\
 &\equiv (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \equiv && \text{De Morgan} \\
 &\equiv V && \text{Tautologia}
 \end{aligned}$$

Como $A \vee B \equiv V$, podemos dizer que A é subcontrária a B .

(iii) *Por diagrama de Allan Marquand*: A é subcontrária a B se, e somente se, a união dos conteúdos lógicos de A e B compreenderem todas as regiões do diagrama.

Exemplo: Sejam as fórmulas

$A: \sim(p \rightarrow q) \rightarrow \sim r$ e $B: p \wedge (\sim q \wedge r)$

Os conteúdos lógicos de A e B estão representados nos diagramas das Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente. Para representação de A consideramos os símbolos:

o: $p \rightarrow q$

+: $\sim o$

□: $+ \rightarrow \sim r$

	q	$\sim q$	
p	$\bigcirc$ 1	3 +	r
	$\bigcirc$ 2	4 +	$\sim r$
$\sim p$	$\bigcirc$ 5	7 $\bigcirc$	r
	$\bigcirc$ 6	8 $\bigcirc$	$\sim r$

Figura 4.12 - Representação do conteúdo lógico de A .

Fonte: Autoras

Para representação de B , consideramos os símbolos:

$$\bigcirc: \sim q \wedge r$$

$$\square: p \wedge \bigcirc$$

	q	$\sim q$	
p	1	3 $\bigcirc$	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7 $\bigcirc$	r
	6	8	$\sim r$

Figura 4.13 - Representação do conteúdo lógico de B .

Fonte: Autoras

O conteúdo lógico de A é representado pelas regiões 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 (Fig. 4.12) e o conteúdo lógico de B , pela região 3 (Fig. 4.13). A união dos conteúdos lógicos de A e B compreende todas as regiões do diagrama; portanto, podemos afirmar que A é subcontrária a B .

4.5 RELAÇÃO CONTRADITÓRIA

Uma fórmula proposicional A é contraditória com B se, e somente se, A é inconsistente com B e A é subcontrária a B .

4.5.1 VERIFICAÇÃO

- (i) *Por tabela-verdade*: A é contraditória com B se, e somente se, os valores de verdade associados a $A \wedge B$ são todos falsos e os valores de verdade associados a $A \vee B$ são todos verdadeiros.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais:

$A: p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $B: q \wedge \sim(p \rightarrow r)$.

Para obter os valores de verdade associados a $A \wedge B$ e $A \vee B$, calculamos os valores de verdade de A (Tab. 4.10), os valores de verdade de B (Tab. 4.11) e, finalmente, os valores de verdade de $A \wedge B$ e $A \vee B$ (Tab. 4.12).

Tabela 4.10 - Tabela-verdade de A .

p	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$r)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	F	V	V
V	V	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	V	F	V	F

Fonte: Autoras

Tabela 4.11 – Tabela-verdade de B .

q	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
V	F	F	V	V	V
V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Fonte: Autoras

Tabela 4.12 - Tabela-verdade de $A \wedge B$ e $A \vee B$.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V
V	F	F	V

Fonte: Autoras

Como $V(A \wedge B) = F F F F F F F F$ e

$V(A \vee B) = V V V V V V V V$, então podemos afirmar que A e B são contraditórias.

(ii) *Por propriedades*: A é contraditória com B se, e somente se, $A \vee B$ for equivalente a uma contradição e $A \wedge B$ for equivalente a uma tautologia.

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$A: p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $B: q \wedge \sim(p \rightarrow r)$., temos:

a) $A \wedge B \equiv$

$$\equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (q \wedge \sim(p \rightarrow r)) \equiv$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \wedge (q \wedge \sim(\sim p \vee r)) \equiv \text{E2}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \wedge (q \wedge (\sim(\sim p \wedge \sim r))) \equiv \text{De Morgan,}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \wedge (q \wedge (p \wedge \sim r)) \equiv \text{Dupla negação}$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (q \wedge p \wedge \sim r) \equiv \text{Associativa}$$

$$\equiv \sim(p \wedge q \wedge \sim r) \wedge (q \wedge p \wedge \sim r) \equiv \text{De Morgan}$$

$$\equiv \sim(p \wedge q \wedge \sim r) \wedge (q \wedge p \wedge \sim r) \equiv \text{Comutativa}$$

$$\equiv F \quad \text{Contradição}$$

ou seja, $A \wedge B \equiv F$

b) $A \vee B \equiv$

$$\equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vee (q \wedge \sim(p \rightarrow r)) \equiv$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee (q \wedge \sim(\sim p \vee r)) \equiv \text{E2}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee (q \wedge (\sim(\sim p \wedge \sim r))) \equiv \text{De Morgan}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee (q \wedge (p \wedge \sim r)) \equiv \text{Dupla negação}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee ((q \wedge p) \wedge \sim r) \equiv \text{Associativa}$$

$$\equiv (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \vee ((p \wedge q) \wedge \sim r) \equiv \text{Comutativa}$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q \vee r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \equiv \text{Associativa}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sim(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \equiv && \text{De Morgan} \\ &\equiv V && \text{Tautologia} \end{aligned}$$

Como $A \wedge B \equiv F$ e $A \vee B \equiv V$, podemos concluir que A e B são contraditórias.

(iii) *Por diagrama de Allan Marquand: A é contraditória com B se, e somente se, os conteúdos lógicos de A e B foram disjuntos e a união dos conteúdos lógicos de A e B compreenderem todos as regiões do diagrama (ou seja, se o conjunto das regiões que definem o conteúdo lógico de A for igual ao complementar do conjunto das regiões que definem o conteúdo lógico de B).*

Exemplo: Sejam as fórmulas proposicionais

$$A: p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ e } B: \wedge \sim(p \rightarrow r).$$

Considerando os símbolos para a fórmula $A: p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e:

$$o: (q \rightarrow r)$$

$$\square: p \rightarrow o$$

e os símbolos para a fórmula $\rightarrow (q \rightarrow r)$ e $B: \wedge \sim(p \rightarrow r)$:

$$o: p \rightarrow r$$

$$+: \sim o$$

$$\square: q \rightarrow +$$

obtemos a representação dos conteúdos lógicos de A e B apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15, respectivamente.

	q	$\sim q$	
p	0 1	3 0	r
	2	4 0	$\sim r$
$\sim p$	0 5	7 0	r
	6	8 0	$\sim r$

Figura 4.14 - Representação do conteúdo lógico de A .

Fonte: Autoras

	q	$\sim q$	
p	0 1	3 0	r
	+ 2	4 +	$\sim r$
$\sim p$	0 5	7 0	r
	0 6	8 0	$\sim r$

Figura 4.15 - Representação do conteúdo lógico de B .

Fonte: Autoras

O conjunto das regiões que definem o conteúdo lógico de A é: $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (Fig. 4.14) e o conjunto que representa o conteúdo lógico de B fica definido somente pela região 2, ou seja, $\{2\}$ (Fig. 4.15). Como $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2\} = \emptyset$ e $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2\}$ compreende todas as regiões do diagrama, podemos afirmar que A e B são contraditórias.

4.6 VERIFICAÇÃO SIMULTÂNEA DAS RELAÇÕES

Dadas duas fórmulas proposicionais A e B , podemos verificar a existência das cinco relações apresentadas simultaneamente conforme apresentado no exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam as fórmulas

$A: \sim(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$ e $B: p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$.

Verifiquemos que relações existem entre A e B .

(i) *Por tabela-verdade*

As cinco relações definidas podem ser verificadas simultaneamente através dos valores verdade de $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$ e $A \vee B$. Assim, inicialmente, calculamos os valores verdade de A e B , conforme as Tabelas 4.13 e 4.14, respectivamente.

Tabela 4.13 - Tabela-verdade de A .

