Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2020-03

Mercados de Emparejamiento Muchos-a-Uno:
Externalidades y Estabilidad

Alfredo Salgado
Banco de México

Marzo 2020

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Many-to-one Matching: Externalities and Stability*

Alfredo Salgado[†]
Banco de México

Abstract: In this paper, we establish sufficient conditions on the domain of preferences and agents' behavior in order to characterize the existence of stable assignments in many-to-one matching problems with externalities. The set of stable matchings depends on what agents believe other agents will do if they deviate. Such sets of reactions are called estimation functions or simply estimations. We show that, unless some restrictions would be imposed on agents' preferences, there is no constraint on agents' behavior that assures the existence of stable matchings. In addition, we introduce a condition on preferences called bottom q -substitutability that guarantees the existence of at least one stable matching when the set of estimations includes all possible matches. Finally, we analyze a notion of the core and its relation with the set of stable assignments.

Keywords: Two-sided matching; Externalities; Stability; Estimation functions; Pessimistic agents; Core.

JEL Classification: C71, C78, D62.

Resumen: En este artículo, se establecen condiciones suficientes sobre el dominio de las preferencias y el comportamiento de los agentes para caracterizar la existencia de asignaciones estables en problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades. El conjunto de emparejamientos estables depende de lo que los agentes creen que haría el resto si se desvían. Dichas reacciones se denominan funciones de estimación o estimaciones. Se demuestra que, a menos que se impongan restricciones sobre las preferencias, no existe ninguna condición sobre el comportamiento de los agentes que asegure la existencia de emparejamientos estables. Además, se introduce una condición sobre las preferencias denominada bottom q -substitutability que garantiza la existencia de al menos una asignación estable cuando el conjunto de estimaciones incluye todos los emparejamientos posibles. Finalmente, se analiza una noción del núcleo y su relación con el conjunto de asignaciones estables.

Palabras Clave: Emparejamientos bilaterales; Externalidades; Estabilidad; Funciones de estimación; Agentes pesimistas; Núcleo.

*Agradezco los consejos de mi director de tesis Antonio Romero Medina y los valiosos comentarios de Aldo Heffner y Alfonso Ceballos que fueron de gran utilidad para mejorar la presentación del artículo.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: asalgot@banxico.org.mx.

1. Introducción

En problemas comunes de emparejamiento bilateral (Gale y Shapley, 1962), tales como en mercados de trabajo, admisiones universitarias y la formación de matrimonios, los agentes que se encuentran en un lado del mercado tienen preferencias sobre los otros agentes que se encuentran en el lado opuesto. En este contexto, la presencia de externalidades usualmente no es considerada, debido a que es común suponer que los agentes solo están interesados en aquellos otros con los que podrían emparejarse sin asignar ninguna valoración al resto de los emparejamientos. La ausencia de externalidades simplifica el análisis de este tipo de mercados y es de utilidad para probar la existencia y establecer diversas propiedades de conceptos de solución tales como el conjunto de emparejamientos estables y el núcleo.

Sin embargo, en diversas aplicaciones los agentes podrían estar no solo interesados en sus potenciales parejas sino también en los emparejamientos de los demás (Dutta y Masso, 1997; Echenique y Yenmez, 2007; Kurucu, 2007; Li, 1993). En estos casos, modelar explícitamente la presencia de externalidades podría ser crucial para entender aplicaciones más realistas de problemas de emparejamiento más generales (Bando, 2010; Hafalir, 2008; Mumcu y Saglam, 2006, 2007, 2010; Roy, 2004; Sasaki y Toda, 1996). En efecto, se pueden encontrar fácilmente ejemplos cotidianos de mercados de emparejamiento con externalidades. Por ejemplo, la presencia de parejas en el mercado laboral es una aplicación importante del análisis de los mercados de emparejamiento bilateral con externalidades, ya que las preferencias de un agente no solo dependen de su propio empleador, sino también del empleador de su pareja y, potencialmente, de los empleadores de otras parejas. Por su parte, también podemos considerar algunas situaciones competitivas donde los agentes interactúan entre sí en equipos donde la complementariedad entre las habilidades de los miembros de los equipos es importante, tales como los torneos y los concursos. En estos casos, los competidores tienen preferencias sobre sus propios equipos y también sobre los equipos de los oponentes, ya que la probabilidad de ganar un torneo depende no solamente del desempeño de su propio equipo sino también de la competencia a la que se enfrentan. Se pueden encontrar otros ejemplos en mercados con cadenas de suministro donde a los mayoristas les importa cómo se organizan los minoristas

para competir entre sí. A su vez, también hay importantes externalidades en industrias donde las empresas compiten en investigación y desarrollo donde el resultado de una empresa no solo depende de su propia investigación, sino también de los resultados alcanzados por otras empresas.

El análisis de problemas de emparejamiento con externalidades es complicado por al menos dos razones. Primero, los agentes deben considerar el emparejamiento de todos los participantes del mercado, por ejemplo, empresas y trabajadores, con el fin de definir sus preferencias. Por lo tanto, en presencia de externalidades las preferencias de los agentes deben estar definidas sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles, en lugar de solamente sobre el conjunto de agentes en el lado opuesto del mercado. Esta problemática tiene implicaciones cruciales para analizar la existencia de diversos conceptos de solución, ya que algunas restricciones sobre el dominio de preferencias que son suficientes para garantizar la existencia de estas soluciones podrían no estar bien definidas en la presencia de externalidades.

La segunda problemática se refiere a la definición del propio concepto de solución para este tipo de mercados. En los problemas de emparejamiento estándar, de acuerdo con el conocido concepto de solución de estabilidad (Gale y Shapley, 1962), los agentes que planean bloquear un emparejamiento deben comparar sus parejas actuales con las alternativas para evaluar si desviarse de un emparejamiento dado es rentable o no. Bajo esta noción de estabilidad, los agentes que se desvían no se preocupan por la reacción del resto de los jugadores, ya que sus preferencias no dependen de las parejas de los otros agentes. En cambio, una vez que se considera la presencia de externalidades, una desviación puede ser rentable o no en función de la reacción del resto de los agentes. Esto último implica que cada jugador debe anticipar o tener expectativas sobre la reacción de los agentes que no se desvían siempre que planeen bloquear un emparejamiento dado. De acuerdo con este argumento, es claro que diferentes supuestos acerca de cómo se espera que reaccionen los agentes pueden conducir a diferentes definiciones de estabilidad. Por ejemplo, podríamos asumir que, después de que alguna coalición de agentes se desvía, el resto de los jugadores simplemente permanece emparejado como se especifica en la asignación de referencia, excepto para aquellos que perdieron a sus

parejas. Por el contrario, podríamos asumir que después de que algunos agentes se desvían, el resto de los jugadores simplemente rompen cualquier emparejamiento dado con el fin de quedarse sin emparejar.

En la literatura anterior, los mercados de emparejamiento bilateral con externalidades se han analizado bajo dos enfoques principales. En el primer caso, se intentan establecer algunos supuestos sobre las reacciones de los agentes que aseguren la existencia de emparejamientos estables sin imponer restricción alguna sobre el dominio de las preferencias. Bajo el segundo enfoque, se establecen algunas restricciones sobre las preferencias de los agentes que garanticen la existencia de un emparejamiento estable bajo supuestos específicos sobre las reacciones de los jugadores. Se debe tener en cuenta que, en general, ambos enfoques no son equivalentes.

Sasaki y Toda (1996) fueron los primeros en analizar los problemas de emparejamiento con externalidades, enfocándose en el problema de emparejamiento uno-a-uno conocido como problema de matrimonio. Estos autores propusieron una noción de estabilidad que es similar a la idea de un equilibrio conjetural¹. Bajo este concepto de solución, los agentes predicen el conjunto de emparejamientos que consideran admisibles dada una conjetura sobre el comportamiento reactivo de los agentes. Estas predicciones se denominan *funciones de estimación* o simplemente *estimaciones*. Así, para un conjunto dado de *funciones de estimación*, digamos φ , un emparejamiento es φ -estable siempre que sea admisible para cada agente y no sea bloqueado por ninguna pareja hombre-mujer o ningún agente individual en el problema de emparejamiento uno-a-uno. Sasaki y Toda (1996) muestran que es posible que no exista ningún emparejamiento estable bajo conjuntos particulares de *funciones de estimación*. Sin embargo, afirman que en este tipo de problemas un emparejamiento estable existe si y solo si todos los agentes consideran admisibles todos los emparejamientos factibles de acuerdo con sus *funciones de estimación*. En este caso, decimos que el conjunto de *funciones de estimación* satisface una condición llamada *admisibilidad total*. Hafalir (2008) extendió el análisis de este modelo proponiendo un conjunto de *estimaciones* endógenas que depende de las pre-

¹Un equilibrio conjetural es una situación en la que ningún agente tiene incentivos para desviarse dada una conjetura sobre los comportamientos reactivos de los agentes (Rubinstein y Wolinsky, 1994; Azrieli, 2009).

ferencias de los agentes. Las *estimaciones* de Hafalir no solo garantizan la existencia de emparejamientos φ -estables, sino que también muestran que el supuesto de *admisibilidad total* no es una condición necesaria para asegurar la existencia de emparejamientos φ -estables.

Mumcu y Saglam (2010) también analizan el problema de emparejamiento uno-a-uno con externalidades. En su caso, proponen una noción de estabilidad que cumple dos condiciones: a) las parejas que se desvían se unen mientras sus parejas anteriores, si las hay, se divorcian y b) el resto de los agentes permanecen emparejados como lo estaban antes de la desviación. Mumcu y Saglam (2010) muestran que bajo esta noción de estabilidad podrían no existir emparejamientos estables. Sin embargo, proponen restricciones sobre las preferencias de los agentes que aseguran la existencia de asignaciones estables. Bando (2012) llega resultados similares en problemas de emparejamiento de muchos-a-uno con la presencia de externalidades solo en el lado del mercado de las empresas, es decir, las empresas tienen preferencias que dependen del emparejamiento de todos los agentes, mientras que las preferencias de los trabajadores solo dependen de las empresas que se encuentran en el lado opuesto del mercado.

En este documento se analizan los mercados de emparejamiento de muchos-a-uno con externalidades. En particular, analizamos la existencia de emparejamientos estables en el sentido propuesto por Sasaki y Toda (1996). Al igual que en la literatura anterior, encontramos que en este entorno podría no existir un emparejamiento estable. Asimismo, también mostramos que no existe un conjunto de *funciones de estimación* (ni endógenas, ni exógenas) que asegure la existencia general de emparejamientos φ -estables. Este resultado de imposibilidad contrasta con el caso de problemas de emparejamiento uno-a-uno, donde existe al menos un conjunto de *estimaciones* que garantiza siempre la existencia de emparejamientos φ -estables.² De acuerdo con estos resultados, podemos analizar dichos problemas de dos formas diferentes. Por un lado, podemos fijar un conjunto de *funciones de estimación* y encontrar restricciones razonables sobre el dominio de las preferencias que lleven a alcanzar una asignación estable. Por otro lado, podemos fijar una restricción sobre el dominio de preferencias y encontrar un conjunto razonable de *funciones de estimación* que tenga como resultado la

²Ver, Sasaki y Toda (1996) y Hafalir (2009).

existencia de un emparejamiento estable. De acuerdo con el primer enfoque, consideramos un modelo de referencia donde el conjunto de *funciones de estimación* satisface la condición de *admisibilidad total*.

Tal como se ha establecido en la literatura anterior, en los problemas estándar de emparejamiento bilateral es necesario imponer algún tipo de sustituibilidad en las preferencias de las empresas con el fin de garantizar la existencia de asignaciones estables. Intuitivamente, esta condición implica que las complementariedades entre los trabajadores no son lo suficientemente fuertes como para mostrar rendimientos crecientes del factor trabajo, es decir, si un trabajador ha sido seleccionado de un grupo de candidatos, seguirá siendo elegido cuando algunos de sus colegas ya no estén disponibles (Kelso y Crawford, 1982). Además de lo anterior, se sabe que esta restricción sobre las preferencias de los agentes puede generalizarse fácilmente a entornos más realistas de emparejamiento con cuotas fijas de trabajadores por parte de las empresas a través de la condición de *sustituibilidad-q* (Cantala, 2004).

Sin embargo, es claro que en presencia de externalidades es muy difícil imponer directamente cualquier tipo de sustituibilidad en el modelo, ya que las preferencias de los agentes están definidas sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles en lugar del conjunto de los agentes que se encuentran en el lado opuesto del mercado. En este contexto, las posibles ganancias o pérdidas de un emparejamiento también dependerán de cómo estén emparejados el resto de los agentes. Sin embargo, aún bajo estas condiciones, se puede mostrar que los agentes están en posibilidad de minimizar las pérdidas potenciales máximas de un emparejamiento mediante el uso de una regla de decisión minimax que los protege del riesgo derivado de las decisiones de otros jugadores.

