Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2019-03

Estática Comparativa Bayesiana

René Leal Vizcaíno
Banco de México

Teddy Mekonnen
Caltech

Marzo 2019

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Bayesian Comparative Statics*

René Leal Vizcaíno[†]
Banco de México

Teddy Mekonnen[‡]
Caltech

Abstract: We study how information affects equilibria and welfare in games. For an agent, more precise information about an unknown state of the world leads to a mean-preserving spread of beliefs. We provide necessary and sufficient conditions to obtain either a non-increasing mean or a non-decreasing-mean spread of actions whenever information precision increases for at least one agent. We apply our Bayesian comparative statics framework to study informational externalities in strategic environments. In persuasion games, we derive sufficient conditions that lead to extremal disclosure of information. In oligopolistic markets, we characterize the incentives of firms to share information. In macroeconomic models, we show that information not only drives the amplitude of business cycles but also affects aggregate output.

Keywords: Comparative Statics, Information Acquisition, Information Orders, Persuasion, Value of Information, Supermodular Games.

JEL Classification: C44, C61, D42, D81

Resumen: Estudiamos cómo la información afecta el equilibrio y el bienestar en entornos estratégicos. Para un agente, información más precisa sobre un estado desconocido del mundo conduce a una dispersión de sus creencias que conserva la media. Proporcionamos condiciones necesarias y suficientes para obtener una mayor dispersión de sus acciones en equilibrio, ya sea con una media mayor o menor, cuando la información de al menos un agente en el juego aumenta. Aplicamos nuestro método de estática comparativa bayesiana para estudiar externalidades informativas en entornos estratégicos. En juegos de persuasión, obtenemos condiciones suficientes que conducen a la divulgación extrema de información. En mercados oligopolísticos, caracterizamos los incentivos de las empresas para compartir información. En modelos macroeconómicos, mostramos que la información no solo impacta la amplitud de los ciclos económicos, sino que también afecta el nivel de producción agregada.

Palabras Clave: Estática Comparativa, Adquisición de Información, Órdenes de Información, Persuasión, Valor de la Información, Juegos Supermodulares.

*We are indebted to our advisors Jeff Ely, Eddie Dekel, Alessandro Pavan, Bruno Strulovici, and Asher Wolinsky for their constant guidance and encouragement. For very useful comments, we thank Laura Doval, Jay Lu, Ryota Iijima, Ilya Segal, Gabriel Carroll, Harry Di Pei, Federico Echenique, Rob Porter, Phil Reny, Jean Tirole, and seminar participants at 2017 Los Angeles Economic Theory Conference, ITAM First Alumni Conference, Northwestern theory bag lunch and Caltech SISL.

[†] Dirección General de Investigación Económica, Banco de México. Email: rlealv@banxico.org.mx.

[‡] Social Sciences. Email: mekonnen@caltech.edu.

1 Introducción

La estática comparativa, en especial sobre el bienestar social, con respecto a la calidad de información pública o privada ha sido de interés económico por mucho tiempo. Por ejemplo, la información privada podría ser perjudicial para los agentes en una economía de intercambio (Hirshleifer, 1971) o los jugadores en un juego con información imperfecta (Kamien et al., 1990) pero nunca para un solo tomador de decisiones bayesiano (Blackwell, 1951, 1953). En la teoría de las subastas, Milgrom y Weber (1982) encuentran que generar información pública más precisa sobre el valor de algún objeto siempre incrementa los ingresos del vendedor sin afectar la eficiencia, mientras que en el contexto de una economía Keynesiana, Morris y Shin (2002) encuentran que emitir una señal pública puede tener un efecto negativo en el bienestar.

Recientemente, el efecto de la información en el bienestar ha sido estudiado en juegos bayesianos a través del concepto clave de *externalidades informativas* (Angeletos y Pavan, 2007). Estas externalidades se caracterizan primero analizando cómo la información afecta las acciones en equilibrio y luego comparando las acciones y los pagos del equilibrio del juego a los resultados eficientes que resultarían de un planeador central coordinando a los jugadores.

De manera interesante, el problema de cómo la información afecta las acciones en juegos de información imperfecta solo ha sido parcialmente estudiado en situaciones donde las soluciones cerradas a las acciones en equilibrio pueden ser calculadas explícitamente, específicamente, en juegos cuadráticos con información gaussiana, de manera que las mejores respuestas son funciones lineales del estado y las acciones de otros jugadores¹.

En este artículo, estudiamos cómo los cambios en la calidad de la información privada afectan las acciones en equilibrio en los juegos bayesianos y en los problemas de decisión. Consideramos una clase general de pagos y estructuras de información que incluye los ya conocidos juegos lineales-cuadráticos con señales gaussianas. Nuestra estática comparativa es una herramienta útil para entender cómo la calidad de la información acerca de fundamentos económicos (ej. parámetros de la demanda en competencia oligopólica o los parámetros de productividad en modelos macroeconómicos) afecta a los resultados económicos (ej. la dispersión de precios de oligopolios o la volatilidad de la inversión y la producción agregada). Desde una perspectiva normativa, esta

¹Para una referencia que resume lo más reciente en estos juegos ver Pavan y Vives (2015) y sus fuentes.

estática comparativa es también un paso intermedio útil para caracterizar externalidades informativas e investigar los efectos de la información sobre el bienestar más allá de juegos lineal cuadráticos gaussianos.

Nuestra teoría de *estática comparativa bayesiana* se compone de tres ingredientes clave: un orden estocástico de acciones en equilibrio (llámese orden 1), un orden de información (llámese orden 2) y una clase de funciones de utilidad. Nuestro resultado principal muestra una dualidad entre el orden de las acciones y la información: primero, si una señal A es más precisa que la señal B de acuerdo al orden 2, entonces para cualquier preferencia en la clase de funciones de utilidad, A induce acciones en equilibrio que son más dispersas de acuerdo al orden 1 que las de B . Segundo, si la señal A induce acciones en equilibrio más dispersas que la señal B para todas las preferencias en la clase de funciones de utilidad entonces A es necesariamente más precisa que B de acuerdo al orden 2.

Mostraremos la utilidad de nuestro enfoque a través de varios ejemplos y aplicaciones. En juegos de persuasión, caracterizamos los niveles mínimos y máximos de conflicto entre un emisor y un receptor, condiciones bajo las cuales la divulgación extrema de información es óptima (ya sea divulgación total o nula de información). También contribuimos a la literatura de organización industrial sobre el intercambio de información en oligopolios hacia entornos que no sean lineal cuadráticos.² En modelos macroeconómicos mostramos cómo la precisión de la información afecta la amplitud del ciclo económico y enfatizamos que el efecto de la información en la producción agregada esperada es importante para estudiar el bienestar.

En una aplicación novedosa, comparamos la demanda de información en dos juegos de adquisición de información: uno en el que la adquisición de información es una acción encubierta y otro en el que es pública. Aplicamos nuestra teoría de estática comparativa bayesiana para brindar una taxonomía de la demanda de información en estos juegos³ y analizamos el rol de la adquisición de información como una barrera de entrada en competencia oligopólica.

Lo que resta de este artículo se estructura de la siguiente manera. En la Sección 2, consideramos un ejemplo de un monopolio con un parámetro de costo desconocido para

²Ver por ejemplo: Raith (1996), Angeletos y Pavan (2007), Bergemann y Morris (2013), Myatt y Wallace (2015).