$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$\sim q)$
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V

Fonte: Autoras

Tabela 4.14 - Tabela-verdade de B .

p	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$(p$	$\wedge$	$q))$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F

Fonte: Autoras

Com os resultados obtidos construímos uma tabela-verdade, contendo os valores de verdade de $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$ e $A \vee B$, conforme Tabela 4.15, da qual obtemos as seguintes conclusões:

- A não é equivalente a B , pois $A \leftrightarrow B$ não é tautológica.
- Existe a relação de implicação entre A e B ($A \Rightarrow B$), pois $A \rightarrow B$ é tautológica.
- A não é inconsistente com B , pois $A \wedge B$ não é contraválida.
- A é subcontrária com B , pois $A \vee B$ é tautológica.
- A não é contraditória com B , pois A não é inconsistente com B .

Tabela 4.15 - Tabela-verdade de $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$ e $A \vee B$.

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V

Fonte: Autoras

(ii) *Por propriedades*

Primeiramente, calculamos as fórmulas mais simplificadas equivalentes às formulas A e B . Temos:

$$\begin{aligned}
 A &\equiv \sim(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \sim q) \equiv \\
 &\equiv (\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)) \vee ((p \vee q) \wedge \sim(p \vee \sim q)) \equiv && \text{E3} \\
 &\equiv ((\sim p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)) \vee ((p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv && \text{De Morgan} \\
 &\equiv (\sim p \wedge (\sim q \wedge (p \vee \sim q))) \vee (((p \vee q) \wedge q) \wedge \sim p) \equiv && \text{Comutativa, Associativa} \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv && \text{Absorção} \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv && \text{Comutativa} \\
 &\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv && \text{Distributiva} \\
 &\equiv \sim p \wedge V \equiv && \text{Tautologia} \\
 &\equiv \sim p, && \text{Propriedade do V} \\
 \text{ou seja: } A &\equiv \sim p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &\equiv p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \equiv \\
 &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q)) \equiv && \text{E2} \\
 &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv && \text{Associativa} \\
 &\equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv && \text{De Morgan} \\
 &\equiv V, && \text{Tautologia} \\
 \text{ou seja: } B &\equiv V
 \end{aligned}$$

a) Verificação da relação de equivalência: devemos verificar se $(A \leftrightarrow B) \equiv V$. Calculando:

$$\begin{aligned}
 A \leftrightarrow B &\equiv \\
 &\equiv \sim p \leftrightarrow V \equiv && \text{Substituição} \\
 &\equiv (\sim p \wedge V) \vee (p \wedge F) \equiv && \text{E3} \\
 &\equiv \sim p \vee F \equiv && \text{Propriedades do V e do F} \\
 &\equiv \sim p && \text{Propriedade do F}
 \end{aligned}$$

Assim: $A \leftrightarrow B \equiv \sim p$.

Como $(A \leftrightarrow B) \neq V$, podemos concluir que A não é equivalente a B , isto é, não existe a relação de equivalência entre A e B .

b) Verificação da relação de implicação: devemos verificar se $(A \rightarrow B) \equiv V$. Calculando:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B &\equiv \\
 &\equiv \sim p \rightarrow V \equiv && \text{Substituição} \\
 &\equiv p \vee V \equiv && \text{E2} \\
 &\equiv V && \text{Propriedade do V}
 \end{aligned}$$

Como $(A \rightarrow B) \equiv V$, podemos concluir que $A \Rightarrow B$, ou seja, que existe a relação de implicação entre A e B .

c) Verificação da relação de inconsistência: devemos verificar se $(A \wedge B) \equiv F$. Calculando:

$$A \wedge B \equiv$$

$$\equiv \sim p \wedge V \equiv \text{Substituição}$$

$$\equiv \sim p, \text{ Propriedade do } V$$

$$\text{Assim: } (A \wedge B) \equiv \sim p$$

Como: $(A \wedge B) \neq F$, podemos concluir que A não é inconsistente com B .

d) Verificação da relação subcontrária: devemos verificar se $(A \vee B) \equiv V$. Calculando:

$$A \vee B \equiv$$

$$\equiv \sim p \vee V \equiv \text{Substituição}$$

$$\equiv V \text{ Propriedade do } V$$

Como $(A \vee B) \equiv V$, podemos concluir que A é subcontrária a B .

e) Verificação da relação contraditória: devemos verificar se A é inconsistente com B e se A é subcontrária a B .

Como A não é inconsistente com B , concluímos que A não é contraditória com B .

(iii) *Por diagrama de Allan Marquand*

Inicialmente, é feita a representação dos conteúdos lógicos de A e de B no diagrama de Allan Marquand, conforme apresentado nas Figuras 4.16 e 4.17, respectivamente, e, a seguir, a comparação entre eles.

Para a fórmula $A: \sim(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$ foram considerados os símbolos:

$$o: p \vee q$$

$$+: \sim o$$

$$\Delta: p \vee \sim q$$

$$\Box: + \leftrightarrow \Delta$$

	q	$\sim q$
p	$\Delta \circ^1$	$^2 \circ \Delta$
$\sim p$	$\circ^3$	$^4 + \Delta$

Figura 4.16 - Representação do conteúdo lógico de A .

Fonte: Autoras

e, para a fórmula $B: p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$, foram considerados os seguintes símbolos:

$$\circ: p \wedge q$$

$$+: q \rightarrow \circ$$

$$\Box: p \rightarrow +$$

	q	$\sim q$
p	$+ \circ^1$	$^2 +$
$\sim p$	3	$^4 +$

Figura 4.17 - Representação do conteúdo lógico de B .

Fonte: Autoras

Pela análise dos conteúdos lógicos de A e B , podemos verificar a existência das relações conforme apresentado a seguir.

a) Verificação da relação de equivalência

Como o conteúdo lógico de A (regiões 3 e 4) não corresponde ao conteúdo lógico de B (regiões 1, 2, 3, 4) podemos concluir que A não é equivalente a B .

b) Verificação da relação de implicação

Como o conteúdo lógico de A (regiões 3 e 4) está incluso no conteúdo lógico de B (regiões 1, 2, 3, 4), podemos concluir que $A \Rightarrow B$, ou seja, existe a relação de implicação entre A e B .

c) Verificação da relação de inconsistência

Como os diagramas de A e B possuem regiões comuns (regiões 3 e 4), podemos concluir que A não é inconsistente com B .

d) Verificação da relação subcontrária

Como a união das regiões do diagrama de A e B compreende todas as regiões do diagrama, podemos concluir que A é subcontrária a B .

e) Verificação da relação contraditória

Como A não é inconsistente com B , podemos concluir que A não é contraditória com B .

Com o uso do diagrama de Allan Marquand, a análise das relações entre A e B , fórmulas do exemplo, é realizada de forma mais rápida, pois basta comparar os conteúdos lógicos dessas somente por observação, ou seja, sem a necessidade de construir novos diagramas.

Capítulo 5

Argumentos

Em capítulos anteriores foram destacadas vantagens do uso do diagrama no processo de classificação de fórmulas e na verificação da existência de relações lógicas entre fórmulas proposicionais. Neste capítulo veremos as vantagens do mesmo na verificação da validade de argumentos e, ainda, apresentaremos um processo para a construção de argumentos válidos, dado um conjunto de premissas.

5.1 DEFINIÇÃO DE ARGUMENTO

Um argumento constitui-se num conjunto de enunciados (proposições) chamados de “premissas” e um enunciado (proposição) chamado “conclusão”.

A conclusão é uma proposição que se afirma como decorrência das premissas (COPI, 1978; KUPPERMAN; MAC GRADE, 1973).

Simbolicamente expressamos um argumento com a seguinte notação:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \Vdash Q$$

onde

$P_1, P_2, \dots, P_n$ representam as premissas e

Q representa a conclusão.

5.2 ARGUMENTO VÁLIDO

Conforme Alencar Filho (2002, p. 87), “um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \Vdash Q$ diz-se válido se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, \dots, P_n$ são verdadeiras”.

Ressaltamos que a verdade da conclusão deve ser decorrente da verdade das premissas, ou seja, a validade de um argumento consiste na análise da sua estrutura lógica, devendo a verdade das premissas acarretar uma conclusão verdadeira. Um argumento válido também pode ser dito correto ou legítimo; em caso contrário, não válido é incorreto ou ilegítimo.

A seguir apresentamos alguns exemplos de argumentos.

Exemplo 1: Considerem-se as premissas:

P_1 : As pessoas que serviram no júri eram eleitores cadastrados.