Por ejemplo, en los problemas de elección de escuela o en las admisiones universitarias, la decisión de un estudiante de asistir a una universidad no solo dependerá de las características de la escuela y del resto de sus compañeros que también asistirán a dicha escuela, sino que también podría depender del resto de los estudiantes que asistirán a otras escuelas. Esto implica que el valor de un emparejamiento con una escuela determinada y un conjunto de compañeros dependería del conjunto de emparejamientos que el estudiante considere admisibles, es decir, cada emparejamiento admisible entre el resto de los estudiantes y escuelas

puede considerarse como el resultado de una mejor respuesta de los otros agentes a la decisión del estudiante. Por lo tanto, en ausencia de información adicional que permita a los estudiantes discriminar entre emparejamientos admisibles, es razonable minimizar el riesgo que implican las decisiones de otros jugadores, eligiendo el mejor emparejamiento admisible entre los casos más desfavorables posibles.

De acuerdo con el argumento anterior, proponemos una restricción sobre las preferencias de las empresas llamada *sustituibilidad- q inferior* que generaliza la *sustituibilidad- q* para problemas de emparejamiento de muchos-a-uno con externalidades. Esta condición garantiza la existencia de al menos una asignación estable bajo el supuesto de *admisibilidad total*. Intuitivamente, para cualquier conjunto dado de *funciones de estimación*, las empresas y los trabajadores utilizan una regla de decisión del tipo minimax sobre el conjunto de todos los emparejamientos admisibles. Esto permite a los agentes comparar conjuntos de trabajadores y empresas, respectivamente, en lugar de emparejamientos de todos los agentes. Así, la condición de *sustituibilidad- q inferior* implica que las empresas tendrían preferencias *q -sustituibles* al comparar conjuntos de trabajadores bajo dicha regla de decisión del tipo minimax.

En relación con el segundo enfoque propuesto y, dado que la *admisibilidad total* no es una condición necesaria para resolver el problema de existencia, consideramos un modelo integrado por agentes pesimistas con el fin de racionalizar un conjunto de *funciones de estimación* compatible con este supuesto.³ En este escenario, construimos un conjunto endógeno de *funciones de estimación pesimistas* que dependen de las preferencias de los agentes. Asimismo, mostramos que estas estimaciones no satisfacen la condición de *admisibilidad total*. Además, también mostramos que, dado el conjunto de *funciones de estimación pesimistas*, existe un emparejamiento φ -estable siempre que las preferencias satisfagan la condición de *sustituibilidad- q inferior*.

La última parte del documento se centra en el análisis del núcleo en mercados de emparejamiento de muchos-a-uno con externalidades. Sasaki y Toda (1996) propusieron una noción del núcleo en el problema de emparejamiento uno-a-uno con externalidades. Ellos

³Sasaki y Toda (1996) mostraron que un emparejamiento φ -estable podría no existir si solamente uno de los agentes no es suficientemente pesimista.

muestran que el núcleo y el conjunto de emparejamientos estables podrían no coincidir. Además, dicha noción del núcleo podría ser un conjunto vacío para algunos casos del problema. Así, proponemos una noción alternativa del núcleo que depende del conjunto de *funciones de estimación* llamado φ -núcleo. Nuestro resultado principal acerca de este concepto muestra que, para cualquier conjunto de *funciones de estimación*, el conjunto de emparejamiento φ -estables y φ -núcleo siempre coinciden. Este resultado contrasta con los hallazgos anteriores e implica que todas las propiedades del conjunto de emparejamientos φ -estables se extienden naturalmente al φ -núcleo.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, presentamos el modelo y algunos ejemplos básicos; en la Sección 3, presentamos la condición de *sustituibilidad- q inferior* con el fin de caracterizar la existencia de emparejamientos φ -estables; en la Sección 4, introducimos el conjunto de *funciones de estimación pesimistas*; en la Sección 5, analizamos el φ -núcleo; en la Sección 6 presentamos algunas conclusiones. Todas las pruebas se encuentran en el apéndice.

2. El modelo

Sea F el conjunto de empresas y W el conjunto de trabajadores. F y W son conjuntos finitos y disjuntos, con elementos $m \geq 1$ y $n \geq 1$, respectivamente. Cada trabajador $w \in W$ desea trabajar para máximo una empresa mientras que cada empresa $f \in F$ tiene una cuota fija $q_f \leq n$ que denota el máximo número de trabajadores que dicha empresa está en posibilidad de contratar. Asimismo, definimos como $H_f = \{S \in 2^W : |S| \leq q_f\}$ el conjunto de todos los subconjuntos de trabajadores (incluido el conjunto vacío de trabajadores) que una empresa f puede contratar. Un emparejamiento es una regla que especifica un grupo de trabajadores para cada empresa y una empresa para cada trabajador. Esta definición permite la posibilidad de que algunos agentes permanezcan sin emparejar. Formalmente,

Definición 1 *Un emparejamiento es un mapeo $\mu : F \cup W \rightarrow 2^{F \cup W}$ tal que:*

1. $|\mu(w)| = 1$ para todo $w \in W$ y $\mu(w) \cap F \neq \emptyset$ o $\mu(w) = \{w\}$;

2. $\mu(f) \in H_f$ para todo $f \in F$. Si $\mu(f) = \emptyset$, entonces la empresa f no contrata a ningún trabajador; y
3. $\mu(w) = \{f\}$ si y solo si $w \in \mu(f)$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los emparejamientos factibles entre trabajadores y empresas dados F , W y q . En los problemas de emparejamiento bilateral estándar, los agentes tienen preferencias ordinales sobre el conjunto de agentes que se encuentra en el lado opuesto del mercado, es decir, los trabajadores tienen preferencias sobre las empresas y la posibilidad de permanecer desempleados, mientras que las empresas tienen preferencias sobre el conjunto de todos los subconjuntos de trabajadores, el cual incluye el conjunto vacío. Esta especificación de las preferencias lleva a los agentes a valorar solo a aquellos otros jugadores con los que podría emparejarse y no a las parejas que pudieran tener el resto de los otros agentes, es decir, no se considera la presencia de externalidades. En este documento, consideramos un contexto más general donde las valoraciones de los agentes sobre sus potenciales trabajadores o empleadores pueden depender del emparejamiento completo entre empresas y trabajadores. Esta especificación de las preferencias de los agentes introduce explícitamente la presencia de externalidades en los problemas de emparejamiento bilateral de muchos-a-uno.

En la presencia de externalidades, las preferencias de los agentes estarían definidas por una relación de preferencia sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles entre empresas y trabajadores. Formalmente, cada agente $a \in F \cup W$ tiene una relación de preferencias completa, estricta y transitiva sobre el conjunto de emparejamientos $\mathcal{M}$ denotada por P_a^* . De esta forma para cualesquiera dos emparejamientos $\mu, \mu' \in \mathcal{M}$, la relación de preferencia $\mu P_a^* \mu'$ significa que el agente $a \in F \cup W$ prefiere la asignación $\mu(a)$ dado el emparejamiento μ a la asignación $\mu'(a)$ dado el emparejamiento μ' . Nótese que estas preferencias son aún más generales que en las que se especifica solo la comparación entre agentes (conjuntos de agentes) en el lado opuesto del mercado, dado que un agente $a \in F \cup W$ podría tener la misma asignación en dos emparejamientos distintos μ y μ' (i.e. $\mu(a) = \mu'(a)$) sin llegar a ser indiferente entre estas. De acuerdo con estas preferencias, un agente será indiferente entre dos emparejamientos solo si estos son idénticos. Formalmente, dos emparejamientos

$\mu, \mu' \in \mathcal{M}$ son idénticos $\mu = \mu'$ si y solo si $\mu(a) = \mu'(a)$ para todo $a \in F \cup W$. A su vez, para cada agente $a \in F \cup W$, R_a^* denota la relación de preferencias débil inducida por P_a^* , de esta forma para cualquier par de emparejamientos $\mu, \mu' \in \mathcal{M}$, la relación de preferencias $\mu R_a^* \mu'$ significa que $\mu P_a^* \mu'$ o $\mu = \mu'$. Por su parte, $P^* = (P_{f_1}^*, \dots, P_{f_m}^*; P_{w_1}^*, \dots, P_{w_n}^*)$ se define como el perfil de preferencias de los agentes; así un problema de emparejamiento con externalidades es una tupla de cuatro elementos (F, W, P^*, q) .

Consideramos un concepto de solución para problemas de emparejamiento bilateral con externalidades basado en el concepto de *funciones de estimación* (Sasaki y Toda, 1996; Hafalir, 2008). De acuerdo con este concepto de solución, ante la presencia de externalidades los agentes forman expectativas acerca del conjunto de emparejamientos que consideran admisibles. Los agentes utilizan tales expectativas para evaluar si desviarse de un emparejamiento dado es rentable o no. Estas expectativas se denominan *funciones de estimación* (o simplemente *estimaciones*).

Antes de introducir una definición formal del conjunto de *funciones de estimación*, requerimos de notación adicional. Sea $A(f, S) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) = S \in H_f\}$ el conjunto de todos los emparejamientos factibles donde una empresa f y un conjunto de trabajadores factible S están emparejados. De manera similar, $A(w, a)$ denota el conjunto de todos los emparejamientos factibles donde el trabajador $w \in W$ y el agente $a \in F \cup \{w\}$ están emparejados. Para cada empresa $f \in F$ y cualquier conjunto factible de trabajadores $S \in H_f$, una *función de estimación* φ_f especifica un conjunto no vacío de emparejamientos donde f y S están emparejados. Formalmente, para cada $f \in F$, φ_f mapea un subconjunto no vacío de emparejamientos $\varphi_f(S) \subset A(f, S)$ para todo $S \in H_f$. De manera similar, para cada trabajador $w \in W$ la *función de estimación* φ_w mapea un subconjunto no vacío de emparejamientos $\varphi_w(a) \subset A(w, a)$ para todo $a \in F \cup w$. Sea $\varphi = \{(\varphi_f(\cdot), \varphi_w(\cdot)) : f \in F \text{ y } w \in W\}$ un conjunto de *funciones de estimación* de un problema de emparejamiento con externalidades (F, W, P^*, q) . Nótese que el conjunto de *funciones de estimación* podría estar exógenamente determinado o ser un mapeo endógeno que depende de las preferencias de los agentes y otras condiciones adicionales.

Como argumentamos anteriormente, en la presencia de externalidades, siempre que al-

gunos agentes planeen bloquear un emparejamiento dado, deben anticipar o tener algunas expectativas sobre la reacción de aquellos que no se desvían. Dado que en este escenario la rentabilidad de una desviación depende de dichas expectativas, nuestra noción de estabilidad debe incluir el concepto de *función de estimación*. De acuerdo con el argumento anterior, un primer requisito para que un emparejamiento sea estable es que sea admisible para todos los agentes. Intuitivamente, un emparejamiento estable tiene que ser consistente con el hecho de que los agentes solo se preocupan por los emparejamientos que consideran admisibles. Así, introducimos la siguiente definición,

Definición 2 *Dado un conjunto de funciones de estimación φ , un emparejamiento μ es φ -admisible siempre que, $\mu \in \varphi_a(\mu(a))$ para todo $a \in F \cup W$.*

Un segundo requisito para que un emparejamiento sea estable es no tener coaliciones de agentes que tengan incentivos para desviarse. Para ser consistentes con la presencia de externalidades, los agentes deben considerar sus *funciones de estimación* cuando planean desviarse de un emparejamiento dado. Intuitivamente, un agente está dispuesto a bloquear un emparejamiento solo si estuviera mejor en todos los emparejamientos admisibles que se pueden realizar después de desviarse. De acuerdo con este argumento intuitivo, consideramos la siguiente definición de trabajadores y coaliciones bloqueadoras.

Definición 3 *Un trabajador $w \in W$, tal que $\mu(w) \neq w$, bloquea el emparejamiento μ si $\mu' P_w^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_w(w)$.*

Definición 4 *Una coalición empresa-trabajadores $\{f, S\}$ tal que $S \in H_f$ y $\mu(f) \neq S$, bloquea el emparejamiento μ si:*

1. $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(S)$ y
2. $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(f)$ y todo $w \in S$.

De acuerdo con las definiciones anteriores, dado un conjunto de *funciones de estimación* φ , un emparejamiento μ es φ -estable si éste es φ -admisible y no es bloqueado por ningún trabajador o coalición empresa-trabajadores. Sea $\mathcal{E}_\varphi(F, W, P^*, q)$ el conjunto de emparejamientos φ -estables de un problema dado.

2.1. Ejemplos Preliminares

En esta sección, analizamos algunos ejemplos con el fin de presentar dos problemáticas principales que se enfrentan en nuestro modelo. Primero, mostramos que en general un emparejamiento φ -estable podría no existir en problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades. Segundo, también establecemos un resultado crucial que establece que las *funciones de estimación* por sí mismas no pueden garantizar la existencia de emparejamientos φ -estables.