³La taxonomía de adquisición de información abierta contra encubierta también está ligada al trabajo seminal de Fudenberg y Tirole (1984) y Bulow et al. (1985) en la capacidad de inversión en el contexto de entrada, ajuste y salida de mercados oligopólicos.

motivar nuestra pregunta de estática comparativa e ilustrar nuestro enfoque normativo y positivo de la información. También comentamos más exhaustivamente la teoría de estática comparativa bayesiana y la relacionamos a la literatura. En la Sección 3, presentamos el problema de un solo agente y mostramos las condiciones suficientes y necesarias para que un agente se vuelva más responsivo ante incrementos en la calidad de la información. Extendemos el análisis a los juegos bayesianos con complementariedades estratégicas en la Sección 4. En la Sección 5, presentamos nuestras 4 aplicaciones principales. La Sección 6 concluye. Las demostraciones para la Sección 3 se encuentran en el Apéndice A. Todas las demás demostraciones que no están en el texto principal se encuentran en el Apéndice B.

2 Antecedentes

2.1 Un Ejemplo Simple

Un monopolista se enfrenta una curva inversa de demanda $P(q) = 1 - q$ y una función de costos $c(\theta, q) = (1 - \theta)(q + aq^2/2) + q^2/2$, donde $q \in [0, 1]$ es la cantidad producida. Tanto θ como a son parámetros de costos; θ es una variable aleatoria desconocida que se distribuye uniforme en el intervalo unitario, mientras que $a > -1$ es una constante.

La incertidumbre acerca de θ captura la incertidumbre del monopolista sobre su costo marginal. Una θ mayor está asociada con un intercepto menor para la curva de costo marginal. El parámetro a captura incertidumbre adicional sobre la pendiente de la curva de costo marginal: cuando $a = 0$, no hay incertidumbre adicional sobre la pendiente. Cuando $a > 0$, una mayor θ se asocia con una curva de costo marginal más plana y ocurre lo opuesto para $a < 0$.

El monopolista observa una señal $\tilde{s}^\rho$ cuya realización s es congruente con el parámetros del costo ($s = \theta$) con probabilidad $\rho \in [0, 1]$ y con probabilidad $1 - \rho$ la realización de la señal s se obtiene de manera uniforme e independiente del intervalo unitario. La calidad de la señal es creciente en ρ : la señal es no informativa cuando $\rho = 0$ y revela el estado completamente cuando $\rho = 1$.

¿Cómo afecta la calidad de información ρ al excedente del consumidor? La calidad de la señal afecta la decisión de producción del monopolista que a su vez afecta el bienestar del consumidor. Así, en orden para identificar los efectos en el bienestar, primero debemos contestar: *¿cómo afecta la calidad de la información ρ a la decisión*

de producción del monopolista?

Desde una perspectiva interim, un monopolista que observa la realización de una señal s cuando la calidad de la señal es ρ produce óptimamente:

$$q^M(s; \rho, a) = \frac{\rho s + (1 - \rho)\mathbb{E}[\theta]}{3 + a(1 - \rho s - (1 - \rho)\mathbb{E}[\theta])}.$$

Dado que q^M depende de la realización de la señal s , desde una perspectiva ex-ante, la cantidad óptima es una variable aleatoria con distribución $H(q; \rho, a) = \mathbb{P}(s : q^M(s; \rho, a) \leq q)$ - la probabilidad de que el monopolista produzca a lo más q unidades de producción dada la calidad de su señal ρ . El objetivo de este artículo es explicar cómo $H(\cdot; \rho, a)$ cambia cuando la calidad de la información ρ aumenta.

Consideramos el caso en el que $a = 0$ lo cual simplifica la decisión de producción del monopolista a:

$$q^M(s; \rho, 0) = \underbrace{\frac{\mathbb{E}[\theta]}{3}}_{\text{based on prior}} + \rho \underbrace{\left(\frac{s - \mathbb{E}[\theta]}{3} \right)}_{\text{update based on signal}}.$$

En la Figura 1a, graficamos $q^M(\cdot; \cdot; 0)$ para dos calidades de señal distintas, ρ' y $\rho'' > \rho'$. La rotación de la línea sólida, $q^M(\cdot; \rho', 0)$, con respecto a la línea punteada, $q^M(\cdot; \rho'', 0)$, captura las decisiones de producción más dispersas cuando la calidad de la señal incrementa de ρ' a ρ'' . Intuitivamente, el monopolista produce más cuando las buenas noticias ($s > \mathbb{E}[\theta]$) vienen de ρ'' que cuando vienen de ρ' . Esto se debe a que las buenas noticias de ρ'' son una evidencia más fuerte de valores más altos de θ (costos menores) que buenas noticias de ρ' . Simétricamente, el monopolista produce menos cuando las malas noticias ($s < \mathbb{E}[\theta]$) vienen de ρ'' que cuando vienen de ρ' . La rotación de $q^M(\cdot; \cdot; 0)$ induce dispersión de la distribución $H(\cdot; \cdot; 0)$ que conserva la media, como muestra la función de densidad h en la Figura 1b.

Cabe señalar que el excedente del consumidor es una función convexa de producción $CS(q) = \frac{1}{2}q^2$, lo cual implica que los consumidores se benefician de la conservación de la media, i.e.,

$$\int CS(q) dH(q; \rho'', 0) > \int CS(q) dH(q; \rho', 0)$$

para cualquier $\rho'' > \rho'$. Así, para $a = 0$, tenemos una respuesta a nuestras preguntas normativas y positivas:

Fig. 1: Calidad de la información del Monopolista y cantidad producida

Afirmación 1 *En un monopolio con demanda lineal y costos cuadráticos e incertidumbre solamente acerca del intercepto del costo marginal ($a = 0$), un incremento en la calidad de la señal induce una dispersión de la distribución que conserva la media de las cantidades que a cambio incrementa el bienestar del consumidor esperado. En otras palabras, el valor social de la información excede el valor privado de la información del monopolista.*

Para el caso en el que $a \neq 0$, el costo deja de ser un polinomio cuadrático en (θ, a) . Más adelante mostramos (ver Ejemplo 1 y Sección 5.1) que un incremento en la calidad de la señal conduce a una ampliación en la dispersión de las acciones que no reduce la media cuando $a > 0$ y una ampliación en la dispersión de las acciones que no incrementa la media cuando $a < 0$. Además, el resultado donde el valor social de la información excede al valor privado de la información del monopolista se mantiene cuando $a > 0$, mientras que el resultado es ambiguo para $a < 0$.

Estos resultados positivos y normativos, sin embargo, hacen un uso importante de la solución cerrada de $q^M(\cdot; \rho, a)$, la cual depende de la forma funcional de los pagos y que la señal sea verdad o ruido.

Este artículo desarrolla las herramientas para que se puedan atender dichas preguntas positivas y normativas para una clase general de funciones de utilidad y estructuras de información (señales). Repasamos el problema del monopolio en la Sección 5.1 para caracterizar los entornos donde un impuesto Pigouviano a la información es deseable en un mercado monopolístico.

Ahora procedemos a brindar una descripción detallada del artículo.