P_2 : João serviu no júri.

e a conclusão:

Q : João é um eleitor cadastrado.

O argumento $P_1, P_2, \Vdash Q$ do exemplo 1 é válido, pois a verdade das premissas assegura a verdade da conclusão.

Exemplo 2: Considerem-se as premissas:

P_1 : A água é incolor.

P_2 : A água é inodora.

e a conclusão:

Q : A água é insípida.

O argumento $P_1, P_2, \Vdash Q$ do exemplo 2 não é válido, pois a conclusão não é decorrente do conjunto das premissas, mesmo sendo verdadeiras as premissas e a conclusão.

Exemplo 3: Considerem-se as premissas:

P_1 : Os taxistas são imortais.

P_2 : Alcibíades é taxista.

e a conclusão:

Q : Alcibíades é imortal.

O argumento $P_1, P_2, \Vdash Q$ do exemplo 3 é válido, pois a verdade da conclusão decorre da verdade das premissas. Observe-se que a estrutura do argumento está construída corretamente, apesar de possuir a premissa P_1 e a conclusão falsas.

Destaca-se que uma conclusão falsa não implica um argumento incorreto, assim como a verdade da conclusão não garante a validade do mesmo (exemplo 2).

5.3 CRITÉRIO DE VALIDADE DE UM ARGUMENTO

Seja o argumento: $P_1, P_2, \dots, P_n \Vdash Q$. Diz-se que este é válido quando a condicional associada a ele $(P_1 \wedge P_2 \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$, é tautológica.

Exemplo 1: Seja o argumento $p \rightarrow q, \sim q \Vdash \sim p$,

a condicional associada a ele é escrita desta forma:

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$$

Para análise da validade do argumento, verificamos se a condicional associada é ou não uma tautologia, o que podemos fazer por meio de tabela-verdade ou do diagrama de Marquand.

- (i) *Por tabela-verdade:* constrói-se a tabela-verdade da condicional associada ao argumento dado (Tab. 5.1) e verifica-se se essa é uma tautologia.

Tabela 5.1 – Tabela-verdade da condicional associada ao argumento do exemplo 1.

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V

Fonte: Autoras

Os valores de verdade obtidos na Tabela 5.1 indicam que o argumento dado no exemplo 1 é válido.

- (ii) *Por diagrama:* para representação do conteúdo lógico, relacionam-se à condicional associada, $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$, os seguintes símbolos:

$$o: p \rightarrow q$$

$$+: o \wedge \sim q$$

$$\Box: + \rightarrow \sim p$$

	q	$\sim q$
p	o	
$\sim p$	o	o +

Figura 5.1 - Representação do conteúdo lógico da condicional associada ao argumento do exemplo 1.

Fonte: Autoras

A representação do conteúdo lógico da condicional associada ao argumento dado no exemplo 1 (Fig. 5.1) indica uma tautologia, o que demonstra a validade desse.

Exemplo 2: Seja o argumento

$$\sim p \rightarrow q, q \leftrightarrow \sim r, p \vee r \Vdash p \wedge \sim q,$$

a condicional associada a ele é escrita tal como segue:

$$((\sim p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow \sim r) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (p \wedge \sim q)$$

Verificando a validade do argumento, temos:

- (i) *Por tabela-verdade:* constrói-se a tabela-verdade da condicional associada ao argumento dado (Tab. 5.2) e verifica-se se a condicional associada a ele é uma tautologia.

Tabela 5.2 - Tabela-verdade da condicional associada ao argumento do exemplo 2.

$((\sim p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow \sim r) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (p \wedge \sim q)$													
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F	F
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V

Fonte: Autoras

Os valores de verdade obtidos na Tabela 5.2 indicam que a condicional associada não é uma tautologia e, portanto, que o argumento dado no exemplo 2 não é válido.

(ii) *Por diagrama de Allan Marquand:* para representação ao argumento dado no exemplo 2 do conteúdo lógico da condicional associada tomamos os símbolos que seguem:

$o: \sim p \rightarrow q$

$+: q \leftrightarrow \sim r$

$\Delta: p \vee r$

$\square: o \wedge + \wedge \Delta$

$*: p \wedge \sim q$

$\Box: \square \rightarrow *$

	q	$\sim q$	
P	$\Delta \ o$	$\Delta + o * \square$	r
	$\Delta + \square \ o$	$* \ o \ \Delta$	$\sim r$
$\sim p$	$\Delta \ o$	$\Delta +$	r
	$+ \ o$		$\sim r$

Figura 5.2 - Representação do conteúdo lógico da condicional associada ao argumento do exemplo 2.

Fonte: Autoras

Conforme o diagrama da Figura 5.2, o conteúdo lógico da condicional associada ao argumento do exemplo 2 não representa uma tautologia, o que demonstra que o argumento dado não é válido.

5.4 CONSTRUÇÃO DE ARGUMENTOS VÁLIDOS

Dado um conjunto de premissas com base na relação de implicação, podemos, por meio do diagrama de Allan Marquand, construir argumentos válidos.

Para que a implicação entre fórmulas proposicionais seja uma tautologia é necessário que o conteúdo lógico do termo antecedente esteja contido no conteúdo lógico do termo conseqüente.

Assim, considerando que a validade de um argumento é definida pela tautologia da condicional associada a ele, a fim de construirmos argumentos válidos, devemos proceder de tal forma que, partindo de um conjunto qualquer de premissas, o conteúdo lógico da conjunção dessas esteja contido no conteúdo lógico da conclusão.

Exemplo: Para ilustrar a criação de argumentos válidos, tomemos o seguinte conjunto de premissas:

$$P_1: (p \leftrightarrow r) \vee \sim q,$$

$$P_2: \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q \text{ e}$$

$$P_3: \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q$$

A conjunção dessas premissas no diagrama de Allan Marquand está representada na Figura 5.3, onde foram associados os seguintes símbolos para as premissas:

$$o: P_1$$

$$+: P_2$$

$$\Delta: P_3$$

$$\square: P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$$

	q	$\sim q$	
p	$\Delta \text{ o } +$	$\Delta \text{ o }$	r
	$\Delta \text{ + }$	$\Delta \text{ o }$	$\sim r$
$\sim p$	$\Delta \text{ + }$	$\Delta \text{ o }$	r
	$\Delta \text{ o } +$	$\Delta \text{ o }$	$\sim r$

Figura 5.3 - Representação no diagrama da conjunção das premissas P_1 , P_2 e P_3 .

Fonte: Autoras

As conclusões a serem criadas devem conter o conteúdo lógico da conjunção das premissas. Assim, temos, por exemplo, as fórmulas proposicionais

$$Q_1: q$$

$$Q_2: p \rightarrow r$$

$$Q_3: (p \rightarrow r) \wedge q$$

$$Q_4: q \vee r$$

$$Q_5: r \rightarrow p$$

$$Q_6: (p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q)$$

como conclusões, que podem ser visualizadas nas Figuras 5.4. (a), 5.4. (b), 5.4. (c), 5.4. (d), 5.4. (e), 5.4. (f), respectivamente.

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(a) Q_1

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(b) Q_2

	q	$\sim q$	
p			r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

(c) Q_3

Figura 5.4 - Representação do conteúdo lógico das conclusões criadas.

Fonte: Autoras

Portanto, foram criados e são válidos os seguintes argumentos:

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash q$$

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash p \rightarrow r$$

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash (p \rightarrow r) \wedge q$$

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash q \vee r$$

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash r \rightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow r) \vee \sim q, \sim q \rightarrow (p \vee \sim r) \wedge q, \sim(r \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Vdash (p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q)$$

Observamos que o diagrama de Allan Marquand é o único instrumento, dentre os mais utilizados no cálculo proposicional, que permite a construção de argumentos válidos a partir de um dado conjunto de premissas.

Capítulo 6

*Resoluções de problemas de
provas de concursos ou
processos seletivos para pós-
graduação*

É muito comum aparecerem questões que envolvem conhecimentos de Lógica Matemática em provas de concursos ou de processos seletivos para ingresso em cursos de pós-graduação. Nesse capítulo são apresentadas algumas delas com resoluções obtidas por meio do uso do Diagrama de Allan Marquand. As questões foram retiradas de provas de concursos diversos ou de provas de processos seletivos para ingresso em pós-graduação na área da ciência da computação.