Con el fin de simplificar, en estos ejemplos consideramos un conjunto particular de *funciones de estimación* de acuerdo con las cuales cada emparejamiento se considera admisible para cada agente; como dijimos anteriormente, a esta situación se le llama *admisibilidad total*. Formalmente, decimos que un conjunto de *funciones de estimación* φ satisface la condición de *admisibilidad total* si para cada empresa $f \in F$ se satisface $\varphi_f(S) = A(f, S)$ para todo $S \in H_f$, y para cada trabajador $w \in W$ se satisface $\varphi_w(a) = A(w, a)$ para todo $a \in F \cup \{w\}$. Sea $\mathcal{E}(F, W, P^*, q)$ el conjunto de los emparejamientos φ -estables bajo la condición de *admisibilidad total*.

De acuerdo con la noción de estabilidad que analizamos en problemas de emparejamiento con externalidades, todo agente que planea desviarse de un emparejamiento dado debe considerar como admisible el conjunto de todos los emparejamientos factibles después de desviarse. Por el contrario, cuando no hay externalidades, los agentes solo hacen una comparación entre su pareja actual y posterior para evaluar si desviarse de un emparejamiento dado es rentable o no. Por definición, parece que debería ser más difícil bloquear un emparejamiento en presencia de externalidades, ya que cada agente que pretenda desviarse debería estar mejor en todos los emparejamientos admisibles después de la desviación. Este argumento intuitivo implica que debería ser relativamente más fácil sostener la existencia de un emparejamiento estable en un contexto con efectos externos. Sin embargo, es fácil encontrar ejemplos de dichos problemas donde no existen emparejamientos φ -estables, tal como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Consideremos un problema con tres trabajadores $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ y dos em-

presas $F = \{f_1, f_2\}$ con cuotas $q_{f_1} = 2$ y $q_{f_2} = 1$. Con el fin de simplificar, describiremos un emparejamiento como una lista de las parejas de los trabajadores en el orden $w_1, w_2, \dots, w_n$. Así, por ejemplo, la lista $\mu_1 = f_1, f_1, f_2$ describe que los agentes están emparejados de la siguiente manera: $\mu_1(w_1) = f_1$, $\mu_1(w_2) = f_2$ y $\mu_1(w_3) = f_1$. El conjunto de emparejamientos factibles de este problema se describe en el siguiente cuadro,

Cuadro 1: Conjunto de emparejamientos factibles

$\mu_1 = f_1, f_1, f_2$	$\mu_2 = f_1, w_2, f_2$	$\mu_3 = w_1, f_1, f_2$	$\mu_4 = w_1, w_2, f_2$
$\mu_5 = f_1, f_1, w_3$	$\mu_6 = f_1, w_2, w_3$	$\mu_7 = w_1, f_1, w_3$	$\mu_8 = f_1, f_2, f_1$
$\mu_9 = w_1, f_2, f_1$	$\mu_{10} = f_1, f_2, w_3$	$\mu_{11} = w_1, f_2, w_3$	$\mu_{12} = f_1, w_2, f_1$
$\mu_{13} = w_1, w_2, f_1$	$\mu_{14} = f_2, f_1, f_1$	$\mu_{15} = f_2, f_1, w_3$	$\mu_{16} = f_2, w_2, f_1$
$\mu_{17} = f_2, w_2, w_3$	$\mu_{18} = w_1, f_1, f_1$	$\mu_{19} = w_1, w_2, w_3$	

Fuente: Elaboración propia.

A su vez, consideremos las siguientes preferencias de los agentes sobre el conjunto de emparejamientos factibles.

$$P_{f_1}^* = \mu_1, \mu_5, \mu_4, \mu_{11}, \mu_{17}, \mu_{19}, \mu_{10}, \mu_2, \mu_6, \mu_7, \mu_3, \mu_{15}, \mu_{13}, \mu_{16}, \mu_9, \mu_{14}, \mu_{18}, \mu_8, \mu_{12}.$$

$$P_{f_2}^* = \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_1, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{18}, \mu_{19}.$$

$$P_{w_1}^* = \mu_1, \mu_2, \mu_5, \mu_6, \mu_8, \mu_{10}, \mu_{12}, \mu_{17}, \mu_{16}, \mu_{15}, \mu_{14}, \mu_3, \mu_4, \mu_7, \mu_9, \mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{18}, \mu_{19}.$$

$$P_{w_2}^* = \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{18}, \mu_{15}, \mu_{14}, \mu_7, \mu_5, \mu_3, \mu_1, \mu_{19}, \mu_{17}, \mu_{16}, \mu_{13}, \mu_{12}, \mu_6, \mu_4, \mu_2.$$

$$P_{w_3}^* = \mu_8, \mu_9, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{16}, \mu_{18}, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{15}, \mu_{19}, \mu_{17}, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4.$$

Además, consideremos un conjunto de *funciones de estimación* que satisface la condición de *admisibilidad total*. De esta forma, cada emparejamiento es φ -admisible y, en consecuencia, un candidato para ser φ -estable. Para mostrar que un emparejamiento μ no es φ -estable, necesitamos encontrar un trabajador o una coalición con incentivos para bloquear dicho emparejamiento μ . Consideremos, por ejemplo, el caso del emparejamiento $\mu_8 = f_1, f_2, f_1$ y la coalición formada por la empresa f_1 y el conjunto vacío de trabajadores. Es fácil determinar que el conjunto de emparejamientos donde la empresa f_1 y el conjunto vacío de trabajadores están emparejados es $A(f_1, \emptyset) = \{\mu_4, \mu_{11}, \mu_{17}, \mu_{19}\}$. Notemos que, como un supuesto,

cualquier emparejamiento del conjunto $A(f_1, \emptyset)$ es admisible para la empresa f_1 . Más aún, de acuerdo con las preferencias de f_1 es fácil observar que $\mu' P_{f_1}^* \mu_8$ para todo $\mu' \in A(f_1, \emptyset)$. Por lo tanto, el emparejamiento μ_8 no puede ser φ -estable, debido a que es bloqueado por la coalición $\{f_1, \emptyset\}$. A través de un argumento similar, es fácil mostrar que cualquier emparejamiento factible del problema del ejemplo puede ser bloqueado por al menos una coalición o un trabajador de forma individual.

Cuadro 2: Coaliciones bloqueadoras del Ejemplo 1

Emparejamiento	Bloqueado por
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$	$\{w_3\}$
$\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_{12}$	$\{f_2, \{w_2\}\}$
$\mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{14}, \mu_{15}$	$\{f_1, \emptyset\}$
μ_{11}, μ_{18}	$\{f_2, \{w_1\}\}$
$\mu_{13}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{19}$	$\{f_1, \{w_1, w_2\}\}$

Fuente: Elaboración propia.

Este sencillo ejemplo muestra que podría no existir un emparejamiento φ -estable, incluso cuando el conjunto de *funciones de estimación* satisface la condición de *admisibilidad total*. Esta es una implicación interesante ya que, en contraste con el problema de emparejamiento del matrimonio con externalidades (Sasaki y Toda, 1996), la condición de *admisibilidad total* no es suficiente para asegurar la existencia de asignaciones φ -estables en problemas de emparejamiento de muchos-a-uno.

Es interesante notar que nuestra noción de estabilidad también permite el análisis de algunos casos particulares del problema de emparejamiento donde la presencia de externalidades solo se encuentra presente en un lado del mercado. Por ejemplo, podemos considerar un escenario simple con externalidades solo presentes en el lado de las empresas, es decir, las empresas tienen preferencias definidas sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles, mientras que los trabajadores tienen preferencias sobre el conjunto de empresas y la posibilidad de permanecer desempleados, tal como analizamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Consideremos un problema de emparejamiento con dos empresas $F = \{f_1, f_2\}$ con cuotas $q_{f_i} = 2$ para $i = 1, 2$ y tres trabajadores $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. El conjunto de todos los emparejamientos factibles de este problema está dado en el siguiente cuadro:

Cuadro 3: Conjunto de emparejamientos factibles

$\mu_1 = f_1, f_1, f_2$	$\mu_2 = f_1, f_2, f_2$	$\mu_3 = f_1, f_2, f_1$	$\mu_4 = f_1, f_1, w_3$
$\mu_5 = f_1, w_2, w_3$	$\mu_6 = f_1, w_2, f_1$	$\mu_7 = f_1, w_2, f_2$	$\mu_8 = f_1, f_2, w_3$
$\mu_9 = f_2, f_2, f_1$	$\mu_{10} = f_2, f_1, f_1$	$\mu_{11} = f_2, f_1, f_2$	$\mu_{12} = f_2, f_2, w_3$
$\mu_{13} = f_2, w_2, w_3$	$\mu_{14} = f_2, w_2, f_2$	$\mu_{15} = f_2, w_2, f_1$	$\mu_{16} = f_2, f_1, w_3$
$\mu_{17} = w_1, w_2, f_2$	$\mu_{18} = w_1, f_1, w_3$	$\mu_{19} = w_1, f_2, w_3$	$\mu_{20} = w_1, f_1, f_1$
$\mu_{21} = w_1, f_2, f_2$	$\mu_{22} = w_1, f_1, f_2$	$\mu_{23} = w_1, f_2, f_1$	$\mu_{24} = w_1, w_2, f_1$
$\mu_{25} = w_1, w_2, w_3$			

Fuente: Elaboración propia.

Asimismo, consideremos también las siguientes preferencias de las empresas sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles:

$$P_{f_1}^* = \mu_6, \mu_3, \mu_4, \mu_1, \mu_{20}, \mu_{10}, \mu_7, \mu_5, \mu_8, \mu_2, \mu_{22}, \mu_{16}, \mu_{18}, \mu_{11}, \mu_{25}, \mu_{19}, \mu_{17}, \mu_{14}, \mu_{13}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{15}, \mu_9.$$

$$P_{f_2}^* = \mu_{14}, \mu_{11}, \mu_{21}, \mu_2, \mu_{12}, \mu_9, \mu_7, \mu_{22}, \mu_{17}, \mu_1, \mu_{13}, \mu_{16}, \mu_{15}, \mu_{10}, \mu_{19}, \mu_8, \mu_{23}, \mu_3, \mu_{25}, \mu_5, \mu_{20}, \mu_6, \mu_{18}, \mu_{24}, \mu_4.$$

Y las preferencias de los trabajadores sobre el conjunto de empresas y la posibilidad de permanecer desempleado:

$$P_{w_1} = f_2, f_1, w_1.$$

$$P_{w_2} = f_2, f_1, w_2.$$

$$P_{w_3} = f_1, f_2, w_3.$$

Como en el ejemplo anterior, consideramos que las empresas tienen un conjunto de *funciones de estimación* que satisfacen la condición de *admisibilidad total* y que además bloquean un emparejamiento dado de acuerdo con la noción de estabilidad que hemos propuesto en presencia de externalidades, es decir, comparan el emparejamiento actual con todos los emparejamientos admisibles que se pueden dar después de desviarse. Por su parte, los trabajadores solo hacen una comparación entre sus empleadores actuales y los que tendrían posteriormente cuando planean desviarse de un emparejamiento dado.

Con el fin de ilustrar el problema anterior, consideremos el emparejamiento dado por $\mu_3 = f_1, f_2, f_1$. Es fácil mostrar que μ_3 puede ser bloqueado por la coalición $\{f_2, \{w_1\}\}$. Primero, notemos que para la empresa f_2 el conjunto de todos los emparejamientos admisibles después de desviarse está dado por $A(f_2, \{w_1\}) = \{\mu_{10}, \mu_{13}, \mu_{15}, \mu_{16}\}$. Además, de acuerdo con las preferencias de f_2 , es fácil observar que se sostiene la condición $\mu' P_{f_2}^* \mu_3$ para todo $\mu' \in A(f_2, \{w_1\})$. Por su parte, nótese que de acuerdo con las preferencias del trabajador w_1 , se sabe que $f_2 P_{w_1} \mu_3(w_1)$. Por lo tanto, el emparejamiento μ_3 no puede ser φ -estable. A través de un argumento similar, es sencillo mostrar que cualquier emparejamiento del ejemplo puede ser bloqueado por una coalición o por un trabajador de forma individual como se resume en el siguiente cuadro.

Cuadro 4: Coaliciones bloqueadoras del Ejemplo 2

Emparejamiento	Bloqueado por
$\mu_1 = f_1, f_1, f_2$	$\{f_2, \{w_1, w_3\}\}$
$\mu_{10} = f_2, f_1, f_1$	$\{f_2, \{w_1, w_2\}\}$
$\mu_{11} = f_2, f_1, f_2$	$\{f_1, \{w_2, w_3\}\}$
$\mu_2 = f_1, f_2, f_2$	$\{f_2, \{w_1, w_3\}\}$
$\mu_9 = f_2, f_2, f_1$	$\{f_1, \emptyset\}$

Fuente: Elaboración propia.

Además de lo anterior, se puede mostrar fácilmente que cualquier emparejamiento que deje al trabajador w_1 desempleado es bloqueado por $\{f_1, \{w_1\}\}$ o por $\{f_2, \{w_1\}\}$. Asimismo, los emparejamientos que dejan a w_2 sin pareja son bloqueados por $\{f_1, \{w_2\}\}$, $\{f_2, \{w_2\}\}$ o por $\{f_2, \{w_2, w_3\}\}$. Finalmente, cualquier emparejamiento que deje al trabajador w_3 sin empleo, es bloqueado por $\{f_2, \{w_1, w_3\}\}$. Por lo tanto, así como en el ejemplo anterior, el conjunto de emparejamientos φ -estables de este problema es vacío, es decir $\mathcal{E}(F, W, P^*, q) = \emptyset$.