2.2 Teoría de Estática Comparativa Bayesiana

Primero analizamos el caso de un problema de decisión bayesiano con un agente y caracterizamos cómo la calidad de la señal del agente afecta la distribución inducida de su acción óptima. Consideramos una situación donde el agente tiene una función de utilidad supermodular—el agente prefiere llevar a cabo acciones superiores para estados del mundo superiores.

Hay tres ingredientes principales para el resultado de estática comparativa: un orden sobre las distribuciones de acciones óptimas que captura cambios en la media y la dispersión, un orden sobre las estructuras de información que captura la calidad y una clase de funciones de utilidad que dirige a una dualidad entre los dos órdenes.

Una estructura de información ρ induce una distribución de acciones óptimas $H(\rho)$. Para dos estructuras de información ρ'' y ρ' , se dice que el agente es más sensible con una media mayor bajo ρ'' que bajo ρ' si $H(\rho'')$ domina a $H(\rho')$ en el orden convexo creciente. Alternativamente, decimos que el agente es más sensible con una media menor bajo ρ'' que bajo ρ' si $H(\rho')$ domina a $H(\rho'')$ en el orden convexo decreciente.

Para comparar la calidad de la información, primero prestamos atención a las estructuras de información en las que realizaciones mayores de señales dirigen hacia movimientos estocásticos de primer orden en creencias posteriores. Para dos estructuras de información ρ'' y ρ' , decimos que ρ'' domina a ρ' en el orden estocástico supermodular si, a un nivel intuitivo, las señales de ρ'' están más correlacionadas con el estado del mundo que las señales de ρ' .

Nuestro resultado principal muestra que un agente cuya función de utilidad marginal es supermodular y convexa (en acciones) es más sensible con una media mayor bajo ρ'' que bajo ρ' si ρ'' domina a ρ' en el orden estocástico supermodular. Además, mostramos que si todos los agentes con utilidad marginal supermodular y convexa es más sensible con una media mayor bajo ρ'' que bajo ρ' , entonces ρ'' necesariamente domina a ρ' en el orden estocástico supermodular.

También presentamos resultados simétricos asociando sensibilidad con una media menor con preferencias con una utilidad marginal submodular y cóncava. Además, mostramos un ejemplo en el que una calidad de información mayor no dirige a una distribución de acciones más dispersa cuando las condiciones de la función de utilidad

marginal del agente no se cumplen.

Después extendemos nuestra estática comparativa a juegos bayesianos con complementariedades estratégicas. Los jugadores reciben señales privadas de calidad variable acerca del estado del mundo subyacente antes de jugar. Similar al caso de un agente, bajo condiciones de supermodularidad y convexidad (submodularidad y concavidad) en las utilidades marginales de los jugadores, mostramos que una calidad de información mayor para cualquiera de los jugadores hace a todos los jugadores más sensibles con una media mayor (menor), es decir, una distribución más dispersa de acciones en equilibrio de Nash bayesiano junto con un incremento (decremento) en la media de acciones en equilibrio para todos los jugadores.

Nuestro análisis señala una interacción más intrincada entre una estrategia de equilibrio de un jugador y la calidad de la información que ha sido estudiada previamente. Primero, generalizamos la observación hecha para los juegos lineales cuadráticos: la distribución de mejores respuestas de un jugador se vuelve más dispersa cuando la señal de ese jugador se vuelve más informativa. Además, incluso cuando la calidad de la información se mantiene fija, mostramos que la distribución de mejores respuestas de un jugador se vuelve más dispersa si la distribución de mejores respuestas de otro jugador se vuelve más dispersa. Nuestro resultado principal muestra que la combinación de estos efectos es que los jugadores no solo son sensibles a cambios en la calidad de sus propias señales sino también a cambios en la calidad de la señal de sus oponentes.

Ejemplos y Aplicaciones

Presentamos varios ejemplos—concursos de belleza generalizados, proyectos conjuntos con ganancias inciertas y juegos de redes con gráficas aleatorias—donde nuestro resultado puede ser aplicado para estudiar externalidades informativas. También presentamos varias aplicaciones de nuestros resultados de estática comparativa. Un lector que esté más interesado en estas aplicaciones puede adelantarse a la Sección 5. Como una aplicación de la estática comparativa en problemas de decisión de un agente, reconsideramos el ejemplo del monopolista de la Sección 2.1 en una situación más general y estudiamos cómo un planificador social debería regular la calidad de la información del monopolista. Adicionalmente, en un contexto de persuasión bayesiana, derivamos condiciones suficientes bajo las cuales la divulgación extrema de información es óptima.

Como una aplicación de la estática comparativa en juegos, obtenemos condiciones

suficientes en los pagos para las cuales el intercambio completo de información entre jugadores en un juego bayesiano es óptimo, de este modo extendiendo la literatura en el intercambio de información en oligopolios más allá de recompensas lineal cuadráticas y señales gaussianas.

Adicionalmente, consideramos una aplicación novedosa comparando dos juegos de adquisición de información distintos: uno en que la adquisición de información es una actividad encubierta (un jugador no puede observar la calidad de la información de sus oponentes) y otro donde la adquisición de la información es observable. El análisis es formalmente equivalente al proceso de acomodo al entrar a mercados oligopolistas donde una empresa incumbente puede invertir en adquisición de información. La diferencia entre las demandas de información observable y encubierta es el efecto indirecto de la información en las ganancias de la empresa incumbente a través de la conducta provocada por la empresa entrante (aquí llamado el valor de la transparencia). Caracterizamos el valor de la transparencia dependiendo de la sensibilidad de la empresa entrante a la información de la empresa incumbente y la señal de la externalidad impuesta en la empresa incumbente por la sensibilidad de la empresa entrante.

2.3 Literatura Relacionada

Desde un punto de vista metodológico, este artículo contribuye a la literatura en la teoría de estática comparativa monótona (Milgrom y Shannon, 1994; Milgrom y Roberts, 1994; Athey, 2002; Quah y Strulovici, 2009), Athey (2002) y Quah y Strulovici (2009) muestran que las acciones óptimas incrementan cuando las creencias se vuelven más favorables. Damos un paso adelante y mostramos cómo la distribución de acciones óptimas cambia cuando la distribución de creencias cambia.⁴

Nuestro trabajo también se relaciona con la literatura del valor de la información: Blackwell (1951, 1953), Lehmann (1988), Persico (2000), Quah y Strulovici (2009), y Athey y Levin (2017). En particular, Athey y Levin muestran que en la clase de funciones de pago supermodulares, un agente valora más la información si y solo si la calidad de la información es creciente en el orden estocástico modular. Para pagos que adicionalmente exhiben utilidades marginales supermodulares y convexas (submodu-

⁴En el contexto de nuestro ejemplo de motivación, Athey (2002) brinda resultados en estáticas comparativas en $q^M(s; \rho)$ como una función de la realización de una señal s para una ρ fija. En su lugar nosotros brindamos resultados de estáticas comparativas para la relación completa $q^M(\cdot; \rho)$ como una función de ρ .

lares y cóncavas), mostramos que las acciones óptimas del agente son más dispersas si y solo si la calidad de la información es creciente en el orden estocástico supermodular.