6.1 QUESTÕES DE CONCURSOS DIVERSOS

As provas completas e gabaritos estão disponíveis no site: <https://www.qconcursos.com/>.

a) IBFC – SEPALG-SE – 2018

11 Q903901 Raciocínio Lógico > Implicação Lógica
 Ano: 2018 Banca: IBFC Órgão: SEPLAG-SE Prova: IBFC - 2018 - SEPLAG-SE - Especialista em Políticas Públicas e Gestão Governamental

Considere a seguinte sentença: “Se o presidente exonerar o secretário por causa da pressão política da diretoria, então o presidente conseguirá ser reeleito.” Assinale a alternativa que apresenta uma correta conclusão referente a esta sentença.

- (A) Caso o presidente não exonere o secretário, ele não será reeleito
- (B) Caso o secretário seja exonerado sem que haja pressão política por parte da diretoria, o presidente não será reeleito
- (C) Se não houver pressão política da diretoria e o secretário for exonerado, o presidente pode ser reeleito
- (D) A reeleição do presidente está necessariamente vinculada à exoneração do secretário

Resolução: Considerando a seguinte simbolização das proposições simples:

p : O presidente exonera o secretário.

q : Existe pressão política da diretoria.

r : O presidente será reeleito.

Representa-se a premissa como $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$. Nesse caso, para encontrar uma conclusão correta basta encontrar uma conclusão Q que torne válido o seguinte argumento:

$$((q \rightarrow p) \rightarrow r) \Vdash Q$$

Destaca-se que para o argumento ser verdadeiro, por meio do uso do Diagrama de Allan Marquand, é necessário que o conteúdo lógico da conjunção entre as premissas (o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento) esteja contido no conteúdo lógico da conclusão Q .

Desse modo, inicialmente se faz a representação do antecedente da condicional associada ao argumento, simbolizando:

$$o: q \rightarrow p$$

$$\Box: o \rightarrow r$$

	q	$\sim q$	
p	o 1	o 3	r
	o 2	o 4	$\sim r$
$\sim p$	5	o 7	r
	6	o 8	$\sim r$

Figura 6.1 – Representação de $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$ que corresponde ao antecedente da condicional associada ao argumento.

Fonte: Autoras

Assim, na Figura 6.1 pode ser observado que o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$ ocorre nas regiões 1, 3, 5, 6 e 7.

Para se verificar qual alternativa representa a conclusão que torna o argumento válido é necessário proceder a representação do conteúdo lógico das fórmulas pelas simbolizações das proposições compostas apresentadas em cada uma delas.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(A) “Caso o presidente não exonere o candidato, ele não será reeleito”

tem-se: $\sim p \rightarrow \sim r$, a qual possui seu conteúdo lógico apresentado na Figura 6.2.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.2 – Representação do conteúdo lógico de $\sim p \rightarrow \sim r$.

Fonte: Autoras

Como as regiões 5 e 7 ocorrem no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$, mas não ocorrem no conteúdo lógico de $\sim p \rightarrow \sim r$, essa conclusão não torna válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(B) “Caso o secretário seja exonerado sem que haja pressão política por parte da diretoria, o presidente não será reeleito”.

tem-se: $p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$. Simbolizando:

$\circ$: $p \wedge \sim q$

$\square$: $\circ \rightarrow \sim r$

	q	$\sim q$	
p	1	$\circ$ 3	r
	2	$\circ$ 4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.3 – Representação do conteúdo lógico de $p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$.

Fonte: Autoras

obtem-se o conteúdo lógico de $p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$, conforme apresentado na Figura 6.3.

Como a região 3 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$, mas não ocorrem no conteúdo lógico de $p \wedge \sim q \rightarrow \sim r$, essa conclusão não torna válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(C) “Se não houver pressão política da diretoria e o secretário não for exonerado, o presidente pode ser reeleito”.

tem-se: $\sim q \wedge p \rightarrow r$. Simbolizando:

$$o: \sim q \wedge p$$

$$\Box: o \rightarrow r$$

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.4 – Representação do conteúdo lógico de $\sim q \wedge p \rightarrow r$.

Fonte: Autoras

obtem-se o conteúdo lógico de $\sim q \wedge p \rightarrow r$, conforme apresentado na Figura 6.4.

Como todas as regiões 1,3, 5, 6 e 7 nas quais ocorrem o antecedente da condicional associada ao argumento $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$ também ocorrem no conteúdo lógico de $\sim q \wedge p \rightarrow r$, essa conclusão torna o argumento válido. Assim, a resposta para essa questão é a alternativa: (C).

Observe que analisando a alternativa:

(D) “A reeleição do presidente está necessariamente vinculada à exoneração do secretário”.

tem-se: $r \leftrightarrow p$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.5.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.5 – Representação do conteúdo lógico de $r \leftrightarrow p$.

Fonte: Autoras

Como as regiões 5 e 7 ocorrem no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((q \rightarrow p) \rightarrow r)$, mas não ocorrem no conteúdo lógico de $r \leftrightarrow p$, essa conclusão não torna válido o argumento.

b) VUNESP – TJ-SP – 2019

6 Q967616 Raciocínio Lógico > Equivalência Lógica e Negação de Proposições ,
Negação - Leis de Morgan (Negativa de uma Proposição Composta)
Ano: 2019 Banca: VUNESP Órgão: TJ-SP Prova: VUNESP - 2019 - TJ-SP - Administrador Judiciário

Se Milton ou Tomas, apenas um deles, é administrador judiciário, então Valéria é policial. Sabendo-se que Valéria não é policial, conclui-se, corretamente, que

- (A) Milton e Tomas não são administradores judiciários.
- (B) Apenas Tomas não é administrador judiciário.
- (C) Apenas Milton não é administrador judiciário.
- (D) Milton é administrador judiciário se, e somente se, Tomas também for.
- (E) Milton não é administrador judiciário se, e somente se, Tomas também não for.

Resolução: Nesse caso, trata-se da análise de um argumento: $(P_1 \wedge P_2) \Vdash Q$

Considerando a seguinte simbolização das proposições simples:

p : Milton é administrador judiciário.

q : Tomas é administrador judiciário.

r : Valéria é policial.

As premissas podem ser representadas simbolicamente por:

$$P_1: p \underline{\vee} q \rightarrow r$$

$$P_2: \sim r$$

Nesse caso, para resolver a questão, basta encontrar uma conclusão Q que torne válido o argumento:

$$((p \underline{\vee} q \rightarrow r) \wedge (\sim r)) \Vdash Q$$

Sabe-se que para o argumento ser verdadeiro, é necessário que o conteúdo lógico da conjunção entre as premissas (o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento) esteja contido no conteúdo lógico da conclusão Q .

Para tanto, procede-se a representação do antecedente da condicional associada ao argumento $((p \underline{\vee} q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$, simbolizando:

$$\circ: p \underline{\vee} q$$

$$+: \circ \rightarrow r$$

$$\boxminus: + \wedge \sim r$$

	q	$\sim q$	
p	$\begin{array}{ c c } \hline + & 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline + & \circ 3 \\ \hline \end{array}$	r
	$\begin{array}{ c c } \hline + & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline & \circ 4 \\ \hline \end{array}$	$\sim r$
$\sim p$	$\begin{array}{ c c } \hline + & \circ 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline + & 7 \\ \hline \end{array}$	r
	$\begin{array}{ c c } \hline & \circ 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline + & 8 \\ \hline \end{array}$	$\sim r$

Figura 6.6 – Representação de $((p \underline{\vee} q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$ que corresponde ao antecedente da condicional associada ao argumento.

Fonte: Autoras

Assim, na Figura 6.6 pode ser observado que o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((p \underline{\vee} q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$ ocorre nas regiões 2 e 8.

Para se verificar qual alternativa representa a conclusão que torna o argumento válido é necessário proceder a representação do conteúdo lógico das formulas apresentadas pelas simbolizações das proposições compostas apresentadas em cada alternativa.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(A) “Milton e Tomas não são administradores judiciários.”

tem-se: $\sim p \wedge \sim q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.7.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.7 – Representação do conteúdo lógico de $\sim p \wedge \sim q$.