De manera similar al problema que analizamos, Sasaki y Toda (1996) también mostraron que en el problema del matrimonio con externalidades podría no existir un emparejamiento estable para ciertos conjuntos dados de *funciones de estimación*. Además de este resultado, ellos también caracterizan al menos un conjunto de *estimaciones* que garantizan la existencia de este tipo de emparejamientos. Más aún, afirman que un emparejamiento estable existe si y

solo si el conjunto de *funciones de estimación* satisface la condición de *admisibilidad total*. Hafalir (2008) muestra que esta última conjetura es incorrecta, ya que caracteriza un conjunto de *estimaciones* endógenas que no satisfacen la condición de *admisibilidad total* pero que garantiza la existencia de emparejamientos φ -estables en problemas de emparejamiento uno-a-uno con externalidades.

Los dos ejemplos anteriores son consistentes con los resultados de la literatura anterior, mostrando que en general es posible que no exista un emparejamiento estable bajo ciertos conjuntos de *funciones de estimación*. Sin embargo, nuestros resultados son aún más generales, ya que también se muestra que en el contexto de problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades, la condición de *admisibilidad total* no es suficiente para asegurar la existencia de emparejamientos φ -estables. El siguiente resultado brinda más información sobre el alcance de dichos resultados, ya que nos permite establecer conclusiones más generales sobre la existencia de asignaciones φ -estables en problemas de emparejamiento muchos-a-uno.

Lema 1 *Sea (F, W, P^*, q) cualquier problema de emparejamiento con externalidades. Si no existen emparejamientos φ -estables bajo la condición de admisibilidad total, entonces no existen emparejamientos φ -estables para cualquier otro conjunto de funciones de estimación.*

Nótese que los ejemplos 1 y 2 y el Lema 1 implican el siguiente resultado de imposibilidad general.

Teorema 1 *En problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades, no existe un conjunto de funciones de estimación φ que garantice la existencia de emparejamientos φ -estables.*

El resultado anterior tiene implicaciones importantes para el análisis de problemas de emparejamiento con externalidades. Por un lado, nuestro resultado muestra que para cualquier conjunto de *funciones de estimación* existe al menos un problema para el cual no existen emparejamientos φ -estables. Por otro lado, este resultado también sugiere que parecería necesario establecer una restricción sobre el dominio de las preferencias de los agentes con el fin de garantizar la existencia de asignaciones φ -estables.

3. La Existencia de Emparejamientos φ -estables bajo la Condición de *Admisibilidad Total*

En la sección anterior, se argumentó que en los problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades es imposible encontrar un conjunto de *funciones de estimación* que garantice la existencia de emparejamientos φ -estables. Este resultado sugiere que podría ser necesaria una restricción en el dominio de las preferencias de los agentes para garantizar dicho resultado de existencia. El análisis de problemas estándar de emparejamiento bilateral llega a conclusiones similares, ya que la existencia de emparejamientos estables en problemas de muchos-a-uno solo puede garantizarse bajo dominios restringidos de preferencias (Roth y Sotomayor, 1990).

Como se ha establecido en la literatura previa, es necesario imponer algún tipo de sustituibilidad de las preferencias de las empresas para garantizar la existencia de asignaciones estables en problemas estándar de emparejamiento bilateral. Intuitivamente, esta condición implica que las complementariedades entre los trabajadores contratados por las empresas no son lo suficientemente fuertes como para mostrar rendimientos crecientes; es decir, si un trabajador ha sido seleccionado de un grupo de candidatos dado, seguirá siendo elegido cuando algunos de sus colegas ya no estén disponibles debido a que su complementariedad con el grupo no es tan fuerte (Kelso y Crawford, 1982). Además de lo anterior, se sabe que esta restricción sobre las preferencias de los agentes puede generalizarse fácilmente a entornos más realistas, donde las empresas tienen cuotas de trabajadores fijas, mediante la condición de *sustituibilidad- q* (Cantala, 2004).

Es claro que en presencia de externalidades sería muy complicado imponer directamente cualquier tipo de sustituibilidad de las preferencias en el modelo, ya que las preferencias de los agentes se definen sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles, en lugar de los agentes o conjuntos de agentes que se encuentran en el lado opuesto del mercado. En este contexto, las posibles ganancias o pérdidas de un emparejamiento también dependerán de cómo se encuentren emparejados el resto de los agentes. Sin embargo, a pesar de dichas dificultades, en estas condiciones, los agentes aún están en posibilidad de minimizar las pér-

didas potenciales en el peor de los casos posibles mediante el uso de una regla de decisión minimax que los protege del riesgo involucrado en las decisiones del resto de los jugadores.

De acuerdo con el argumento anterior, proponemos una restricción sobre las preferencias de las empresas llamada *sustituibilidad- q inferior* que generaliza la de *sustituibilidad- q* para problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades. Esta condición garantiza la existencia de al menos una asignación φ -estable bajo el supuesto de *admisibilidad total*. Intuitivamente, para cualquier conjunto dado de *funciones de estimación*, las empresas y los trabajadores utilizan una regla de decisión minimax sobre el conjunto de todos los emparejamientos admisibles. Esto permite a los agentes comparar conjuntos de trabajadores y empresas en lugar de emparejamientos. La condición de *sustituibilidad- q inferior* implica que las empresas tendrán preferencias *q -sustituibles* cuando comparan conjuntos de trabajadores bajo dicha regla de decisión minimax.

Además de lo anterior, también consideramos un enfoque que es interesante para analizar nuestro problema que consiste en construir un problema reducido sin externalidades que nos permite aplicar resultados estándar para problemas de emparejamiento sin efectos externos, y establecer las condiciones para que existan emparejamientos φ -estables en problemas con externalidades.⁴

3.1. El Problema Reducido

En esta sección, mostramos cómo construir un *problema reducido* que es consistente a partir de cualquier problema de emparejamiento con externalidades. Para este propósito, requerimos de alguna notación adicional. Dado un conjunto de *funciones de estimación* φ , para cada empresa $f \in F$ (o trabajador $w \in W$) el emparejamiento μ_f^S (μ_w^a) satisface las siguientes condiciones: a) $\mu_f^S \in \varphi_f(S)$ ($\mu_w^a \in \varphi_w(a)$) y b) $\mu' R_f^* \mu_f^S$ para todo $\mu' \in \varphi_f(S)$ ($\mu'' R_w^* \mu_w^a$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(a)$). De esta forma μ_f^S (μ_w^a) es el emparejamiento admisible menos preferido en el que la empresa f (el trabajador w) está emparejada con un conjunto

⁴Obviamente, este enfoque es útil solo si el problema reducido está bien definido e implica la existencia de emparejamientos estables en el problema original con externalidades cuando existen asignaciones estables en el problema de emparejamiento reducido. Se pueden encontrar ejemplos de este enfoque en Shapley y Shubik (1969), Sasaki y Toda (1996), Hafalir (2008) y Klaus y Klijn (2005).

factible de trabajadores $S \in H_f$ (con un agente $a \in F \cup \{w\}$). Nótese que cada uno de estos emparejamientos admisibles menos preferidos está bien definido, dado que las preferencias de los agentes son órdenes estrictos y completos sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles y, por definición las *funciones de estimación* son subconjuntos no vacíos de emparejamientos.

Dado cualquier problema de emparejamiento (F, W, P^*, q) y un conjunto de *funciones de estimación* φ , se define para cada empresa $f \in F$ una relación de preferencias P_f^φ sobre el conjunto de trabajadores factibles H_f de la siguiente forma: para cualesquiera dos conjuntos distintos de trabajadores $S, S' \in H_f$, dicha relación de preferencias satisface $SP_f^\varphi S'$ si y solo si $\mu_f^S P_f^* \mu_f^{S'}$. De una manera similar, para cada trabajador $w \in W$ y cualquier par de agentes que sean distintos $a, a' \in F \cup \{w\}$, la relación de preferencias P_w^φ satisface $aP_w^\varphi a'$ si y solo si $\mu_w^a P_w^* \mu_w^{a'}$.

Debido a que el orden de preferencias P_a^* es completo, estricto y transitivo para cada agente $a \in F \cup W$, sabemos que P_a^φ está bien definido en el sentido de que también es un orden de preferencias completo, estricto y transitivo sobre el conjunto de agentes que se encuentran en el lado opuesto del mercado. Por lo tanto, para cada problema de emparejamiento con externalidades (F, W, P^*, q) y un conjunto de *funciones de estimación* φ se deriva un problema de emparejamiento sin externalidades representado por (F, W, P^φ, q) , donde $P^\varphi = (P_{f_1}^\varphi, \dots, P_{f_m}^\varphi; P_{w_1}^\varphi, \dots, P_{w_n}^\varphi)$ es el perfil de preferencias de los agentes. Adicionalmente, para cada agente $a \in F \cup W$, se define como R_a^φ la relación de preferencias débil asociada a P_a^φ . Con el fin de ilustrar toda la notación elaborada, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Consideremos el problema de emparejamiento analizado en el Ejemplo 2. Tomemos, por ejemplo, los conjuntos factibles de trabajadores $\{w_1, w_3\}$ y $\{w_1, w_2\}$ para la empresa f_1 . Es sencillo mostrar que los emparejamientos menos preferidos asociados con dichos subconjuntos de trabajadores son $\mu_{f_1}^{\{w_1, w_3\}} = \mu_3$ y $\mu_{f_1}^{\{w_1, w_2\}} = \mu_1$. De acuerdo con las preferencias de f_1 se sabe que $\mu_3 P_{f_1}^* \mu_1$, esto induce una relación de preferencia que satisfice la condición $\{w_1, w_3\} P_{f_1}^\varphi \{w_1, w_2\}$. A partir del razonamiento anterior, es fácil construir el perfil de preferencias completo que caracteriza el problema reducido de este ejemplo. En

particular se tiene que:

$$P_{f_1}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset, \{w_3\}.$$

$$P_{f_2}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset.$$

También es posible realizar el mismo ejercicio sobre el problema de emparejamiento analizado en el Ejemplo 1. En este caso, se derivan las siguientes preferencias de los agentes:

$$P_{f_1}^\varphi = \{w_1, w_2\}, \emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_3\}.$$

$$P_{f_2}^\varphi = \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset.$$

$$P_{w_1}^\varphi = f_1, f_2, w_1.$$

$$P_{w_2}^\varphi = f_2, f_1, w_2.$$

$$P_{w_3}^\varphi = f_1, w_3, f_2.$$

Nuestra noción de estabilidad utilizada para analizar problemas de emparejamiento con externalidades induce naturalmente una noción de estabilidad para problemas sin externalidades. Tal concepto de estabilidad depende formalmente de las siguientes definiciones.

Definición 5 Un emparejamiento μ es bloqueado por un trabajador $w \in W$ si $w P_w \mu(w)$.

Definición 6 Una coalición empresa-trabajadores $\{f, S\}$ tal que $S \in H_f$ y $\mu(f) \neq S$, bloquea emparejamiento μ si:

1. $S P_f \mu(f)$ y
2. $f R_w \mu(w)$ para todo $w \in S$.

Un emparejamiento μ es estable en el problema (F, W, P, q) , si no es bloqueado por ningún trabajador o coalición. Sea $\mathcal{E}(F, W, P, q)$ el conjunto de emparejamientos estables del problema.

El siguiente resultado es importante para caracterizar la existencia de emparejamientos φ -estables; básicamente dice que cualquier emparejamiento φ -admisibles que sea estable en el problema reducido también es φ -estable en el problema original.

Proposición 1 Sea (F, W, P^*, q) cualquier problema de emparejamiento con externalidades y φ cualquier conjunto de funciones de estimación. Entonces todo emparejamiento μ que satisfaga: a) $\mu \in \varphi_a(\mu(a))$ para todo $a \in F \cup W$ y b) $\mu \in \mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q)$ es φ -estable, es decir, $\mu \in \mathcal{E}_\varphi(F, W, P^*, q)$.

El resultado anterior tiene implicaciones importantes, dado que todo emparejamiento es φ -admisibile bajo la condición de *admisibilidad total*. Se deduce entonces que cualquier emparejamiento estable del *problema reducido* también será φ -estable en el problema original. Establecemos formalmente esta observación como un Corolario del resultado anterior.

Corolario 1 Supongamos que el conjunto de funciones de estimación φ satisface la condición de *admisibilidad total*, entonces $\mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q) \subset \mathcal{E}(F, W, P^*, q)$.