Cuando nos movemos a juegos bayesianos, las referencias sobre estática comparativa en equilibrio incluyen a Vives (1990), Milgrom y Roberts (1994), Villas-Boas (1997), Van Zandt y Vives (2007). El valor de la información en los juegos bayesianos con complementariedades también ha sido estudiado recientemente por Amir y Lazzati (2016). Amir y Lazzati muestran que en la clase de juegos con funciones de pagos supermodulares, el valor de la información es creciente y convexo en el orden estocástico supermodular. Para pagos que adicionalmente exhiben utilidades marginales supermodulares y convexas (o submodulares y cóncavas), mostramos que las acciones en equilibrio para todos los jugadores se vuelven más dispersas si la calidad de la información para cualquiera de los jugadores se incrementa en el orden estocástico supermodular.

Como mencionamos en la introducción, este artículo también se relaciona con la vasta literatura en el uso y valor social de la información, con artículos desde Radner (1962) y Hirshleifer (1971). Más recientemente Morris y Shin (2002) promovieron un nuevo interés y Angeletos y Pavan (2007) dieron una caracterización del equilibrio y el uso eficiente de la información. Finalmente, Ui y Yoshizawa (2015) brindan condiciones necesarias y suficientes para que el bienestar incremente con información pública o privada en juegos cuadráticos con señales públicas y privadas distribuidas normal.

Dos artículos que se relacionan con el nuestro pero no con la literatura previamente mencionada son Jensen (2018) y Lu (2016). Jensen (2018) considera un tomador de decisiones que tiene *información completa* del estado del mundo. Su artículo caracteriza cómo cambios en la distribución sobre el estado del mundo afectan la distribución inducida sobre las acciones óptimas.⁵ Nosotros, en cambio, caracterizamos cómo aumentos de información (cambios en las distribuciones sobre creencias) afectan la distribución inducida sobre acciones óptimas y brindamos una dualidad entre el orden la distribución de acciones y el orden de información. Además, en la aplicación a juegos, Jensen solo considera cambios exógenos a la distribución de los tipos privados e independientes mientras que nosotros permitimos un entorno más amplio.

Lu (2016) estudia cómo la calidad de la información afecta el valor de un menú de acciones. En particular, muestra que incrementar el valor de la información en el orden

⁵En el contexto de nuestro ejemplo de motivación, el monopolista observa el estado de θ y produce de manera óptima la cantidad $q^M(\theta)$. Jensen caracteriza cómo diferentes distribuciones sobre θ afectan la distribución de $q^M(\theta)$.

de Blackwell implica que la distribución acumulada del valor provisional del menú se vuelve más disperso (incrementa en el orden convexo y creciente). Nosotros en cambio mostramos que la elección dentro de un menú se vuelve más dispersa al incrementar la calidad de la información.

Aplicaciones

Contribuimos a la literatura sobre divulgación de información (Rayo y Segal, 2010) y persuasión bayesiana (Kamenica y Gentzkow, 2011). Partimos de restricciones comunes en pagos donde el conjunto de acciones es discreto o al receptor solo le importa la media posterior.⁶ En su lugar, restringimos las preferencias del receptor a la clase que permite estáticas comparativas bayesianas inequívocas (Teorema 1) y caracterizamos los niveles mínimos y máximos de conflicto entre un emisor y un receptor, condiciones bajo las cuales la divulgación extrema de información es óptima. Se pueden ver más detalle de artículos relacionados en la Sección 5.2.

También contribuimos a la literatura de organización industrial en el intercambio de información en oligopolios resumida por Raith (1996) y recientemente mencionada en Angeletos y Pavan (2007), Bergemann y Morris (2013) y más directamente en Myatt y Wallace (2015). Exploramos la robustez de los resultados con el supuesto de economías cuadráticas. Se pueden encontrar más detalles de los artículos en la Sección 5.3.

En la última aplicación, estudiamos la adquisición de información unilateral y la comparamos con las demandas de información encubierta y abierta. Hellwig y Veldkamp (2009) estudiaron el problema de adquisición de información dentro del marco de trabajo de juegos cuadráticos y notaron la herencia de la complementariedad de acciones a la adquisición de información. Colombo et al. (2014) estudian cómo el valor social de la información pública es afectado por las decisiones de adquisición de información en un marco de trabajo cuadrático más flexible y Myatt y Wallace (2011) notablemente permiten información pública determinada endógenamente en un juego cuadrático de adquisición de información similar. A pesar de que las complementariedades son importantes para nuestro análisis, ninguno de estos artículos estudia la diferencia entre las demandas de información encubierta y abierta.

Finalmente, nuestro análisis del valor de la *transparencia* en juegos bayesianos está relacionado con la caracterización de inversión estratégica en juegos de información

⁶Por ejemplo, estas condiciones son utilizadas en Rayo y Segal (2010), Gentzkow y Kamenica (2016), Kolotilin et al. (2017), Dworzak y Martini (2018).

completa secuencial contra simultáneos en Fudenberg y Tirole (1984) y Bulow et al. (1985). Presentamos una discusión detallada de esta relación en la Sección 5.4.

3 Modelo de un Agente

3.1 Definiciones y Notación Preliminar

Sea $X \triangleq \times_{i=1}^m X_i$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y sea $X_{-i} \triangleq \times_{j \neq i} X_j$. Para $x'', x' \in X$, sea $x'' \geq$ (resp., $>$) x' si $x''_i \geq$ (resp., $>$) x'_i para $i = 1, 2, \dots, m$.

Decimos que una función $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente en x_i si $x_i > x_i$ implica que $g(x_i, x_{-i}) \geq g(x_i, x_{-i})$ para todo $x_{-i} \in X_{-i}$. Decimos que g tiene diferencias crecientes (decrecientes o constantes) en $(x_{-i} : x_i)$ si para cualquier $x_{-i} \geq x_{-i}$, $g(x_i, x_{-i}) - g(x_i; x_{-i})$ es creciente (decreciente o constante) en x_i . Enfatizamos que cualquier referencia a creciente/decreciente, diferencias crecientes/decrecientes o cóncavo/convexo son en el sentido débil.

Si g es una función diferenciable, escribimos g_{x_i} como una abreviación de $\frac{\partial}{\partial x_i} g(x)$ y $g_{x_i x_j}$ para $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(x)$. Si g es diferenciable y tiene diferencias crecientes (decrecientes o constantes) en $(x_{-i}; x_i)$, entonces $g_{x_i x_j} \geq 0$ ($g_{x_i x_j} \leq 0$ o $g_{x_i x_j} = 0$) para cada $j \neq i$.

3.2 Preliminares

Sea $A \triangleq [a, \bar{a}]$ el espacio de acción y sea $\Theta \triangleq [\theta, \bar{\theta}]$ el espacio de estados. Denotamos la variable de estado aleatorio con $\tilde{\theta}$ y la realización con θ . Sea $\Delta(\Theta)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad de Borel en Θ . Un agente tiene que elegir una acción $a \in A$ antes de observar el estado del mundo realizado. La creencia previa del agente se denota con la medida $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$. Permitimos que las creencias sean una mezcla de medidas discretas y medidas absolutamente continuas. Los pagos son dados por la función $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que

(A.1) $u(\theta, a)$ está acotado uniformemente, es medible en θ y dos veces diferenciable en a ,

(A.2) para todo $\theta \in \Theta$, $u(\theta, \cdot)$ es estrictamente cóncavo en a ,

(A.3) para todo $\theta \in \Theta$, existe una acción $a \in A$ tal que $u_a(\theta, a) = 0$ y

(A.4) $u(\theta, a)$ tiene diferencias crecientes en $(\theta; a)$.