Fonte: Autoras

Como a região 2 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((p \vee q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$, mas não ocorre no conteúdo lógico de $\sim p \wedge \sim q$, essa conclusão não torna válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(B) “Apenas Tomas não é administrador judiciário.”

tem-se: $\sim q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.8.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.8 – Representação do conteúdo lógico de $\sim q$.

Fonte: Autoras

Como a região 2 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $((p \vee q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$, mas não ocorre no conteúdo lógico de $\sim q$, essa conclusão não torna válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(C) “Milton é administrador judiciário se, e somente se, Tomas também for.”

tem-se: $p \leftrightarrow q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.9.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.9 – Representação do conteúdo lógico de $p \leftrightarrow q$.

Fonte: Autoras

Como todas as regiões 2 e 8 nas quais ocorrem o antecedente da condicional associada ao argumento $((p \vee q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$ também ocorrem no conteúdo lógico de $p \leftrightarrow q$, essa conclusão torna o argumento válido. Assim, uma resposta correta para essa questão seria a alternativa: (C).

Observe que analisando a próxima alternativa:

(D) “Milton não é administrador judiciário se, e somente se, Tomas também não o for.”

tem-se: $\sim p \leftrightarrow \sim q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.10.

	q	$\sim q$	
p	1	3	r
	2	4	$\sim r$
$\sim p$	5	7	r
	6	8	$\sim r$

Figura 6.10 – Representação do conteúdo lógico de $\sim p \leftrightarrow \sim q$.

Fonte: Autoras

Como todas as regiões 2 e 8 nas quais ocorrem o antecedente da condicional associada ao argumento $((p \vee q \rightarrow r) \wedge (\sim r))$ também ocorrem no conteúdo lógico de $\sim p \leftrightarrow \sim q$, essa conclusão também torna o argumento válido.

Isso ocorre pelo fato das fórmulas $p \leftrightarrow q$ e $\sim p \leftrightarrow \sim q$ serem equivalentes. Nesse caso, essa questão, apesar de indicar no gabarito como resposta apenas a alternativa (C), essa questão também teria como resposta correta a alternativa (D), o que indica um erro no gabarito dessa questão.

c) FGV – BANESTES – 2018

15 Q899769 Raciocínio Lógico > Equivalência Lógica e Negação de Proposições ,
Equivalências - Proposições Logicamente Equivalentes
Ano: 2018 Banca: FGV Órgão: Banestes Provas: FGV - 2018 - Banestes - Analista em Tecnologia da Informação - Desenvolvimento de Sistemas ...

Considere a sentença "Joana gosta de leite e não gosta de café". Sabe-se que a sentença dada é falsa. Deduz-se que:

- (A) Joana não gosta de leite e não gosta de café;
- (B) Se Joana gosta de leite, então ela não gosta de café;
- (C) Joana gosta de leite ou gosta de café;
- (D) Se Joana não gosta de café, então ela não gosta de leite;
- (E) Joana não gosta de leite ou não gosta de café.

Resolução: Nesse caso, como afirmam que sentença inicial é falsa, trata-se da análise de um argumento: $(\sim(P_1)) \Vdash Q$. Considerando a seguinte simbolização das proposições simples:

p : Joana gosta de leite.

q : Joana gosta de café.

A premissa do argumento pode ser representada simbolicamente por: $\sim (p \wedge \sim q)$

Nesse caso, basta encontrar uma conclusão Q que torne válido o argumento:

$$\sim (p \wedge \sim q) \Vdash Q$$

Ou ainda, pela Lei de De Morgan:

$$(\sim p \vee q) \Vdash Q$$

Para o argumento ser verdadeiro, é necessário que o conteúdo lógico da única premissa $(\sim p \vee q)$ esteja contido no conteúdo lógico da conclusão Q .

Inicialmente, se procede a representação de $(\sim p \vee q)$ no diagrama de Allan Marquand. Verifica-se, na Figura 6.11 que o seu conteúdo lógico ocorre nas regiões: 1, 3 e 4.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.11 – Representação de $(\sim p \vee q)$ que corresponde ao antecedente da condicional associada ao argumento.

Fonte: Autoras

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(A) “Joana não gosta de leite e não gosta de café.”

tem-se: $\sim p \wedge \sim q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.12.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.12 – Representação do conteúdo lógico de $\sim p \wedge \sim q$.

Fonte: Autoras

Verifica-se que as regiões 1 e 3, as quais ocorrem no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $(\sim p \vee q)$, não ocorrem no conteúdo lógico de $\sim p \wedge \sim q$, e desse modo, caso fosse considerada essa conclusão, o argumento não seria válido.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(B) “Se Joana gosta de leite, então ela não gosta de café.”

tem-se: $p \rightarrow \sim q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.13.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.13 – Representação do conteúdo lógico de $p \rightarrow \sim q$.

Fonte: Autoras

Como a região 1 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $(\sim p \vee q)$, mas não ocorrem no conteúdo lógico de $p \rightarrow \sim q$, constata-se que essa conclusão não tornaria válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(C) “Joana gosta de leite ou gosta de café.”

tem-se: $p \vee q$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.14.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.14 – Representação do conteúdo lógico de $p \vee q$.

Fonte: Autoras

Como a região 4 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $(\sim p \vee q)$, mas não ocorre no conteúdo lógico de $p \vee q$, essa conclusão também não tornaria válido o argumento.

No caso da simbolização da proposição composta da alternativa:

(D) “Se Joana não gosta de café, então ela não gosta de leite.”

tem-se: $\sim q \rightarrow \sim p$, a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.15.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.15 – Representação do conteúdo lógico de $\sim q \rightarrow \sim p$.

Fonte: Autoras

Como todas as regiões 1, 3 e 4 nas quais ocorrem o antecedente da condicional associada ao argumento $(\sim p \vee q)$, também ocorrem no conteúdo lógico de $\sim q \rightarrow \sim p$, essa conclusão torna o argumento válido. Assim, a resposta correta para essa questão é a alternativa: (D).

Oberve que analisando a alternativa:

(E) “Joana não gosta de leite ou não gosta de café”.

tem-se: $\sim p \vee \sim q$ a qual possui o conteúdo lógico apresentado na Figura 6.16.

	q	$\sim q$
p	1	2
$\sim p$	3	4

Figura 6.16 – Representação do conteúdo lógico de $\sim p \vee \sim q$.

Fonte: Autoras

Como a região 1 ocorre no conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento $(\sim p \vee q)$, mas não ocorrem no conteúdo lógico de $\sim p \vee \sim q$, essa conclusão não torna válido o argumento.

6.2 QUESTÕES DE PROCESSOS SELETIVOS PARA INGRESSO EM PÓS-GRADUAÇÃO

As questões apresentadas a seguir foram retiradas de provas de processo seletivo para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (POSCOMP).

As provas completas e gabaritos estão disponíveis no site:

<https://www.sbc.org.br/documentos-da-sbc/category/153-provas-e-gabaritos-do-poscomp>.

a) POSCOMP – 2009

Questão 13. [MAT]

A sentença lógica $A \wedge (B \vee \neg C)$ é equivalente a

- A) $A \wedge (\neg B \wedge C)$
- B) $\neg A \vee \neg (B \vee \neg C)$
- C) $\neg A \vee (\neg B \wedge C)$
- D) Todas as respostas anteriores.
- E) Nenhuma das respostas anteriores.

Resolução: Como duas sentenças são equivalentes implicam em conteúdos lógicos idênticos, basta representar os conteúdos lógicos da sentença original e daquelas apresentadas nas alternativas e verificar se existe alguma equivalência entre elas.

Representando a sentença original no Diagrama de Alan Marquand:

$$A \wedge (B \vee \neg C) \equiv p \wedge (q \vee \sim r)$$

Simbolizando:

$$\circ: q \vee \sim r$$

$$\blacksquare: p \wedge \circ$$

	q	$\sim q$	
p	o		r
	o	o	$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

Figura 6.17 - Representação da sentença $A \wedge (B \vee \neg C) \equiv p \wedge (q \vee \sim r)$.