Nótese que el resultado inverso del Corolario previo no necesariamente se sostiene, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Consideremos un problema con tres trabajadores $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ y dos empresas $F = \{f_1, f_2\}$ con cuotas $q_{f_1} = q_{f_2} = 2$. Las empresas tienen las mismas preferencias que en el Ejemplo 2, mientras que los trabajadores tienen las siguientes preferencias:

$$P_{w_1}^* = \mu_9, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{10}, \mu_1, \mu_8, \mu_7, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_3, \mu_2, \mu_{17}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}, \mu_{22}, \mu_{18}, \mu_{21}, \mu_{19}, \mu_{20}.$$

$$P_{w_2}^* = \mu_{23}, \mu_{21}, \mu_{19}, \mu_{12}, \mu_9, \mu_8, \mu_3, \mu_2, \mu_{22}, \mu_{20}, \mu_{18}, \mu_{16}, \mu_{11}, \mu_4, \mu_1, \mu_{10}, \mu_{25}, \mu_{24}, \mu_{17}, \mu_{15}, \mu_{13}, \mu_7, \mu_6, \mu_5, \mu_{14}.$$

$$P_{w_3}^* = \mu_{24}, \mu_{23}, \mu_{20}, \mu_{15}, \mu_9, \mu_6, \mu_3, \mu_{10}, \mu_{22}, \mu_{21}, \mu_{17}, \mu_{14}, \mu_{11}, \mu_7, \mu_1, \mu_2, \mu_{25}, \mu_{19}, \mu_{18}, \mu_{16}, \mu_{13}, \mu_8, \mu_5, \mu_4, \mu_{12}.$$

Tal como en los ejemplos anteriores, suponemos que las *funciones de estimación* satisfacen la condición de *admisibilidad total*. Bajo este supuesto es sencillo mostrar que el *problema reducido* de este ejemplo es caracterizado por el siguiente perfil de preferencias de los agentes:

$$P_{f_1}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset, \{w_3\}.$$

$$P_{f_2}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset.$$

$$P_{w_1}^\varphi = f_2, f_1, w_1.$$

$$P_{w_2}^\varphi = f_2, f_1, w_2.$$

$$P_{w_3}^\varphi = f_1, f_2, w_3.$$

Nótese que el *problema reducido* (F, W, P^φ, q) de este ejemplo no tiene emparejamientos estables, es decir, $\mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q) = \emptyset$. Sin embargo, es sencillo mostrar que el emparejamiento $\mu_{11} = f_2, f_1, f_2$ es φ -estable.

En la siguiente sección, se introduce una restricción sobre el dominio de las preferencias de los agentes llamada *sustituibilidad- q inferior* que generaliza la condición de *sustituibilidad- q* para problemas de emparejamiento bilateral con externalidades y, que bajo la condición de *admisibilidad total* asegura la existencia de emparejamientos φ -estables.

3.2. *Sustituibilidad- q Inferior*

La condición de *sustituibilidad- q* es una restricción sobre las preferencias de las empresas que generaliza la condición de sustituibilidad (Kelso y Crawford, 1982) a problemas de emparejamiento donde las empresas tienen cuotas fijas de trabajadores.⁵ La condición de *sustituibilidad- q* garantiza la existencia de emparejamientos estables en problemas de muchos-a-uno estándar. De acuerdo con la Proposición 1 (y el Corolario 1) la existencia de emparejamientos φ -estables puede ser establecida imponiendo condiciones sobre el problema de emparejamiento con externalidades que aseguren la existencia de emparejamientos estables en el *problema reducido*.

⁵ Sea P_f una relación de preferencias de la empresa f . El mapeo $Ch_f : 2^W \rightarrow H_f$ denota la elección óptima de la empresa f . Así, para cualquier subconjunto de trabajadores $S \in 2^W$, la función de elección de la empresa f satisface las siguientes condiciones: a) $Ch_f(S) \in H_f$ y b) $Ch_f(S) R_f S'$ para todo $S' \subset S$. Dado cualquier problema de emparejamiento (F, W, P, q) , decimos que las preferencias de la empresa f son q -sustituibles si para cualquier subconjunto de trabajadores $S \in 2^W$ tal que $w, w' \in S$ y $w \neq w'$, si $w \in Ch_f(S)$ entonces $w \in Ch_f(S \setminus \{w'\})$.

Antes de introducir la condición de *sustituibilidad- q inferior* que proponemos en este artículo sobre las preferencias de los agentes, requerimos de notación adicional. Para cada empresa $f \in F$ y cualquier subconjunto factible de trabajadores $S \in H_f$, el emparejamiento $\mu_{f,S}$ satisface las siguientes condiciones: a) $\mu_{f,S} \in A(f, S)$ y b) $\mu' R_f^* \mu_{f,S}$ para todo $\mu' \in A(f, S)$. De manera similar, para cada trabajador $w \in W$ y cualquier agente $a \in F \cup \{w\}$, el emparejamiento $\mu_{w,a}$ satisface las siguientes condiciones: a) $\mu_{w,a} \in A(w, a)$ y b) $\mu' R_w^* \mu_{w,a}$ para todo $\mu' \in A(w, a)$. Nótese que el emparejamiento $\mu_{f,S}(\mu_{w,a})$ es el menos preferido para f (para w) donde la empresa f (el trabajador w) y el subconjunto de trabajadores $S \in H_f$ (y el agente $a \in F \cup \{w\}$) están emparejados. A su vez, sabemos que estos emparejamientos están bien definidos, dado que las preferencias de todos los agentes son estrictas y completas sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles. Sea $M_f = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu = \mu_{f,S} \text{ y } S \in H_f\}$ el conjunto de todos “los emparejamientos menos preferidos de la empresa f ”. Dada la notación previa, podemos introducir la siguiente definición.

Definición 7 Para cada empresa $f \in F$ y cualquier subconjunto de trabajadores $S \in 2^W$, el mapeo $\Upsilon_f : 2^W \rightarrow \mathcal{M}$ satisface las siguientes condiciones:

1. $\Upsilon_f(S) \in \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f$; y
2. $\Upsilon_f(S) R_f^* \mu'$ para todo $\mu' \in \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f$.

El mapeo Υ_f puede ser interpretado como la función de elección de la empresa f en presencia de externalidades. Este mapeo se define bajo un argumento minmax donde para cualquier subconjunto de trabajadores dado, las empresas escogen el mejor emparejamiento entre las asignaciones factibles menos preferidas. Nótese que la función de elección Υ_f está bien definida, dado que la relación de preferencias P_f^* es estricta y completa para cada empresa $f \in F$ y el conjunto de emparejamientos $\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f \subset \mathcal{M}$ es siempre no vacío. Por ejemplo, es claro que el emparejamiento $\mu_{f,\emptyset}$ pertenece al conjunto $\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f$, dado que por definición $\mu_{f,\emptyset}(f) = \emptyset \subset S$ para cualquier subconjunto de trabajadores $S \subset W$. Es también claro que $\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f = M_f$ siempre que $S = W$, lo cual implica que la función de elección $\Upsilon_f(W)$ mapea el emparejamiento más preferido entre aquellos del conjunto M_f . Esta función de elección nos permite

introducir una noción de sustituibilidad para problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades.

Definición 8 *Se dice que el perfil de preferencias P^* en el problema (F, W, P^*, q) satisface la condición de sustituibilidad- q inferior si para toda empresa $f \in F$ y cualquier subconjunto de trabajadores $S \in 2^W$ tal que $w, w' \in S$, si $w \in \mu(f)$ y $\Upsilon_f(S) = \mu$ entonces $w \in \mu'(f)$ y $\Upsilon_f(S \setminus \{w'\}) = \mu'$.*

Nótese que para cada empresa f y cualquier conjunto factible de trabajadores $S \in H_f$, existe un único emparejamiento en el conjunto M_f que satisface $\mu(f) = S$. Por lo tanto, bajo la condición de *admisibilidad total* el perfil de preferencias del *problema reducido* está completamente caracterizado por la relación de preferencias restringida sobre el conjunto de emparejamientos menos preferidos M_f . Así, bajo la condición de *admisibilidad total* el perfil de preferencias P^* del problema de emparejamiento (F, W, P^*, q) satisface la condición de *sustituibilidad- q inferior* si y solo si el perfil de preferencias P^φ del *problema reducido* (F, W, P^φ, q) es *q -sustituible*. Sea $\mathcal{BS}$ el conjunto de todos los perfiles de preferencias que satisfacen la condición de *sustituibilidad- q inferior*. Entonces podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sea (F, W, P^*, q) cualquier problema de emparejamiento con externalidades. Supongamos que $P^* \in \mathcal{BS}$, entonces bajo la condición de admisibilidad total el conjunto de emparejamientos φ -estables $\mathcal{E}(F, W, P^*, q)$ es no vacío.*

El resultado anterior implica que la condición de *sustituibilidad- q inferior* es suficiente más no necesaria para asegurar la existencia de emparejamientos φ -estables. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de emparejamiento que fue introducido en el Ejemplo 4. Este problema de emparejamiento induce un *problema reducido* con las siguientes preferencias:

$$P_{f_1}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset, \{w_3\}.$$

$$P_{f_2}^\varphi = \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset.$$

$$P_{w_1}^\varphi = f_2, f_1, w_1.$$

$$P_{w_2}^\varphi = f_2, f_1, w_2.$$

$$P_{w_3}^\varphi = f_1, f_2, w_3.$$

De acuerdo con las preferencias anteriores, la empresa f_1 debe escoger el subconjunto de trabajadores $\{w_1, w_3\}$ del conjunto $\{w_1, w_3\}$. Sin embargo, cuando solamente el trabajador w_3 está disponible, la empresa f_1 prefiere escoger un conjunto vacío de trabajadores. Este sencillo ejemplo implica que la empresa f_1 no está dispuesta a sustituir al trabajador w_1 con el trabajador w_3 . Así, este perfil de preferencias no es *q-sustituible*, lo cual implica que el perfil de preferencias del problema original P^* no es *q-sustituible inferior*. Más aún, anteriormente argumentamos que el conjunto de emparejamientos estables del *problema reducido* es vacío. No obstante, bajo la condición de *admisibilidad total* el emparejamiento $\mu_{11} = f_2, f_1, f_2$ es φ -estable.

En el siguiente ejemplo, analizamos un problema de emparejamiento con preferencias que satisfacen la condición de *sustituibilidad-q inferior*, lo que garantiza la existencia de al menos un emparejamiento φ -estable. Con el fin de aclarar toda la notación y los conceptos previos, se analiza el problema con cierto detalle.

Ejemplo 5 Consideremos un problema de emparejamiento con dos empresas $F = \{f_1, f_2\}$ con cuotas $q_{f_1} = q_{f_2} = 2$ y tres trabajadores $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. El conjunto de emparejamientos factibles está dado en el Cuadro 3 del Ejemplo 2. Las preferencias de los agentes están dadas por las siguientes listas:

$$P_{f_1}^* = \mu_6, \mu_4, \mu_5, \mu_8, \mu_1, \mu_7, \mu_2, \mu_{20}, \mu_{24}, \mu_{23}, \mu_{15}, \mu_{18}, \mu_{22}, \mu_{16}, \mu_{11}, \mu_{25}, \mu_{21}, \mu_{19}, \mu_{17}, \\ \mu_{14}, \mu_{13}, \mu_{12}, \mu_3, \mu_{10}, \mu_9.$$

$$P_{f_2}^* = \mu_{14}, \mu_{13}, \mu_{21}, \mu_{16}, \mu_{12}, \mu_9, \mu_{15}, \mu_2, \mu_{17}, \mu_{19}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_7, \mu_{10}, \mu_1, \mu_8, \mu_3, \mu_{25}, \mu_{24}, \\ \mu_{20}, \mu_{18}, \mu_6, \mu_5, \mu_4, \mu_{11}.$$

$$P_{w_1}^* = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_4, \mu_9, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{10}, \mu_{17}, \mu_{18}, \mu_{19}, \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}, \mu_{20}.$$

$$P_{w_2}^* = \mu_2, \mu_8, \mu_9, \mu_{12}, \mu_{19}, \mu_{21}, \mu_{23}, \mu_3, \mu_1, \mu_4, \mu_{11}, \mu_{16}, \mu_{18}, \mu_{20}, \mu_{22}, \mu_{10}, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \\ \mu_{13}, \mu_{15}, \mu_{17}, \mu_{24}, \mu_{25}, \mu_{14}.$$

$$P_{w_3}^* = \mu_2, \mu_7, \mu_{11}, \mu_{14}, \mu_{17}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_1, \mu_3, \mu_6, \mu_9, \mu_{15}, \mu_{20}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{10}, \mu_4, \mu_5, \mu_8, \\ \mu_{13}, \mu_{16}, \mu_{18}, \mu_{19}, \mu_{25}, \mu_{12}.$$

Como argumentamos anteriormente, para revisar si la condición de sustituibilidad-q inferior se sostiene, es suficiente considerar el orden de preferencias restringido a los conjuntos de emparejamientos menos preferidos por las empresas, es decir, M_{f_1} y M_{f_2} :

$$\tilde{P}_{f_1}^* = \mu_1, \mu_2, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_3, \mu_{10}, \mu_9.$$

$$\tilde{P}_{f_2}^* = \mu_9, \mu_2, \mu_{10}, \mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_{11}.$$