Las diferencias crecientes (DC) implican que el agente prefiere una mayor acción cuando el estado es mayor y una menor acción cuando el estado es menor. Los supuestos (A.1)-(A.3) nos permiten caracterizar las acciones óptimas por sus condiciones de primer orden.⁷

Dada cualquier creencia $\mu \in \Delta(\Theta)$, se define

$$a^*(\mu) = \arg \max_{a \in A} \int_{\Theta} u(\theta, a) \mu(d\theta).$$

La continuidad y la concavidad estricta de la función de utilidad junto con la compacidad de A garantizan que existe una solución única y medible. Además, (A.4) implica $a^*(\mu_2) \geq a^*(\mu_1)$ siempre que μ_2 domine estocásticamente de primer orden a μ_1 (Athey, 2002).⁸

Previo a la toma de decisión, el agente puede observar una señal informativa aleatoria $\tilde{s}$ acerca del estado desconocido. Denotamos la realización de la señal con s para distinguirla de la señal aleatoria. Las señales se generan por una estructura de información $\Sigma_{\rho} \triangleq \langle S, F(\cdot; \cdot; \rho) \rangle$ donde $S \subseteq \mathbb{R}$ es el espacio de señales, $F(\cdot; \cdot; \rho) : \Theta \times S \rightarrow [0, 1]$ es la distribución de probabilidad conjunta sobre $(\tilde{\theta}, \tilde{s})$ y ρ es un índice que es útil cuando se compran diferentes estructuras de señal.

Denotamos la distribución marginal de $\tilde{\theta}$ con $F_{\Theta}(\cdot; \rho) : \Theta \rightarrow [0, 1]$. Para mantener la racionalidad bayesiana (Kamenica y Gentzkow, 2011), asumimos que cualquier estructura de información Σ_{ρ} induce la misma marginal $F_{\Theta}(\theta; \rho) = F_{\Theta}(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} \mu^0(d\omega)$ la cual depende únicamente de la prior.

Denotamos la distribución marginal de $\tilde{s}$ con $F_S(\cdot; \rho) : S \rightarrow [0, 1]$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que todas las estructuras de información inducen la misma marginal en $\tilde{s}$, es decir, $F_S(s; \rho) = F_S(s)$ para toda $s \in S$. Además, F_S tiene una densidad acotada positivamente f_S .⁹

⁷En la Sección 7.2.1, comentamos las dificultades que se presentan cuando alguno de estos supuestos no se cumple.

⁸Decimos que μ_2 domina a μ_1 estocásticamente de primer orden, denotado por $\mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$, si para cualquier función creciente $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{\Theta} g(\theta) \mu_2(d\theta) \geq \int_{\Theta} g(\theta) \mu_1(d\theta)$.

⁹La suposición es, sin pérdida de generalidad: podemos aplicar la transformación de probabilidad integral a cualquier señal $\tilde{s}$ con una distribución marginal continua y crear una nueva señal que se distribuye uniforme en el intervalo unitario. De la distribución marginal de $\tilde{s}$ es discontinua en $\tilde{s} = s^*$ con $F_S(s^*; \rho) = q$ entonces, como mencionado por Lehmann (1988), podemos construir una nueva señal, $\tilde{s}'$ donde $\tilde{s}' = \tilde{s}$ si $\tilde{s} < s^*$, $\tilde{s}' = \tilde{s} + q\tilde{t}$ if $\tilde{s} = s^*$ y $\tilde{s}' = \tilde{s} + q$ si $\tilde{s} > s^*$, donde $\tilde{t} \sim U(0, 1)$. La nueva señal $\tilde{s}'$ es igual de informativa que $\tilde{s}$ y tiene una distribución marginal continua y estrictamente creciente.

3.3 Orden 1: Acciones

Desde una perspectiva interim, el agente primero observa la realización de una señal $s \in S$ de una estructura de información Σ_ρ , actualiza sus creencias a una posterior $\mu(\cdot|s; \rho) \in \Delta(\Theta)$ a través de la regla de bayes y luego elige la acción óptima $a^*(\mu(\cdot|s; \rho))$. Definimos la función medible $a(\rho) : S \rightarrow A$ con $a(s; \rho) = a^*(\mu(\cdot|s; \rho))$.

Desde una perspectiva ex-ante, las realizaciones de señales están por ser observadas. Por lo tanto, $a(\rho)$ es una variable aleatoria que se distribuye de acuerdo con la función de distribución $H(\cdot; \rho)$ la cual se define como

$$H(z; \rho) \triangleq \int_{\{s: a(s; \rho) \leq z\}} dF_S(s)$$

para $z \in \mathbb{R}$.

Dadas dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$, decimos que $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ en el *orden convexo creciente* si

$$\int_x^\infty H(z; \rho'') dz \leq \int_x^\infty H(z; \rho') dz$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Alternativamente, decimos que $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ en el orden convexo decreciente si

$$\int_{-\infty}^x H(z; \rho'') dz \geq \int_{-\infty}^x H(z; \rho') dz$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.¹⁰ Si $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ tanto en el orden convexo creciente como en el convexo decreciente entonces $a(\rho'')$ es una extensión que conserva la media de $a(\rho')$.

Definición 1 (Sensibilidad) Dadas dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$ decimos que

- i. un agente es **más sensible con una media mayor** bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$ si $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ en el orden convexo creciente y
- ii. un agente es **más sensible con una media menor** bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$ si $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ en el orden convexo decreciente.

¹⁰ $a(\rho'')$ domina a $a(\rho')$ en el orden convexo decreciente si y solo si $a(\rho')$ domina a $a(\rho'')$ estocásticamente de segundo orden.

La Figura 2 grafica la distribución sobre las acciones inducidas por dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$. En la Figura 2a, el área entre el eje y y $H(\cdot; \rho'')$ (la línea punteada) es mayor que el área entre el eje y y $H(\cdot; \rho')$ (la línea sólida) lo que implica que $\Sigma_{\rho''}$ induce acciones óptimas con una media mayor que $\Sigma_{\rho'}$. Además, integrando $H(\cdot; \rho'') - H(\cdot; \rho')$ de derecha a izquierda siempre produce un valor negativo lo que implica sensibilidad con una media mayor. En contraste, en la Figura 2b, el área entre el eje y y $H(\cdot; \rho'')$ (la línea punteada) es menor que el área entre el eje y y $H(\cdot; \rho')$ (la línea sólida) lo que implica que $\Sigma_{\rho''}$ induce acciones óptimas con una media menor que $\Sigma_{\rho'}$. Además, integrando $H(\cdot; \rho'') - H(\cdot; \rho')$ de izquierda a derecha siempre produce un valor positivo lo que implica sensibilidad con una media menor.