Fonte: Autoras

Representando a sentença da alternativa (A) Diagrama de Alan Marquand:

$$A \wedge (\neg B \wedge C) \equiv p \wedge (\sim q \wedge r)$$

Simbolizando:

$$o: \sim q \wedge r$$

$$\square: p \wedge o$$

	q	$\sim q$	
p		o	r
			$\sim r$
$\sim p$			r
			$\sim r$

Figura 6.18 - Representação da sentença $A \wedge (\neg B \wedge C) \equiv p \wedge (\sim q \wedge r)$.

Fonte: Autoras

Observando as Figuras 6.17 e 6.18 verifica-se que a sentença original não é equivalente à sentença da alternativa (A), pois os conteúdos lógicos não são idênticos.

Representando a sentença da alternativa (B) Diagrama de Alan Marquand

$$\neg A \vee \neg (B \vee \neg C) \equiv \sim p \vee \sim (q \vee \sim r)$$

Simbolizando:

$$o: q \vee \sim r$$

$$+: \sim o$$

$$\square: \sim p \vee +$$

	q	$\sim q$	
P	o	+	r
	o	o	$\sim r$
$\sim p$	o	+	r
	o	o	$\sim r$

Figura 6.19 - Representação da sentença $\neg A \vee \neg (B \vee \neg C) \equiv \sim p \vee \sim (q \vee \sim r)$.

Fonte: Autoras

Observando as Figuras 6.17 e 6.19 verifica-se que a sentença original não é equivalente à sentença da alternativa (B), pois os conteúdos lógicos não são idênticos.

Representando a sentença da alternativa (C) Diagrama de Alan Marquand

$$\neg A \vee (\neg B \wedge C) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge r)$$

Simbolizando:

$$o: \sim q \wedge r$$

$$\square: \sim p \vee o$$

	q	$\sim q$	
p		o	r
			$\sim r$
$\sim p$		o	r
			$\sim r$

Figura 6.20 - Representação da sentença $\neg A \vee (\neg B \wedge C) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge r)$.

Fonte: Autoras

Observando as Figuras 6.17 e 6.20 verifica-se que a sentença original não é equivalente à sentença da alternativa (C), pois os conteúdos lógicos não são idênticos.

Assim, a resposta para essa questão é a alternativa :

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

b) POSCOMP 2014

11 Considere a expressão condicional de um trecho de código Pascal dado a seguir.

```
if (B or (A and not (A and B))) then
  F:= 0
else
  F:= 1;
```

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a forma mais simples do termo antecedente da expressão condicional.

- a) A or B
- b) A and B
- c) not (A and B)
- d) not (A)
- e) not (B)

Para resolver essa questão basta representar o antecedente da condicional:

$$(B \text{ or } (A \text{ and not } (A \text{ and } B)))$$

no Diagrama de Alan Marquand e fazer sua simplificação.

Considerando: $(B \text{ or } (A \text{ and not } (A \text{ and } B))) \equiv (q \vee (p \wedge \sim (p \wedge q)))$.

Simbolizando:

$$o: p \wedge q$$

$$+: \sim o$$

$$\Delta: p \wedge +$$

$$\Box: q \vee \Delta$$

	q	$\sim q$
p	$\circ$	$\Delta +$
$\sim p$	$+$	$+$

Figura 6.21 - Representação de $(B \text{ or } (A \text{ and not } (A \text{ and } B))) \equiv (q \vee (p \wedge \sim (p \wedge q)))$.

Fonte: Autoras

Observando as Figuras 6.21 conclui-se que a fórmula simplificada equivalente, obtida pela leitura das regiões hachuradas do diagrama conjuntamente, é $(p \vee q) \equiv (A \text{ or } B)$

Assim, a resposta para essa questão é a alternativa (a).

c) POSCOMP 2015

— QUESTÃO 15 —

A expressão $(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$, quando simplificada, resulta em

- (A) $\neg p \vee q$
- (B) q
- (C) p
- (D) $p \wedge q$
- (E) $p \vee q$

Para resolver essa questão basta representar a expressão:

$$(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$$

no Diagrama de Alan Marquand e fazer sua simplificação.

$$\text{Como: } (p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q)$$

Simbolizando:

$$\circ: \sim p \vee q$$

$$+: \sim \circ$$

$$\Delta: p \wedge +$$

$$\square: p \wedge q$$

$$\boxplus: \Delta \vee \square$$

	q	$\sim q$
p	$\square \circ$	$\Delta +$
$\sim p$	$\circ$	$\circ$

Figura 6.22 - Representação de $(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q)$.

Fonte: Autoras

Observando as Figuras 6.22 conclui-se que a fórmula simplificada equivalente, obtida pela leitura das regiões hachuradas do diagrama conjuntamente, é p .

Assim, a resposta para essa questão é a alternativa (c).

d) POSCOMP – 2009

Questão 15. [MAT]

Existem três suspeitos de invadir uma rede de computadores: André, Bruna e Carlos. Sabe-se que a invasão foi efetivamente cometida por um ou por mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que:

- I. Se André é inocente, então Bruna é culpada.
- II. Ou Carlos é culpado ou Bruna é culpada, mas não os dois.
- III. Carlos não é inocente.

Com base nestas considerações, conclui-se que:

- A) Somente André é inocente.
- B) Somente Bruna é culpada.
- C) Somente Carlos é culpado.
- D) São culpados apenas Bruna e Carlos.
- E) São culpados apenas André e Carlos.

Nesse caso, trata-se da análise de um argumento: $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \Vdash Q$

Considerando a seguinte simbolização das proposições simples:

p : André é inocente;
 q : Bruna é culpada;
 r : Carlos é culpado.

As premissas podem ser representadas simbolicamente por:

- I. $P_1: p \rightarrow q$
- II. $P_2: (r \vee q) \wedge \sim (r \wedge q)$
- III. $P_3: r$

Assim o argumento a ser analisado é: $((p \rightarrow q) \wedge ((r \vee q) \wedge \sim (r \wedge q)) \wedge r) \Vdash Q$

Para o argumento ser verdadeiro, é necessário que o conteúdo lógico da conjunção entre as premissas (o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento) esteja contido no conteúdo lógico da conclusão Q .

Fazendo a representação do antecedente da condicional associada ao argumento:

$$((p \rightarrow q) \wedge ((r \vee q) \wedge \sim (r \wedge q)) \wedge r)$$

Simbolizando:

$$o: p \rightarrow q$$

$$+: r \vee q$$

$$\Delta: r \wedge q$$

$$\square: \sim \Delta$$

$$*: + \wedge \square$$

$$\square: o \wedge * \wedge r$$

	q	$\sim q$	
p	Δo	$* \square +$	r
	$* \square + o$	$\square$	$\sim r$
$\sim p$	Δo	$* \square + o$	r
	$* \square + o$	$\square o$	$\sim r$

Figura 6.23 – Representação de $((p \rightarrow q) \wedge ((r \vee q) \wedge \sim (r \wedge q)) \wedge r)$ que representa o antecedente da condicional associada ao argumento.

Fonte: Autoras

Nesse caso, a leitura da região hachurada ($\sim p \wedge \sim q \wedge r$) na Figura 6.23, a qual indica onde ocorre a conjunção entre as premissas, verifica-se que ocorrem conjuntamente as proposições: André não é inocente e Bruna é inocente e Carlos é culpado.

Para que o argumento seja válido é necessário que o conteúdo lógico da conclusão contenha pelo menos essa região no seu conteúdo lógico, ou seja, é necessário que pelo menos a ocorrência de $(\sim p \wedge \sim q \wedge r)$ seja verdadeira na conclusão.

Assim, a resposta para essa questão é a alternativa:

(E) São culpados apenas André e Carlos.

e) POSCOMP – 2015

— QUESTÃO 12 —

Considere as seguintes premissas (onde X , Y , Z e W são conjuntos não vazios):

P_1 : “ X está contido em Y e em Z , ou X está contido em W ”.

P_2 : “ X não está contido em W ”.

Pode-se, então, concluir que, necessariamente,

- (A) X está contido em Z .
- (B) Y está contido em Z .
- (C) Y está contido em Z ou em W .
- (D) X não está contido em W e nem em Y .
- (E) Y está contido em W .