Es fácil mostrar que estas preferencias satisfacen la condición de sustituibilidad-q inferior. Formalmente, necesitamos verificar que las funciones de elección de las empresas satisfacen la condición para cualquier posible subconjunto de trabajadores. Por ejemplo, consideremos el caso de la empresa f_1 y el subconjunto de trabajadores $S = \{w_1, w_2, w_3\}$. De acuerdo con las preferencias de f_1 , se sostiene lo siguiente:

$$\Upsilon_{f_1}(S) = \mu_1 \text{ con } \mu_1(f_1) = \{w_1, w_2\}; \\ \Upsilon_{f_1}(S \setminus \{w_1\}) = \mu_{11} \text{ con } \mu_{11}(f_1) = \{w_2\}; \\ \Upsilon_{f_1}(S \setminus \{w_2\}) = \mu_2 \text{ con } \mu_2(f_1) = \{w_1\}; \text{ y} \\ \Upsilon_{f_1}(S \setminus \{w_3\}) = \mu_1 \text{ con } \mu_1(f_1) = \{w_1, w_2\}.$$

Sin embargo, de acuerdo con nuestros argumentos anteriores también podemos comprobar si el problema reducido (F, W, P^φ, q) tiene preferencias que satisfacen la condición de sustituibilidad-q. Así, es fácil mostrar que el problema reducido de este ejemplo tiene el siguiente perfil de preferencias:

$$P_{f_1}^\varphi = \{w_1, w_2\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3\}.$$

$$P_{f_2}^\varphi = \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_3\}, \{w_2\}, \emptyset, \{w_1, w_3\}.$$

$$P_{w_1}^\varphi = f_1, f_2, w_1.$$

$$P_{w_2}^\varphi = f_2, f_1, w_2.$$

$$P_{w_3}^\varphi = f_2, f_1, w_3.$$

Es evidente que dicho perfil de preferencias satisface la condición de sustituibilidad- q , por lo que se sabe que al menos un emparejamiento φ -estable existe. A este respecto, se puede mostrar que el emparejamiento μ_2 es estable en el problema reducido de este ejemplo (F, W, P^φ, q) . Por lo tanto, por el Corolario 1 el emparejamiento μ_2 es también φ -estable, es decir, $\mu_2 \in \mathcal{E}(F, W, P^*, q)$.

4. Agentes Pesimistas

Como describimos anteriormente, la condición de *admisibilidad total* es una situación en la que cada emparejamiento es considerado admisible por cada uno de los agentes. El tipo de *funciones de estimación* compatibles con esta condición parecen ser consistentes con la ausencia de información acerca de las posibles reacciones de otros jugadores, lo que lleva a los agentes a estimar que cualquier emparejamiento debe ser considerado como admisible. Nótese en particular que, en condiciones de *admisibilidad total*, los agentes son pesimistas en el sentido de que consideran admisible el subconjunto de los emparejamientos menos preferidos del mercado. Sasaki y Toda (1996) muestran que este tipo de expectativas pesimistas puede ser crucial para caracterizar la existencia de asignaciones estables en problemas de emparejamiento con externalidades. En particular, estos autores notaron que existen problemas de emparejamiento con externalidades que no tienen asignaciones estables cuando al menos uno de los agentes no es pesimista.

En las secciones anteriores, mostramos que existe al menos un conjunto de *estimaciones* que garantiza la existencia de asignaciones estables bajo el dominio de las preferencias que satisfacen la condición de *sustituibilidad- q inferior*, es decir, en el caso de *admisibilidad total*. Nótese que este tipo de *estimaciones* son determinadas de forma exógena. Sin embargo, en general, ha de notarse que los conjuntos arbitrarios de *estimaciones* pesimistas no garantizan la admisibilidad de aquellos emparejamientos que son candidatos a ser estables, aun cuando

las preferencias son *sustituibles- q inferiores*. Con el fin de relajar la condición de *admisibilidad total*, siguiendo un argumento similar al de Hafalir (2008), proponemos un conjunto de estimaciones que racionalizan las expectativas de los agentes pesimistas. Intuitivamente, en un escenario donde todos los agentes son pesimistas, consideramos que un emparejamiento no puede ser admisible para un agente que sabe que hay una coalición que puede bloquear ese emparejamiento. Cuando todos los agentes siguen este sencillo argumento, es posible caracterizar un conjunto de *estimaciones* que garantiza la admisibilidad de aquellos emparejamientos que serían candidatos a ser estables.

Formalmente, decimos que los agentes son *pesimistas* siempre que el conjunto de *funciones de estimación* φ satisface las siguientes condiciones: 1) Para cada $f \in F$, $\mu_{f,S} \in \varphi_f(S)$ para todo $S \in H_f$ y 2) para cada $w \in W$, $\mu_{w,a} \in \varphi_w(a)$ para todo $a \in F \cup w$. Bajo el supuesto de que los agentes son *pesimistas*, es posible establecer el siguiente resultado.

Proposición 2 *Supongamos que los agentes son pesimistas, entonces cualquier emparejamiento estable del problema reducido, es decir, $\mu \in \mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q)$, no será bloqueado por ninguna coalición o trabajador en el problema de emparejamiento con externalidades (F, W, P^*, q) .*

Como argumentamos anteriormente, la existencia de emparejamientos φ -estables no se deriva del resultado anterior, ya que un conjunto arbitrario de *estimaciones* pesimistas no implica la existencia de emparejamientos que sean admisibles para todos los agentes.

4.1. Funciones de Estimación Pesimistas

Con el fin de racionalizar las *funciones de estimación* de agentes *pesimistas*, consideramos el siguiente argumento intuitivo. Supongamos que la empresa f está planeando emparejarse con un conjunto factible de trabajadores $S \in H_f$. Cuando los agentes son *pesimistas*, el emparejamiento $\mu_{f,S} \in A(f, S)$ es admisible por definición, es decir, $\mu_{f,S} \in \varphi_f(S)$. Sin embargo, esta empresa f no puede considerar admisible cualquier otro emparejamiento $\mu \in A(f, S) \setminus \{\mu_{f,S}\}$ que podría ser bloqueado por alguna coalición, es decir, un emparejamiento

para el cual existe una coalición $\{f', S'\} \subset F \cup W \setminus \{f\}$ tal que $S' \in H_{f'}$, cuyas preferencias satisfacen $\mu_{f', S'} P_{f'}^* \mu$ y $\mu_{w', f'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S'$. Intuitivamente, esta empresa f está en posibilidad de anticipar que el emparejamiento $\mu \in A(f, S)$ será eventualmente bloqueado por la coalición $\{f', S'\}$. Formalmente, el conjunto de *funciones de estimación pesimistas* está caracterizado por las siguientes condiciones.

Definición 9 Un emparejamiento μ es admisible para la empresa f , es decir, $\mu \in \rho_f(\mu(f))$ si no hay ninguna coalición $\{f', S'\} \subset F \cup W \setminus \{f\}$ tal que $S' \in H_{f'}$ que satisfaga:

1. $\mu_{f', S'} P_{f'}^* \mu$ y
2. $\mu_{w', f'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S'$;

y ningún subconjunto de trabajadores $S'' \subset W$ que satisfaga:

1. $\mu_{w', w'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S''$.

De manera similar,

Definición 10 Un emparejamiento μ es admisible para un trabajador w , es decir, $\mu \in \rho_w(\mu(w))$ si no hay ninguna coalición $\{f, S\} \subset F \cup W \setminus \{w\}$ que satisfaga:

1. $\mu_{f, S} P_f^* \mu$ y
2. $\mu_{w, f} P_w^* \mu$ para todo $w \in S$;

y ningún subconjunto de trabajadores $S'' \in W \setminus \{w\}$ tal que:

1. $\mu_{w', w'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S''$.

Sea $\rho = \{(\rho_f(\cdot), \rho_w(\cdot)) : f \in F, w \in W \text{ y } P^*\}$ el conjunto de *funciones de estimación pesimistas*. Nótese que dichas *estimaciones* dependen de las preferencias de los agentes y con ello se racionaliza la conjetura de que todos los agentes son *pesimistas*. En general, este conjunto de *funciones de estimación pesimistas* ρ no satisface la condición de *admisibilidad total*, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Consideremos el problema de emparejamiento con externalidades presentado en el Ejemplo 5. Los conjuntos de emparejamientos factibles menos preferidos de las empresas f_1 y f_2 son:

$$M_{f_1} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_3, \mu_{10}, \mu_9\}$$

$$M_{f_2} = \{\mu_9, \mu_2, \mu_{10}, \mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_{11}\}$$

Consideremos el siguiente conjunto de emparejamientos factibles $A(\{f_1, \{w_1, w_2\}\}) = \{\mu_1, \mu_4\}$. Dado que los agentes son pesimistas, el emparejamiento μ_1 es considerado admisible por la empresa f_1 , es decir, $\mu_1 \in \rho_{f_1}(\{w_1, w_2\})$. Sin embargo, el emparejamiento $\mu_4 = f_1, f_1, w_3$ puede ser bloqueado por la coalición $\{f_2, w_3\} \subset F \cup W \setminus \{f_1\}$, debido a que $\mu_{f_2, \{w_3\}} = \mu_1$ y $\mu_{w_3, \{f_2\}} = \mu_1$ y de acuerdo con las preferencias de f_2 y w_3 se sabe que,

$$1. \mu_1 P_{f_2}^* \mu_4 \text{ y}$$

$$2. \mu_1 P_{w_3}^* \mu_4.$$

Por lo tanto, el emparejamiento μ_4 no puede ser admisible para la empresa f_1 , es decir, $\mu_4 \notin \rho_{f_1}(\{w_1, w_2\})$. De manera similar, consideremos el conjunto de emparejamientos factibles $A(w_1, f_1) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8\}$. Tal como en el caso anterior, dado el supuesto de que los agentes son pesimistas, el emparejamiento μ_4 es admisible para la empresa f_1 , es decir, $\mu_4 \in \rho_{w_1}(f_1)$. Sin embargo, el emparejamiento $\mu_5 = f_1, w_2, w_3$ no puede ser admisible debido a que la coalición $\{f_2, \{w_2, w_3\}\} \subset F \cup W \setminus \{f_2\}$ tiene incentivos para bloquear dicho emparejamiento. Es sencillo mostrar que $\mu_{f_2, \{w_2, w_3\}} = \mu_2$, $\mu_{w_2, \{f_2\}} = \mu_3$ y $\mu_{w_3, \{f_2\}} = \mu_1$. Así, de acuerdo con las preferencias de f_2 , w_2 y w_3 , se satisfacen las siguientes condiciones,

$$1. \mu_2 P_{f_2}^* \mu_5,$$

$$2. \mu_3 P_{w_2}^* \mu_5, \text{ y}$$

$$3. \mu_1 P_{w_3}^* \mu_5.$$

Por lo tanto, $\mu_5 \notin \rho_{w_1}(f_1)$.

El conjunto de funciones de estimación pesimistas de este ejemplo está dado por los siguientes conjuntos de emparejamientos admisibles para cada agente.

Para la empresa f_1 :

$$\begin{aligned}\rho_{f_1}(\{w_1, w_2\}) &= \{\mu_1\}; \\ \rho_{f_1}(\{w_1, w_3\}) &= \{\mu_3\}; \\ \rho_{f_1}(\{w_2, w_3\}) &= \{\mu_{10}\}; \\ \rho_{f_1}(\{w_1\}) &= \{\mu_2, \mu_7\}; \\ \rho_{f_1}(\{w_2\}) &= \{\mu_{11}, \mu_{16}, \mu_{22}\}; \\ \rho_{f_1}(\{w_3\}) &= \{\mu_9, \mu_{15}, \mu_{23}\}; \text{ y} \\ \rho_{f_1}(\phi) &= \{\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{17}, \mu_{19}, \mu_{21}\}.\end{aligned}$$

Para la empresa f_2 :

$$\begin{aligned}\rho_{f_2}(\{w_1, w_2\}) &= \{\mu_9, \mu_{12}\}; \\ \rho_{f_2}(\{w_1, w_3\}) &= \{\mu_{11}\}; \\ \rho_{f_2}(\{w_2, w_3\}) &= \{\mu_2\}; \\ \rho_{f_2}(\{w_1\}) &= \{\mu_{10}, \mu_{15}, \mu_{16}\}; \\ \rho_{f_2}(\{w_2\}) &= \{\mu_3, \mu_8\}; \\ \rho_{f_2}(\{w_3\}) &= \{\mu_1, \mu_7\}; \text{ y} \\ \rho_{f_2}(\phi) &= \{\mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_{18}, \mu_{20}, \mu_{24}\}.\end{aligned}$$

Para el trabajador w_1 :

$$\begin{aligned}\rho_{w_1}(f_1) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_7\}; \\ \rho_{w_1}(f_2) &= \{\mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{15}, \mu_{16}\}; \text{ y} \\ \rho_{w_1}(w_1) &= \{\mu_{19}, \mu_{20}, \mu_{21}, \mu_{22}\}.\end{aligned}$$