Fig. 2: Función de Probabilidad de Acciones Óptimas y Sensibilidad

3.4 Orden 2: Información

El siguiente paso es determinar una forma apropiada de comparar distintas estructuras de información. Primero prestamos atención a las estructuras de información en las que realizaciones de señal mayores conducen a un movimiento estocástico de primer orden en las creencias. Este supuesto es más débil que la propiedad de la razón de verosimilitud monótona comúnmente asumida en situaciones con complementariedades (Milgrom y Weber, 1982; Athey, 2002).

(A.5) Para cualquier estructura de información dada Σ_{ρ} , $s > s$ implica que $\mu(\cdot|s; \rho) \succeq_{FOSD} \mu(\cdot|s; \rho)$.

Definición 2 (Orden Estocástico Supermodular) *Dadas dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$, decimos que $\Sigma_{\rho''}$ domina a $\Sigma_{\rho'}$ en el orden estocástico supermodular, denotado $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ si $F(\theta, s; \rho'' \geq F(\theta, s; \rho')$ para todo $(\theta, s) \in \Theta \times S$. (Tchen, 1980).*

Intuitivamente, $\Sigma_{\rho''}$ domina a $\Sigma_{\rho'}$ en el orden estocástico supermodular si $\tilde{\theta}$ y $\tilde{s}$ están más positivamente correlacionadas bajo $\Sigma_{\rho''}$. Por (A.5), realizaciones de señal bajas son evidencia de estados menores. El agente considera una señal $\tilde{s} \leq s$ de $\Sigma_{\rho''}$ como evidencia fuerte de un estado menor (que una señal $\tilde{s} \leq s$ de $\Sigma_{\rho'}$). Así, $\mathbb{P}(\tilde{\theta} \leq \theta | \tilde{s} \leq s; \rho'') \geq \mathbb{P}(\tilde{\theta} \leq \theta | \tilde{s} \leq s; \rho')$. Sin pérdida de generalidad, la marginal en las señales es la misma tanto para $\Sigma_{\rho''}$ como para $\Sigma_{\rho'}$. Por lo tanto,

$$F(\theta, s; \rho'') = \mathbb{P}(\tilde{\theta} \leq \theta | \tilde{s} \leq s; \rho'') F_S(s) \geq \mathbb{P}(\tilde{\theta} \leq \theta | \tilde{s} \leq s; \rho') F_S(s) = F(\theta, s; \rho').$$

Por ejemplo, la clase de estructuras de información verdadera o ruido que consideramos en la Sección 2.1 están ordenadas por el orden estocástico supermodular. Otro ejemplo es la clase de estructuras de información gaussianas tales que $\tilde{\theta}$ y $\tilde{s}$ tienen una distribución normal con media θ_0 y varianza σ^2 y tienen un coeficiente de correlación de $\rho \in [0, 1]$. En ambos casos, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ si $\rho'' > \rho'$.

En el Apéndice B (Mekonnen y Leal-Vizcaíno, 2018), explicamos que dado (A.5), el orden estocástico supermodular anida la ya conocida informatividad de Blackwell (Blackwell, 1951, 1953) y el orden (de exactitud) de Lehmann (Lehmann, 1988).¹¹ También brindamos un ejemplo de estructuras de información no paramétricas que pueden ser clasificadas por el orden estocástico supermodular pero no por los órdenes de Blackwell o Lehmann.

3.5 Preferencias y Resultado Principal

La mayor contribución de este artículo es identificar una clase de problemas de decisión para los cuales el agente se vuelve más sensible cuando la calidad de la información aumenta de acuerdo al orden estocástico supermodular.

Sea $\mathcal{U}^I$ la clase de funciones de pago $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen (A.1)-(A.4) y tienen una utilidad marginal $u_a(\theta, a)$ tales que

¹¹Ver Persico (2000) y Jewitt (2006) para una descripción detallada y aplicaciones.

(i) es convexa en a par todo $\theta \in \Theta$ y (ii) tiene diferencias crecientes en (θ, a) .

En otras palabras, una función de utilidad $u \in \mathcal{U}^I$ exhibe diferencias crecientes en (θ, a) que incrementan con a y una utilidad marginal que disminuye con una *tasa decreciente* para cada estado θ . Abajo, mostramos que un agente con función de pago $u \in \mathcal{U}^I$ se vuelve más sensible con una media mayor mientras la calidad de la información aumenta en el orden estocástico supermodular.

Similarmente, sea $\mathcal{U}^D$ la clase de funciones de pago $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen (A.1)-(A.4) y tienen una utilidad marginal $u_a(\theta, a)$ tales que

(i) es cóncava en a para todo $\theta \in \Theta$ y (ii) tiene diferencias decrecientes en (θ, a)

En otras palabras, una función de utilidad $u \in \mathcal{U}^D$ exhibe diferencias crecientes en $(\theta; a)$ que decrecen con a y una utilidad marginal que disminuye en una *tasa creciente*. Abajo mostramos que un agente con una función de pago $u \in \mathcal{U}^D$ se vuelve más sensible con una media menor cuando la calidad de la información incrementa en el orden estocástico supermodular.¹²

Teorema 1 *Considerar dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y Σ_{ρ} que satisfacen (A.5). Cualquier agente con pago $u \in \mathcal{U}^I$ (o $u \in \mathcal{U}^D$) es más sensible con una media mayor (menor) bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo Σ_{ρ} si y solo si $\Sigma_{\rho''}$ domina a Σ_{ρ} en el orden estocástico supermodular.*

Cuando la calidad de la información aumenta, la distribución sobre las creencias posteriores del agente se vuelve más dispersa. El Teorema 1 brinda las condiciones de la función de utilidad del agente bajo las cuales podemos trazar la distribución de creencias posteriores más dispersa hacia una distribución de acciones más dispersa que incorpora cambios monótonos a la acción óptima promedio.

El mecanismo detrás del Teorema 1 se entiende mejor a través de la Proposición 1, la cual muestra que cuando $u \in \mathcal{U}^I$ ($u \in \mathcal{U}^D$), las acciones óptimas son convexas (cóncavas) en las creencias posteriores del agente.

¹²La clase de funciones $\mathcal{U}^I$ ($\mathcal{U}^D$) es un superconjunto de funciones ultramodulares (inframodulares). Ver Marinacci y Montrucchio (2005) para un análisis de funciones ultramodulares/inframodulares y la conexión a teoría de juegos cooperativos.

Proposición 1 Sean $\mu_1, \mu_2 \in \Delta(\Theta)$ dos creencias con $\mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$. Si $u \in \mathcal{U}^I$, entonces para cualquier $\lambda \in [0, 1]$

$$a^*(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) \leq \lambda a^*(\mu_1) + (1 - \lambda)a^*(\mu_2)$$

Si $u \in \mathcal{U}^D$, la desigualdad opuesta se mantiene.

De aquí en adelante nos concentramos en los pagos de $\mathcal{U}^I$ pero los argumentos que brindamos pueden ser simétricamente aplicados a pagos en $\mathcal{U}^D$.