Nesse caso, também se trata da análise de um argumento: $(P_1 \wedge P_2) \Vdash Q$

Considerando a seguinte simbolização das proposições simples:

p : X está contido em Y ;

q : X está contido em Z ;

r : X está contido em W .

As premissas podem ser representadas simbolicamente por:

P_1 : $(p \wedge q) \vee r$

P_2 : $\sim r$

Assim o argumento a ser analisado é: $((p \wedge q) \vee r) \wedge \sim r \Vdash Q$

Para o argumento ser verdadeiro, é necessário que o conteúdo lógico da conjunção entre as premissas (o conteúdo lógico do antecedente da condicional associada ao argumento) esteja contido no conteúdo lógico da conclusão Q .

Fazendo a representação do antecedente da condicional associada ao argumento:

$$(((p \wedge q) \vee r) \wedge \sim r)$$

Simbolizando:

$$\circ: p \wedge q$$

$$+: \circ \vee r$$

$$\boxplus: + \wedge \sim r$$

	q	$\sim q$	
p	$+ \circ$	$+$	r
	$+ \circ$		$\sim r$
$\sim p$	$+$	$+$	r
			$\sim r$

Figura 6.24 – Representação de $((p \wedge q) \vee r) \wedge \sim r$ que corresponde ao antecedente da condicional associada ao argumento.

Fonte: Autoras

Nesse caso, por meio da leitura da região hachurada $(p \wedge q \wedge \sim r)$ da Figura 6.24, a qual indica onde ocorre a conjunção entre as premissas, verifica-se que ocorrem conjuntamente as proposições: “X está contido em Y e X está contido em Z e X não está contido em W.”

Para que o argumento seja válido é necessário que o conteúdo lógico da conclusão contenha pelo menos essa região no seu conteúdo lógico, ou seja, é necessário que pelo menos a ocorrência de $(p \wedge q \wedge \sim r)$ seja verdadeira na conclusão.

Assim, analisando as possibilidades a resposta para essa questão é a alternativa:

(A) X está contido em Z.

Capítulo 7

Definição de Novas

Propriedades das Operações

Lógicas

Na exploração do uso do diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional percebeu-se, no processo de obtenção de fórmulas equivalentes simplificadas, a necessidade de duas novas propriedades envolvendo as operações de conjunção e disjunção. Foram encontradas fórmulas proposicionais que, através do diagrama de Allan Marquand, tinham fórmulas equivalentes, as mais simplificadas possíveis, as quais não eram obtidas de forma direta com a aplicação das propriedades das operações lógicas já existentes. Investigando sobre a simplificação de várias fórmulas do tipo citado anteriormente, observou-se a regularidade dos termos e de operadores lógicos, o que permitiu verificar a existência das novas propriedades, apresentadas a fim de que a simplificação possa ser percebida com facilidade e realizada de forma direta.

Assim, apresenta-se, nesse capítulo, duas novas propriedades e as demonstrações dessas, por meio da aplicação de propriedades clássicas, o que foi possível de forma indireta, do uso de tabela-verdade e também do uso do diagrama de Allan Marquand.

Para ilustrar a aplicação dessas novas propriedades também se apresentam alguns exemplos, nos quais a sua existência se faz necessária.

7.1 DEMONSTRAÇÃO DAS NOVAS PROPRIEDADES

Sendo p , q , r letras proposicionais, são válidas as seguintes propriedades para conjunção ($\wedge$) e disjunção inclusiva ($\vee$):

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \\ (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)\end{aligned}$$

Para demonstrar as equivalências apresentadas, faz-se uso de tabela-verdade, do diagrama de Allan Marquand e de propriedades das operações lógicas. Para facilitar as demonstrações indica-se:

$$A: (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))$$

$$B: (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

$$C: (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))$$

$$D: (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

7.1.1 DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE (I)

$$(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \quad \text{ou} \quad A \equiv B$$

a) Por tabela-verdade

Mostra-se que as tabelas-verdades de A e B possuem os mesmos resultados, ou seja, que A e B são equivalentes (ver Tabelas 7.1 e 7.2).

Tabela 7.1 -Tabela-verdade de A

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$((p$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V

Fonte: Autoras.

Tabela 7.2: Tabela-verdade de B

$((p$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim r))$
V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V

Fonte: Autoras.

b) Pelo diagrama de Allan Marquand

Mostra-se que os diagramas de A e B possuem os mesmos conteúdos lógicos, ou seja, que A e B são equivalentes (ver Figuras 7.1 (a) e 7.1 (b)). Para representar o conteúdo lógico de A e B , utilizaram-se os seguintes símbolos:

$$o: p \wedge q$$

$$+: p \wedge r$$

$$\Delta: (q \wedge \sim r)$$

$$\square: (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

$$\boxplus: A: (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))$$

$$\boxminus: B: (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

Figura 7.1 – Representação no diagrama de Allan Marquand da equivalência do caso (i)

Fonte: Autoras.

c) Pelas propriedades das operações lógicas

Mostra-se que, simplificando a fórmula A , por meio da aplicação de propriedades das operações lógicas, obtém-se a fórmula equivalente B .

Demonstração da propriedade (i) por meio de cálculo algébrico:

$$\begin{aligned}
 A : (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) &\equiv \\
 &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) && \text{Associativa} \\
 &\equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge V && \text{Propriedade do } V \\
 &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r) \wedge ((p \wedge r) \vee \sim(p \wedge r)) && \text{Tautologia} \\
 &\equiv (((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge (p \wedge r)) \vee \\
 &\vee (((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim(p \wedge r)) && \text{Distributiva}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv (p \wedge r) \vee (((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim(p \wedge r)) \equiv && \text{Absorção} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (((p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r)) \vee ((p \wedge r) \wedge \sim(p \wedge r)) \vee \vee && \text{Distributiva} \\
 &((q \wedge \sim r)) \wedge \sim(p \wedge r))) \equiv \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r)) \vee F \vee ((q \wedge \sim r)) \wedge \sim(p \wedge r) \equiv && \text{Associativa e Contradição} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim r)) \vee ((q \wedge \sim r)) \wedge (\sim p \vee \sim r) \equiv && \text{Morgan, Propriedade do F} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (p \wedge (\sim p \vee \sim r))) \vee (q \wedge (\sim r \wedge (\sim p \vee \sim r))) \equiv && \text{Associativa e Comutativa} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge ((p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r))) \vee (q \wedge \sim r) \equiv && \text{Distributiva e Absorção} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (F \vee (p \wedge \sim r))) \vee (q \wedge \sim r) \equiv && \text{Contradição} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge (p \wedge \sim r)) \vee (q \wedge \sim r) \equiv && \text{Propriedade do F} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (((q \wedge \sim r) \wedge p) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv && \text{Associativa e Comutativa} \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r): B && \text{Absorção}
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } (p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$$

Observe-se que a demonstração, através da aplicação das propriedades das operações lógicas, além de ser longa e exigir habilidade, necessita de inclusão de novo termo; no caso, foi inserido $\vee$ na segunda linha, o qual foi substituído por $((p \wedge r) \vee \sim(p \wedge r))$ na terceira linha da demonstração, para que as simplificações pudessem ser realizadas.

7.1.2 DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE (II)

$$(p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r) \quad \text{ou} \quad C \equiv D$$

a) Por tabela-verdade

Mostra-se que as tabelas-verdade de C e D possuem os mesmos resultados, ou seja, que são equivalentes (ver Tabelas 7.3 e 7.4).

Tabela 7.3 -Tabela-verdade de C

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$((p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\sim r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V

Fonte: Autoras.