Para el trabajador w_2 :

$$\rho_{w_2}(f_1) = \{\mu_1, \mu_{10}, \mu_{16}, \mu_{22}\};$$

$$\begin{aligned}\rho_{w_2}(f_2) &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_8, \mu_{12}\}; \text{ y} \\ \rho_{w_2}(w_2) &= \{\mu_7, \mu_{13}, \mu_{14}\}.\end{aligned}$$

Para el trabajador w_3 :

$$\begin{aligned}\rho_{w_3}(f_1) &= \{\mu_3, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{15}, \mu_{23}\}; \\ \rho_{w_3}(f_2) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_7, \mu_{11}\}; \text{ y} \\ \rho_{w_3}(w_3) &= \{\mu_8, \mu_{12}, \mu_{19}\}.\end{aligned}$$

Nótese que de acuerdo con estas estimaciones ninguno de los siguientes emparejamientos es ρ -admisibles:

$$\{\mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_8, \mu_9, \mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{17}, \mu_{16}, \mu_{18}, \mu_{19}, \mu_{20}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{25}\}.$$

Como se mostró anteriormente en el Ejemplo 5, el emparejamiento $\mu_2 = f_1, f_2, f_2$ debería ser estable en el *problema reducido* (F, W, P^ρ, q) asociado a dicho ejemplo. De acuerdo con la Proposición 2, el emparejamiento $\mu_2 = f_1, f_2, f_2$ no puede ser bloqueado por ningún trabajador o coalición en su correspondiente problema de emparejamiento con externalidades (F, W, P^*, q) , debido a que se supone que todos los agentes son *pesimistas*. Más aún, nótese que el emparejamiento μ_2 es ρ -admisibles, debido a que se satisface $\mu_2 \in \rho_a(\mu_2(a))$ para todo $a \in F \cup W$. Esta última observación implica que el emparejamiento μ_2 es ρ -estable, es decir, $\mu_2 \in \mathcal{E}_\rho(F, W, P^*, q)$. El siguiente resultado muestra que esta característica se sostiene en general. En particular, se muestra que, dado el conjunto de *funciones de estimación pesimistas* ρ , la condición de *sustituibilidad- q inferior* es suficiente para asegurar la existencia de emparejamientos ρ -estables.

Teorema 3 *Dado el conjunto de funciones de estimación pesimistas ρ , si $P^* \in \mathcal{BS}$ entonces el conjunto de emparejamientos ρ -estables, $\mathcal{E}_\rho(F, W, P^*, q)$ es no vacío.*

De acuerdo con el resultado anterior, el conjunto de *funciones de estimación pesimistas* no solo racionaliza el conjunto de emparejamientos que agentes pesimistas considerarían admisibles sino que también garantiza que todo emparejamiento estable del *problema reducido*

sea admisible para todos los agentes. En contraste con el caso de *admisibilidad total*, no se requiere que todos los emparejamientos sean admisibles con el fin de caracterizar la existencia de asignaciones φ -estables. De esta forma, el ejemplo anterior también es suficiente para establecer el siguiente resultado.

Proposición 3 *La condición de admisibilidad total no es ni necesaria ni suficiente para asegurar la existencia de emparejamientos φ -estables en problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades.*

5. El Núcleo en Problemas de Emparejamiento con Externalidades

El núcleo es el conjunto de emparejamientos que no son bloqueados por ninguna coalición (Shapley y Shubik, 1972, Echenique y Oviedo, 2004). Uno de los principales resultados de la literatura es la equivalencia entre el conjunto de emparejamientos estables y el núcleo en problemas de emparejamiento uno-a-uno o problema del matrimonio (Roth y Sotomayor, 1990). Este resultado es importante porque muestra que el análisis de un tipo simple de desviaciones es suficiente para caracterizar la existencia de emparejamientos estables bajo tipos más complejos de desviaciones, como son las desviaciones de coaliciones consideradas en el análisis de la existencia del núcleo. Por lo tanto, esta equivalencia entre ambos conjuntos de emparejamientos resalta la generalidad del conjunto de emparejamientos estables como concepto de solución para este tipo de juegos cooperativos. Sasaki y Toda (1996) introdujeron una noción del núcleo para problemas de emparejamiento uno-a-uno con externalidades. De acuerdo con su noción del núcleo, una vez que se consideran las externalidades, no solo el conjunto de emparejamientos φ -estables y el núcleo no coinciden, sino que también el núcleo podría ser vacío. Este resultado contrasta con el caso del problema del matrimonio estándar donde, como dijimos anteriormente, el núcleo y el conjunto de emparejamientos estables siempre coinciden. En este sentido, otros autores también han analizado la relación entre el núcleo y el conjunto de emparejamientos estables en problemas con externalidades,

alcanzando resultados similares (Ver por ejemplo, Hafalir (2008) y Muncu y Saglam (2010)).

El concepto del núcleo de Sasaki y Toda (1996) puede ser vacío debido a que en general los agentes que se desvían no toman en cuenta el conjunto de emparejamientos que son admisibles. Bajo esta noción del núcleo, los miembros de las coaliciones se desviarían incluso cuando podrían estar en peores condiciones en emparejamientos admisibles después de desviarse. En contraste, en este artículo se propone una noción alternativa del núcleo asumiendo que los agentes siempre consideran sus *funciones de estimación* cuando planean desviarse como miembros de cualquier coalición. Formalmente,

Definición 11 Una coalición $A \subset F \cup W$ bloquea el emparejamiento μ , siempre que exista otro emparejamiento $\hat{\mu} \neq \mu$ tal que:

1. $\hat{\mu}(a) \subset A$ para todo $a \in A$;
2. $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(\hat{\mu}(f))$ y todo $f \in A$; y
3. $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(\hat{\mu}(w))$ y todo $w \in A$.

El núcleo para cualquier conjunto *funciones de estimación* φ , o simplemente el φ -núcleo, es el conjunto de todos los emparejamientos φ -admisibles que no son bloqueados por ninguna coalición $A \subset F \cup W$. Sea $\mathcal{C}_\varphi(F, W, P^*, q)$ el φ -núcleo. El siguiente resultado presenta una propiedad interesante del φ -núcleo.

Teorema 4 Sea (F, W, P^*, q) cualquier problema de emparejamiento con externalidades y sea φ un conjunto de funciones de estimación entonces, $\mathcal{E}_\varphi(F, W, P^*, q) = \mathcal{C}_\varphi(F, W, P^*, q)$.

El resultado anterior tiene algunas implicaciones cruciales sobre la existencia y las propiedades del núcleo en problemas de emparejamiento con externalidades. En primer lugar, es claro que todos los resultados de existencia y las propiedades del conjunto de emparejamientos φ -estables se extienden naturalmente al φ -núcleo. En segundo lugar, la equivalencia entre el conjunto de emparejamientos φ -estables y el φ -núcleo no depende del conjunto de *funciones de estimación*.

6. Conclusiones

En este artículo analizamos la existencia de asignaciones estables en problemas de emparejamiento muchos-a-uno con externalidades. Argumentamos que los resultados estándar acerca de la existencia de emparejamientos estables no pueden extenderse trivialmente a este escenario. Primero, las preferencias de los agentes deben definirse sobre el conjunto de todos los emparejamientos factibles del problema, en lugar del conjunto de agentes en el lado opuesto del mercado. Segundo, una vez consideradas las externalidades, los agentes deben anticipar la reacción del resto de agentes ante posibles desviaciones.

En este contexto, extendemos la noción de estabilidad propuesta por Sasaki y Toda (1996) con base en el concepto de *funciones de estimación*. El conjunto de *funciones de estimación* representa una creencia sobre el conjunto de emparejamientos que los agentes consideran admisibles dada una conjetura sobre el comportamiento reactivo de los agentes. En general, el conjunto de *funciones de estimación* no se define de una única forma y puede determinarse de forma exógena o endógena.

Demostramos que en problemas de emparejamiento muchos-a-uno, es posible que no existan emparejamientos φ -estables. Además, es posible encontrar algunos problemas sin emparejamientos estables para cualquier conjunto de *estimaciones* dado. Este teorema de imposibilidad contrasta con resultados previos en problemas de emparejamiento uno-a-uno con externalidades, donde existe al menos un conjunto de estimaciones que asegura la existencia de emparejamientos φ -estables. Dado este resultado de imposibilidad, nos centramos en el caso particular de la *admisibilidad total*. En este caso, proporcionamos una restricción sobre las preferencias de las empresas denominada *sustituibilidad- q inferior* que garantiza la existencia de al menos un emparejamiento φ -estable.

Bajo el supuesto de que los agentes son *pesimistas*, es posible construir un conjunto de *funciones de estimación pesimistas* que racionalizan las *estimaciones* de agentes *pesimistas*. El conjunto de estimaciones pesimistas depende de las preferencias de los agentes y garantiza la existencia de emparejamientos φ -estables, siempre que las preferencias satisfagan la condición de *sustituibilidad- q inferior*. Además, nuestros resultados muestran también que el

supuesto de *admisibilidad total* no es una condición ni necesaria ni suficiente para la existencia de emparejamientos φ -estables.

Finalmente, analizamos la relación entre una noción que proponemos de núcleo y el conjunto de emparejamientos φ -estables en problemas con externalidades. El concepto del núcleo analizado en la literatura previa puede ser vacío para algunos casos del problema de emparejamiento con las externalidades. Por ello, proponemos una noción alternativa del núcleo que depende de las *funciones de estimación* de los agentes llamada φ -núcleo. Mostramos que el conjunto de emparejamientos φ -estables y el φ -núcleo siempre coinciden para cualquier conjunto de *estimaciones*. Finalmente, nótese que todos los resultados presentados en este documento se extienden naturalmente al problema de emparejamiento uno-a-uno con externalidades, ya que este último es un caso particular del problema de emparejamiento de muchos-a-uno con externalidades.

Referencias

- [1] Azrieli, Y. (2009) “On pure conjectural equilibrium with non-manipulable information” *International Journal of Game Theory* **38**, 209-219.
- [2] Bando, K. (2010) “Many-to-one matching markets with externalities of firms” Working paper, 1-26.
- [3] Cantala, D. (2004) “Restabilizing matching markets at senior level” *Games and Economic Behavior* **48**, 1-17.
- [4] Dutta, B. y Masso, J. (1997) “Stability of marriage when individuals have preferences over colleagues” *Journal of Economic Theory* **75**, 464-475.
- [5] Echenique, F. y Oviedo, J. (2004) “Core many-to-one matchings by fixed-point methods” *Journal of Economic Theory* **115**, 358-376.
- [6] Echenique, F. y Yenmez, M. B. (2007) “A solution to matching with preferences over colleagues” *Games and Economic Behavior* **59**, 46-71.

- [7] Gale, D. y Shapley, L. (1962) "College admission and the stability of marriage" *American Mathematical Monthly* **69**, 9-15.
- [8] Hafalir, I. E. (2008) "Stability of marriage with externalities" *International Journal of Game Theory* **37**, 353-369.
- [9] Kelso, A. y Crawford, V. (1982) "Job matching, coalition formation and gross substitutes" *Econometrica* **50**, No. 6, 1483-1504.
- [10] Klaus, B. y Klijn, F. (2005) "Stable matchings and preferences of couples" *Journal of Economic Theory* **121**, 75-106.
- [11] Kurucu, G. (2007) "Negative network externalities in two-sided markets: a competition approach" MPRA Paper No. **9746**, 1-24.
- [12] Li, S. (1993) "Competitive matching equilibrium and multiple principal-agent models" Mimeo, University of Minnesota.
- [13] Mumcu, A. y Saglam, I. (2006) "One to one matching with interdependent preferences" MPRA Paper No. **1908**, 1-28.
- [14] Mumcu, A. y Saglam, I. (2007) "The core of housing market with externalities" *Economics Bulletin*, vol. 3, No. **55**, 1-5.
- [15] Mumcu, A. y Saglam, I. (2010) "Stable one-to-one matchings with externalities" *Mathematical Social Sciences* **60**, 154-159.
- [16] Roth, A.E. y Sotomayor, M. (1990) "Two sided matching: A study in game theoretic modeling and analysis" Cambridge University Press, 1-265.
- [17] Roy, P. (2004) "Marriage markets with externalities" Indian Statistical Institute, Delhi, 1-9.
- [18] Rubinstein, A. y Wolinsky, A. (1994) "Rationalizable conjectural equilibrium: Between Nash and rationalizability" *Games and Economic Behavior* **6**, 299-311.

- [19] Sasaki, H. y Toda, M. (1996) “Two sided matching problems with externalities” *Journal of Economic Theory* **70**, 93-108.
- [20] Shapley, L. y Shubik, M. (1969) “On the core of an economic system with externalities” *The American Economic Review* **59**, 678-684.
- [21] Shapley, L. y Shubik, M. (1972) “The assignment game I: The core” *International Journal of Game Theory* **1**, 111-130.