Para una representación visual simple, sea el espacio de estados $\Theta = \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$ con $\bar{\theta} > \underline{\theta}$. Con un poco de abuso de notación, sea μ in $[0, 1]$ la creencia del agente que $\bar{\theta} = \underline{\theta}$. Consideramos cuatro creencias distintas $\{\mu_n\}_{n=1,2,3,4}$ tales que $\mu_n = n\delta$ para una $\delta \in (0, 1/4)$. La Figura 3a grafica la utilidad marginal esperada de la función de pago $u \in \mathcal{U}^I$ para las distintas creencias. La acción óptima $a_n = a^*(\mu_n)$ es dada por la acción en la que la utilidad marginal esperada bajo la creencia μ_n se intersecta con el eje x . Dado que $\mu_4 \succeq_{FOSD} \mu_3 \succeq_{FOSD} \mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$ y $u(\theta, a)$ satisface las diferencias crecientes, $a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1$.

Las diferencias crecientes de $u_a(\theta, a)$ implican que la brecha entre las utilidades marginales esperadas de μ_{n+1} y μ_n se agranda mientras la acción aumenta (la altura de las flechas punteadas aumenta de izquierda a derecha). En tal caso, para una $\epsilon > 0$ pequeña, el beneficio del agente de incrementar a_2 a $a_2 + \epsilon$ cuando las creencias aumentan de μ_2 a μ_3 es mayor que su beneficio al incrementar a_1 a $a_1 + \epsilon$ cuando las creencias aumentan de μ_1 a μ_2 y así sucesivamente.

En contraste, la concavidad de $u(\theta, a)$ en a implica que, para cualquier creencia fija, el beneficio del agente de incrementar a_2 a $a_2 + \epsilon$ es menor que su beneficio de incrementar a_1 a $a_1 + \epsilon$ y así sucesivamente. Así, hay dos fuerzas opuestas encontrándose. Sin embargo, cuando $u_a(\theta, a)$ es convexa en a , la utilidad marginal no disminuye muy rápido. Esta utilidad marginal decreciente *que decrece* se observa en la Figura 3a con las curvas de utilidad marginales convexas. Todas estas propiedades combinadas resultan en $a_4 - a_3 > a_3 - a_2 > a_2 - a_1$. La Figura 3b muestra esta propiedad de convexidad como se describe en la Proposición 1.

Para ver cómo la convexidad de la acción óptima se relaciona con la sensibilidad, continuemos con el escenario planteado anteriormente. La Figura 4a representa la acción óptima convexa (como función de posteriores) de algún agente con utilidad $u \in \mathcal{U}^I$. Sea $\mu_0 \in (0, 1)$ la creencia previa del agente.

Fig. 3: Convexidad de $u \in \mathcal{U}^I$

Sea $\Sigma_{\rho'}$ una estructura de información completamente no informativa la cual induce $a^*(\mu_0)$ con probabilidad uno. Sea $\Sigma_{\rho''}$ una estructura de información más informativa que induce dos posteriores $\{\mu_1, \mu_2\}$ con probabilidad $\{\lambda, 1 - \lambda\}$. Por lo tanto, induce $a^*(\mu_1)$ con probabilidad λ y $a^*(\mu_2)$ con probabilidad $1 - \lambda$. Dado que las posteriores se derivan con actualización bayesiana, $\mu_0 = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$. De la Proposición 1, $u \in \mathcal{U}^I$ implica que $\lambda a^*(\mu_1) + (1 - \lambda)a^*(\mu_2) \geq a^*(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) = a^*(\mu_0)$, es decir $\Sigma_{\rho''}$ induce una acción promedio mayor que Σ_{ρ} .

La Figura 4b muestra la distribución de acciones inducida, $H(\cdot; \rho'')$ (la línea punteada) y $H(\cdot; \rho')$ (la línea sólida). La integral $\int_x^\infty H(z; \rho'') - H(z; \rho') dz \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$ lo cual implica que el agente es más sensible con una media mayor bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo Σ_{ρ} .

Corolario 1 Sea $\Sigma_{\rho''}$ una estructura de información que satisface (A.5). Sea Σ_{ρ} cualquier difuminación¹³ de $\Sigma_{\rho''}$. Si un agente tiene utilidad $u \in \mathcal{U}^I$ ($u \in \mathcal{U}^D$), entonces el agente es más sensible con una media mayor (menor).

Remark 1 La Proposición 1 implica directamente el Corolario 1, el cual muestra que el agente se vuelve más sensible cuando la calidad de la información aumenta en el

¹³Esto corresponde al orden de (Blackwell, 1951). $\Sigma_{\rho'}$ es una difuminación de $\Sigma_{\rho''}$ si existe una relación estocástica $\{\xi(\cdot|\hat{s})\}_{\hat{s} \in S}$ con $\xi(\cdot|\hat{s}) : S \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(\theta, s; \rho') = \int_{[\theta, \theta] \times S} \xi(s|\hat{s}) dF(\omega, \hat{s}; \rho'')$ para cada $(\theta, s) \in \Theta \times S$.

Fig. 4: Convexidad de a^* y sensibilidad con una media mayor

orden de Blackwell. Mientras el resultado parece una implicación del Teorema 1, hay una diferencia sutil —la difuminación Σ_ρ no satisface (A.5).

Remark 2 Dado que Θ es un conjunto ordenado, la estructura de información completa (la señal que revela perfectamente el estado) induce posteriores que satisfacen trivialmente (A.5). Además, cualquier otra estructura de información es una difuminación de la estructura de información completa. Por lo tanto, cuando $u \in \mathcal{U}^I$ ($u \in \mathcal{U}^D$), el Corolario 1 implica que las acciones del agente está más dispersas con la media mayor (menor) bajo la estructura de información completa.

Remark 3 Siempre que $u \notin \mathcal{U}^I$, existen creencias $\mu_1, \mu_2 \in \Delta(\Theta)$ con $\mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$ y $\lambda \in (0, 1)$ para los cuales no se cumple la Proposición 1. Considerando una prior $\mu^0 = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, una estructura no informativa Σ_ρ que induce la prior con probabilidad 1 y una estructura más informativa $\Sigma_{\rho''}$ que induce las posteriores μ_1 y μ_2 con probabilidades λ y $1 - \lambda$ respectivamente. Entonces $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ pero el agente no es más sensible con una media mayor bajo $\Sigma_{\rho''}$. En este caso, la clase de preferencias $\mathcal{U}^I$ no es solo suficiente pero también necesaria para sensibilidad con una media mayor. Presentamos un ejemplo en la Sección 7.2.1.

4 Juegos

En esta Sección, extendemos nuestros resultados del marco de trabajo de un agente a juegos de información incompleta con complementariedades estratégicas. Esta clase

de juegos incluye concursos de belleza y juegos cuadráticos, competencia oligopólica, juegos con efectos de redes, modelos de búsqueda y juegos de inversión, entre otros (see Milgrom y Roberts (1990)).

4.1 Preliminares

Hay n jugadores con $N \triangleq \{1, 2, \dots, n\}$, el conjunto de jugadores. Sea $\Theta_i \triangleq [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ el espacio de estados para el jugador i y definimos $\Theta \triangleq \times_{i \in N} \Theta_i$ y $\Theta_{-i} \triangleq \times_{j \neq i} \Theta_j$. Sean $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_{-i})$ las variables de estado aleatorias y sean $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$ las realizaciones. Los jugadores mantienen una prior común $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$. Una vez más, permitimos que las creencias sean tanto discretas como medidas absolutamente continuas. Sea F_{Θ_i} la distribución marginal de $\tilde{\theta}$ inducida por μ^0 . Similarmente, sea $F_{\Theta_{-i}}(\cdot | \theta_i)$ la distribución conjunta de $\tilde{\theta}_{-i}$ condicional en $\tilde{\theta}_i = \theta_i$. Asumimos que

$$(A.6) \text{ para todo } i \in N, \theta_i > \theta_i \text{ implica } F_{\Theta_{-i}}(\cdot | \theta_i) \succeq_{FOSD} F_{\Theta_{-i}}(\cdot | \theta_i),$$

el cual es un supuesto más débil que la afiliación (Milgrom y Weber, 1982).