Tabela 7.4 -Tabela-verdade de D

$(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\sim r)$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V

Fonte: Autoras.

b) Pelo diagrama de Allan Marquand

Mostremos que os diagramas de C e D possuem os mesmos conteúdos lógicos, ou seja, C e D são equivalentes (ver Figuras 7.2 (a) e 7.2 (b)). Para representar o conteúdo lógico de C e D foram utilizados os seguintes símbolos:

$$\circ: p \vee q$$

$$+: p \vee r$$

$$\Delta: (q \vee \sim r)$$

$$\square: (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

$$\boxdot: C: (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv$$

$$\boxdot: D: (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

	q	$\sim q$		
P	$o + \Delta \square$	$+ o$	r	
	$o + \Delta \square$	$o + \Delta \square$	$\sim r$	
	$o + \Delta \square$	$+$	r	
$\sim p$	$o \Delta$	Δ	$\sim r$	

(a) Conteúdo lógico de C

	q	$\sim q$		
p	$+ \Delta$	$+$	r	
	$+ \Delta$	$+ \Delta$	$\sim r$	
	$+ \Delta$	$+$	r	
$\sim p$	Δ	Δ	$\sim r$	

(b) Conteúdo lógico de D

Figura 7.2 – Representação no diagrama de Allan Marquand da equivalência do caso (ii)

Fonte: Autoras.

c) Pelas Propriedades das Operações Lógicas

Mostra-se que, simplificando a fórmula C através da aplicação de propriedades das operações lógicas, obtém-se a fórmula equivalente D .

Demonstração da propriedade (ii) através de cálculo algébrico:

$$\begin{aligned}
 C: (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) &\equiv \\
 &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r) && \text{Associativa} \\
 &\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \vee F && \text{Propriedade do F} \\
 &\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \vee r)) && \text{Contradição} \\
 &\equiv ((p \vee r) \wedge ((q \vee p) \wedge (q \vee \sim r))) \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \vee r)) && \text{Comutativa e Associativa} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge (((q \vee p) \wedge (q \vee \sim r)) \vee (\sim p \wedge \sim r)) && \text{Distributiva e Morgan} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge ((q \vee (p \wedge \sim r)) \vee (\sim p \wedge \sim r)) && \text{Distributiva} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee ((\sim r \wedge p) \vee (\sim r \wedge \sim p))) && \text{Associativa e Comutativa} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee (\sim r \wedge (p \vee \sim p))) && \text{Distributiva} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee (\sim r \wedge V)) && \text{Tautologia} \\
 &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r): D && \text{Propriedade do V}
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } (p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

Observe-se que a demonstração através da aplicação das propriedades das operações lógicas, também nesse caso, além de ser longa e exigir habilidade, necessita da inclusão de um novo termo, no caso F, na segunda linha, o qual foi substituído por $((p \vee r) \wedge \sim (p \vee r))$ na terceira linha da demonstração, para que as simplificações pudessem ser realizadas.

7.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

(a) Simplificação da Fórmula A, onde:

$$A: ((\sim p \vee s) \rightarrow ((q \vee p) \wedge (p \vee r))) \vee ((s \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow \sim q) \wedge \sim r$$

Resolução:

$$A: ((\sim p \vee s) \rightarrow ((q \vee p) \wedge (p \wedge r))) \vee ((s \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow \sim q) \wedge \sim r \equiv$$

$$\equiv (\sim (\sim p \vee s) \vee ((q \vee p) \wedge (p \wedge r))) \vee ((\sim s \vee q) \wedge (\sim s \vee \sim q) \wedge \sim r \equiv \text{Implicação}$$

$$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee ((q \vee p) \wedge (p \wedge r))) \vee ((\sim s \vee (q \wedge \sim q)) \wedge \sim r) \equiv \text{Morgan e Distributiva}$$

$$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee (((q \vee p) \wedge p) \wedge r)) \vee ((\sim s \vee F) \wedge \sim r) \equiv \text{Associativa e Contradição}$$

$$\equiv ((p \wedge \sim s) \vee (p \wedge r)) \vee (\sim s \wedge \sim r) \equiv \text{Absorção e Prop. do F}$$

$$\equiv A': (p \wedge \sim s) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r)) \equiv \text{Associativa}$$

$$\equiv A'': (p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r) \quad \text{Nova propriedade (i)}$$

A representação do conteúdo no diagrama de Allan Marquand da fórmula A ou de suas equivalentes simplificadas, A' e A'' podem ser visualizados na Figura 7.3. Observe que na simplificação da fórmula A, onde foi utilizada a nova propriedade, fez-se a exclusão de $(p \wedge \sim s)$, cujo conteúdo lógico está incluso no conteúdo lógico de $(p \wedge r) \vee (\sim s \wedge \sim r)$, o que pode ser conferido no diagrama da Figura 7.3.

	q		$\sim q$		
p	1	2	5	6	r
	3	4	7	8	$\sim r$
$\sim p$	9	10	13	14	r
	11	12	15	16	$\sim r$
	s	$\sim s$	s	$\sim s$	

Figura 7.4 - Representação do conteúdo lógico da fórmula B e de B' .

Fonte: Autoras.

(c) Simplificação da fórmula C, onde:

$$C: (p \vee r) \wedge (p \rightarrow (q \vee \sim r)) \wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)$$

Resolução:

$$C: (p \vee r) \wedge (p \rightarrow (q \vee \sim r)) \wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \equiv$$

$$\equiv (p \vee r) \wedge (\sim p \vee (q \vee \sim r)) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim r \vee q) \equiv$$

Implicação

$$\equiv ((p \vee q) \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \equiv$$

Comutativa e Associativa

$$\equiv ((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \equiv$$

Nova propriedade

$$\equiv (p \vee r) \wedge ((q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee (q \vee \sim r))) \equiv$$

Associativa

$$\equiv C': (p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

Absorção

A representação do conteúdo no diagrama de Allan Marquand da fórmula C ou de sua equivalente simplificada C' podem ser visualizadas na Figura 7.5. Observe-se que, no termo em que foi aplicado a nova propriedade, fez-se a exclusão do termo $(p \vee q)$, cujo conteúdo lógico inclui o conteúdo lógico de $((p \vee r) \wedge (q \vee \sim r))$, o que pode ser conferido no diagrama da Figura 7.5.

	q	$\sim q$	
p	o		r
	o	o	$\sim r$
$\sim p$	o		r
	o	o	$\sim r$

Figura 7.5 - Representação do conteúdo lógico da fórmula C e de C' .

Fonte: Autoras.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação à lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 1999.
- BLANCHÉ, Robert. *História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell*. Lisboa: Edições 70, 1985.
- BOCHENSKI, I. M. *Historia de la lógica formal*. Madrid: Gredos, 1985.
- CARROLL, Lewis. *Lewis Carroll: el juego de la lógica y outros escritos*. Madrid: Alianza Editorial, 1986.
- COPI, Irving M. *Introdução à lógica*. São Paulo: Mestre Jou, 1978.
- DIENES, Zoltan Paul. *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. Trad. de Maria Pia Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier. São Paulo: EPU; Brasília: INL, 1975.
- GARDNER, Martin. *Logic machines and diagrams*. EUA: McGraw-Hill, 1958.
- GARRIDO, Manuel. *Lógica simbólica*. 3. ed. Madrid: Tecnos, 1995.
- JONOFON, Sérates. *Raciocínio lógico*. Brasília: Jonofon, 2000.
- KNEALE, Willian; KNEALE, Martha. *O desenvolvimento da lógica*. 3. ed. Coimbra: Gráfica de Coimbra, 1991.
- KUPPERMAN, Joel; MACGRADE, Arthur. *Fundamentos de lógica*. Barcelona: Editorial Labor, 1973.
- MÜHL, Vera J. L.; D'AMBROSIO, Ubiratan. Uma proposta alternativa para o ensino de introdução à lógica matemática. In: MÜHL, Vera Jussara Lourenzi; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute (Org.). *Matemática aplicada estudo de métodos e resolução de problemas reais*. Passo Fundo, 2004. v. 1, p. 227-240.
- MÜHL, Vera. J. L.; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SETTI, Betine Diehl. Diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 21, p. 45-60, 2004.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Lógica*. México: Editorial F. Trilhas, 1970.
- PEDROSO, Dagmar Souza. *Iniciação à lógica matemática: cálculo sentencial, Lukasiewicz's parenthesis-free notation e árvores lógicas*. Porto Alegre: NBS, 1993.
- QUINE WILLARD, Van Orman. *Lógica matemática*. Madrid: Revista do Occidente, 1972.
- WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus lógico-philosophicus*. Londres, 1921.