7. Apéndice: Pruebas

Prueba del Lema 1:

Prueba. Supongamos que $\mathcal{E}(F, W, P^*, q) = \emptyset$ mientras que $\mathcal{E}_{\varphi^*}(F, W, P^*, q) \neq \emptyset$ para un conjunto arbitrario de estimaciones φ^* . Consideremos cualquier emparejamiento tal que $\mu \in \mathcal{E}_{\varphi^*}(F, W, P^*, q)$, este emparejamiento es φ^* -admisibile y no es bloqueado por ningún trabajador o coalición dado el conjunto φ^* . Debido a que $\mathcal{E}(F, W, P^*, q) = \emptyset$, tenemos dos casos relevantes bajo la condición de *admisibilidad total*:

Caso 1: El emparejamiento μ es bloqueado por al menos una coalición $\{f, S\}$ tal que $S \in H_f$. Entonces, se satisface 1. $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in A(f, S)$ y 2. $\mu'' P_w^* \mu$ para cada $\mu'' \in A(w, f)$ para todo $w \in S$. Por definición, $\varphi_f^*(S) \subset A(f, S)$ y $\varphi_w^*(f) \subset A(w, f)$ para todo f y w en $F \cup W$. Entonces, es claro que a) $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f^*(S)$ y b) $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w^*(f)$ y todo $w \in S$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: El emparejamiento μ es bloqueado por algún trabajador $w \in W$. Entonces $\mu(w) \neq w$ y $\mu' P_w^* \mu$ para todo $\mu' \in A(w, w)$, esto implica que $\mu' P_w^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_w^*(w)$, lo cual es una contradicción. Esto completa la prueba. ■

Prueba de la Proposición 1:

Prueba. Supongamos que el emparejamiento μ es bloqueado por alguna coalición $\{f, S\}$ tal que $S \in H_f$ en el problema (F, W, P^*, q) , pero estable en el problema reducido, es decir,

$\mu \in \mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q)$. Si $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(S)$ implica que $\mu_f^S P_f^* \mu$, dado que $\mu \in \varphi_a(\mu(a))$ para todo $a \in F \cup W$. Sabemos que $\mu R_f^* \mu_f^{\mu(f)}$; entonces $\mu_f^S P_f^* \mu_f^{\mu(f)}$, lo cual implica que $S P_f^\varphi \mu(f)$. Supongamos que hay algún trabajador tal que $w \in \mu(f) \cap S$, esto implica que $\mu(w) = \{f\}$ y como un supuesto se sabe que $\mu \in \varphi_w(\mu(w))$. Debido a que μ es bloqueado por $\{f, S\}$, sabemos que $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_{w'}(f)$ y todo $w' \in S$. Es imposible que $\mu \in \varphi_w(f)$, entonces $\mu(f) \cap S = \emptyset$. Si $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(f)$ implica que $\mu_w^f P_w^* \mu$, dado que $\mu \in \varphi_a(\mu(a))$ para todo $a \in F \cup W$. Sabemos también que $\mu R_w^* \mu_w^{\mu(w)}$, entonces $\mu_w^f P_w^* \mu_w^{\mu(w)}$ lo cual implica que $f P_w^\varphi \mu(w)$ para todo $w \in S$. Estas condiciones implican que $\mu(f) \neq S$, a) $S P_f^\varphi \mu(f)$ y b) $f P_w^\varphi \mu(w)$ para todo $w \in S$, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que μ es bloqueado por un trabajador $w \in W$. En este caso, tenemos que $\mu(w) \neq w$ y $\mu' P_w^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_w(w)$. Por un argumento similar, como antes esto implica que $\mu_w^w P_w^* \mu_w^{\mu(w)}$; por lo tanto $w P_w^\varphi \mu(w)$, lo cual es una contradicción.

Debido a que el emparejamiento $\mu \in \mathcal{E}(F, W, P^\varphi, q)$ es φ -admisibles y no es bloqueado por ningún trabajador ni coalición, sabemos que μ es φ -estable. Esto completa la prueba. ■

Prueba del Teorema 2:

Prueba. Supongamos que se sostiene la condición de *admisibilidad total*. Para cada empresa $f \in F$, se define su función de elección como el mapeo $Ch_f(S) = \mu(f)$ tal que $\Upsilon_f(S) = \mu$ para cualquier subconjunto $S \subset W$. Primero, debemos mostrar que para cada $f \in F$ y cualquier subconjunto $S \subset W$ la función de elección Ch_f mapea el mejor subconjunto de trabajadores en S de acuerdo con la relación de preferencias P_f^φ . Sabemos que para cualquier subconjunto $S \subset W$, se satisface que $\Upsilon_f(S) \in M_f$ y $\Upsilon_f(S) R_f^* \mu'$ para todo $\mu' \in \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f$, entonces por definición $\mu(f) \subset S$ siempre que $\Upsilon_f(S) = \mu$. Supongamos que hay algún subconjunto de trabajadores $S' \subset S$, tal que $S' P_f^\varphi \mu(f)$ para $\Upsilon_f(S) = \mu$. Entonces, la relación de preferencias $S' P_f^\varphi \mu(f)$ implica que $\mu_f^{S'} P_f^* \mu_f^{\mu(f)}$. Debido a la condición de *admisibilidad total* se sabe que $\Upsilon_f(S) = \mu = \mu_f^{\mu(f)}$, debido a que $\mu_f^{S'} = \mu_{f, S'} \in \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) \subset S\} \cap M_f$, lo cual es una contradicción. Entonces, $\mu(f) R_f^\varphi S'$ para todo $S' \subset S$ donde $\Upsilon_f(S) = \mu$. Esto último implica que el mapeo $Ch_f(S) = \mu(f)$ tal que $\Upsilon_f(S) = \mu$ para cualquier $S \subset W$ es una función de elección bien

definida para cada empresa f .

Ahora mostramos que el perfil de preferencias P^φ satisface la condición de *sustituibilidad- q* . Supongamos que tenemos dos trabajadores distintos $w, w' \in S$ tal que $w \in \mu(f)$ donde $\Upsilon_f(S) = \mu$, esto implica que $w \in Ch_f(S)$. Por la condición de *sustituibilidad- q inferior*, sabemos que $w \in \mu'(f)$ donde $\Upsilon_f(S \setminus \{w'\}) = \mu'$, esto implica que $w \in Ch_f(S \setminus \{w'\})$, entonces el perfil de preferencias P^φ satisface la condición de *sustituibilidad- q* . Por lo tanto, el *problema reducido* (F, W, P^φ, q) tiene al menos un emparejamiento estable. Debido a que por la condición de *admisibilidad total* cualquier emparejamiento factible es también φ -admisble, entonces el conjunto $\mathcal{E}(F, W, P^*, q)$ es no vacío. Esto completa la prueba. ■

Prueba de la Proposición 2:

Prueba. Supongamos que μ es estable en el *problema reducido* (F, W, P^φ, q) pero bloqueado por alguna coalición $\{f, S\}$ tal que $S \in H_f$ en el problema original (F, W, P^*, q) . Entonces, $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(S)$ implica que $\mu_f^S P_f^* \mu$ mientras que $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(f)$, lo cual implica que $\mu_w^f P_w^* \mu$. Como un supuesto se sabe que $\mu_{f, \mu(f)} = \mu_f^{\mu(f)} \in \varphi_f(\mu(f))$ y $\mu_{w, \mu(w)} = \mu_w^{\mu(w)} \in \varphi_w(\mu(w))$. Entonces, $\mu R_f^* \mu_f^{\mu(f)}$ y $\mu R_w^* \mu_w^{\mu(w)}$ aun si el emparejamiento μ no es φ -admisble. Por lo tanto, $\mu_f^S P_f^* \mu_f^{\mu(f)}$ y $\mu_w^f P_w^* \mu_w^{\mu(w)}$ para todo $w \in S$, lo cual implica que a) $S P_f^\varphi \mu(f)$ y b) $f P_w^\varphi \mu(w)$ para todo $w \in S$, lo que es una contradicción.

Ahora supongamos que μ es bloqueado por un trabajador $w \in W$. De manera similar al argumento anterior, tenemos que $\mu(w) \neq w$ y $\mu' P_w^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_w(w)$ lo que implica que $\mu_w^w P_w^* \mu_w^{\mu(w)}$. Entonces, se deduce que $w P_w^\varphi \mu(w)$, lo que es una contradicción. Esto completa la prueba. ■

Prueba del Teorema 3:

Prueba. Sea (F, W, P^ρ, q) el *problema reducido* asociado al problema (F, W, P^*, q) . Por la condición de *sustituibilidad- q inferior*, sabemos que existe al menos un emparejamiento estable en el *problema reducido*, por ejemplo $\mu^* \in \mathcal{E}(F, W, P^\rho, q)$.

Tenemos que mostrar que el emparejamiento μ^* es ρ -admisble. Supongamos como una contradicción que no es así, es decir, $\mu^* \notin \rho_f(\mu^*(f))$ para alguna empresa $f \in F$. Hay dos

casos:

Caso 1: Existe una coalición $\{f', S'\} \subset F \cup W \setminus \{f\}$ tal que $S' \in H_{f'}$, $\mu_{f', S'} P_{f'}^* \mu$ y $\mu_{w', f'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S'$. Dado que los agentes son pesimistas, sabemos que $\mu_{f', S'} = \mu_{f'}^{S'} \in \rho_{f'}(S')$ y $\mu_{w', f'} = \mu_{w'}^{f'} \in \rho_{w'}(f')$, por lo tanto $\mu_{f'}^{S'} P_{f'}^* \mu_{f'}^{\mu^*(f')}$ y $\mu_{w'}^{f'} P_{w'}^* \mu_{w'}^{\mu^*(w')}$ para todo $w' \in S'$. Esto implica que $S' P_{f'}^* \mu^*(f')$ y $f' R_{w'}^* \mu^*(w')$ para todo $w' \in S'$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Existe un subconjunto de trabajadores $S'' \subset W$ tal que $\mu_{w', w'} P_{w'}^* \mu$ para todo $w' \in S''$. De manera similar al caso anterior, sabemos que $\mu_{w', w'} = \mu_{w'}^{w'} \in \rho_{w'}(w')$. Entonces, $\mu_{w'}^{w'} P_{w'}^* \mu_{w'}^{\mu^*(w')}$ lo que implica que $w' P_{w'}^* \mu^*(w')$ para todo $w' \in S''$, lo cual es una contradicción.

Dado que la empresa f es escogida arbitrariamente, sabemos que $\mu^* \in \rho_f(\mu^*(f))$ para todo $f \in F$. Un argumento similar aplica para el caso de los trabajadores. Por lo tanto, el emparejamiento μ^* es ρ -admisble, es decir, $\mu^* \in \rho_a(\mu^*(a))$ para todo $a \in F \cup W$. Lo anterior implica que dicho emparejamiento μ^* también es ρ -estable. Esto completa la prueba. ■

Prueba del Teorema 4:

Prueba. Supongamos que el emparejamiento satisface $\mu \in \mathcal{E}_\varphi(F, W, P^*, q)$ pero no $\mu \notin \mathcal{C}_\varphi(F, W, P^*, q)$, Entonces debe existir otro emparejamiento distinto $\hat{\mu} \neq \mu$ y una coalición $A \subset F \cup W$ que bloquean μ . Tomemos cualquier empresa $f \in A$ y un subconjunto de trabajadores tal que $\hat{\mu}(f) \subset A$, obviamente se sabe que $\hat{\mu}(w) = \{f\} \subset A$ para todo $w \in \hat{\mu}(f)$. Así, se sabe que: 1) $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(\hat{\mu}(f))$ y 2) $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(f)$ y todo $w \in \hat{\mu}(f)$. Por lo tanto, la coalición $\{f, \hat{\mu}(f)\}$ bloquea el emparejamiento μ . Si no hay ninguna empresa en la coalición A , tomamos cualquier trabajador $w \in A$, obviamente $\hat{\mu}(w) = \{w\} \subset A$ y, se sabe que: 1) $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(w)$. Entonces, cualquier trabajador $w \in A$ bloquea el emparejamiento μ , lo cual es una contradicción.

Por su parte, supongamos que $\mu \in \mathcal{C}_\varphi(F, W, P^*, q)$ pero $\mu \notin \mathcal{E}_\varphi(F, W, P^*, q)$, entonces existe al menos una coalición, $\{f, S\}$, o un trabajador, $w \in W$, que bloquean el emparejamiento μ . Fijemos el emparejamiento $\hat{\mu}$, tal que $\hat{\mu}(f) = S$, obviamente $\hat{\mu} \neq \mu$, y $A = \{f, S\}$. Por definición, se sabe que: 1) $\mu' P_f^* \mu$ para todo $\mu' \in \varphi_f(\hat{\mu}(f))$ y todo $f \in A$ y 2) $\mu'' P_w^* \mu$

para todo $\mu'' \in \varphi_w(\hat{\mu}(w))$ y todo $w \in A$, entonces $\mu \notin \mathcal{C}_\varphi(F, W, P^*, q)$. Ahora supongamos que un trabajador bloquea el emparejamiento μ , definamos $A = \{w\}$ y $\hat{\mu}(w) = w$, obviamente $\hat{\mu} \neq \mu$ y además se sabe que: 1) $\mu'' P_w^* \mu$ para todo $\mu'' \in \varphi_w(\hat{\mu}(w))$ y todo $w \in A$, lo cual es una contradicción. Esto completa la prueba. ■