Sea $A_i \triangleq [a_i, \bar{a}_i]$ es espacio de acción del jugador i . Sea $A \triangleq \times_{i \in N} A_i$ y $A_{-i} \triangleq \times_{j \neq i} A_j$. El pago para cada jugador $i = 1, \dots, n$ es dado por la función de utilidad $u^i : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(A.7) \text{ } u^i(\theta, a) \text{ es acotada uniformemente, medible en } \theta, \text{ continua y dos veces diferenciable en } a,$$

$$(A.8) \text{ para todo } (\theta, a_{-i}) \in \Theta \times A_{-i}, u^i(\theta, a_{-i}, \cdot) \text{ es estrictamente cóncavo en } a_i,$$

$$(A.9) \text{ para todo } (\theta, a_{-i}) \in \Theta \times A_{-i}, \text{ existe una acción } a_i \in A_i \text{ tal que } u_{a_i}^i(\theta, a_{-i}, a_i) = 0$$

y

$$(A.10) \text{ } u^i(\theta, a) \text{ tiene diferencias crecientes en } (\theta, a_{-i}; a_i).$$

Similar al problema de un agente, (A.10) implica que hay complementariedades entre el estado del mundo y la acción de un jugador. Adicionalmente, hay complementariedades estratégicas entre las acciones del jugador. Así, cuando el jugador j lleva a cabo una acción mayor, el jugador i quiere hacer lo mismo.

Siguiendo la terminología de Gossner (2000), descomponemos el juego de información incompleta en dos componentes: el juego básico y la estructura de información.

El juego básico $G \triangleq (N, \{A_i, u^i\}_{i \in N}, \mu^0)$ se compone de (i) un conjunto de jugadores N , (ii) para cada jugador $i \in N$ un espacio de acciones A_i junto con una función de pago $u^i : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ y (iii) una *prior* común $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$. El contexto es suficientemente general para acomodar valores privados o comunes así como independencia o afiliación.

El segundo componente del juego es la estructura de información: cada jugador $i \in N$ observa una señal $\tilde{s}_i$ acerca de $\tilde{\theta}_i$ de una estructura de información $\Sigma_{\rho_i} \triangleq (S_i, F(\cdot, \cdot; \rho_i))$.¹⁴ $S_i \subseteq \mathbb{R}$ es el espacio de señales, $F(\cdot, \cdot; \rho_i) : \Theta_i \times S_i \rightarrow [0, 1]$ es una distribución de probabilidad conjunta sobre $(\tilde{\theta}_i, \tilde{s}_i)$ y ρ_i es un índice. Para que se mantenga la racionalidad bayesiana, asumimos que todas las estructuras de información inducen la misma marginal en $\tilde{\theta}_i$, lo que corresponde con la función de probabilidad prior F_{Θ_i} . Además, asumimos (WLOG) que todas las estructuras de información inducen la misma marginal sobre $\tilde{s}_i$, denotada por F_{S_i} con una densidad positiva y acotada, f_{S_i} .

Sea $S \triangleq \times_{i \in N} S_i$. Denotamos el perfil de las estructuras de información como $\Sigma_\rho \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_n})$. Un perfil Σ_ρ induce una distribución conjunta $\mathbf{F}(\cdot, \cdot; \rho) : \Theta \times S \rightarrow [0, 1]$ sobre $(\tilde{\theta}, \tilde{s})$. Las siguientes son suposiciones para esta sección:

(A.11) Para todo $(\theta, s) \in \Theta \times S$, $F(s|\theta; \rho) = \prod_{i \in N} F(s_i|\theta_i; \rho_i)$.

(A.12) Para todos los jugadores $i \in N$, $s_i > s_i$ implica $\mu(\cdot|s_i; \rho_i) \succeq_{FOSD} \mu(\cdot|s_i; \rho_i)$.

(A.13) Para todos los jugadores $i \in N$, $\theta_i > \theta_i$ implica $F(\cdot|\theta_i; \rho_i) \succeq_{FOSD} F(\cdot|\theta_i; \rho_i)$.

El supuesto (A.11) implica que el jugador i no puede aprender directamente acerca de $(\tilde{\theta}_{-i}, \tilde{s}_{-i})$. El supuesto (A.12) es una extensión de (A.5) e implica que mayores realizaciones de la señal llevan a un movimiento estocástico de primer orden en las creencias del jugador. El supuesto (A.13) implica el converso: estados mayores son más probables a llevar a realizaciones de la señal mayores. Una distribución sobre los espacios de señal y estado que satisface la razón de verosimilitud monótona satisface conjuntamente (A.12)-(A.13).

El juego completo de información incompleta está dado por $\mathbb{G}_\rho \triangleq (\Sigma_\rho, G)$. Ambos componentes del juego son de conocimiento común. Primero, cada jugador $i \in N$ observa de manera privada una realización de señal $s_i \in S_i$ generada por Σ_{ρ_i} . Después los jugadores participan en el juego básico G al elegir simultáneamente una acción.

¹⁴Hay un supuesto implícito en la preparación que dice que el jugador i puede aprender directamente únicamente de $\tilde{\theta}$. Hacemos este supuesto explícito en (A.11).

Ignorando momentáneamente los problemas de existencia, sea $a^*(\rho) = (a_1^*(\rho), a_2^*(\rho), \dots, a_n^*(\rho))$ un perfil de acciones de estrategia pura que constituyen un equilibrio de Nash bayesiano (ENB) del juego $\mathbb{G}_\rho$, y sea $a_{-i}^*(\rho)$ el perfil de estrategias ENB excluyendo al jugador i . Para cada jugador $i \in N$, $a_i^*(\rho) : S_i \rightarrow A_i$ es una función medible. Interpretamos a $a_i^*(s_i; \rho)$ como la solución de

$$\max_{a_i \in A_i} \int_{\Theta \times S_{-i}} u^i(\theta, a_{-i}^*(s_{-i}; \rho), a_i) d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho).$$

En otras palabras, $a_i^*(s_i; \rho)$ es la acción que lleva a cabo el jugador i en un equilibrio del juego $\mathbb{G}_\rho$ cuando observa la realización s_i de una señal y sus oponentes utilizan las estrategias $a_{-i}^*(\rho)$. Fijando el juego básico G , estamos interesados en cómo un cambio en el perfil de las estructuras de información de $\Sigma_{\rho'}$ a $\Sigma_{\rho''}$ afecta los ENB del juego $\mathbb{G}_\rho' \triangleq (\Sigma_{\rho'}, G)$ y $\mathbb{G}_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho''}, G)$.

Restringimos nuestra atención a ENB monótonos, es decir, la acción en equilibrio de cada jugador, $a_i^*(s_i; \rho)$ es creciente en la señal s_i .¹⁵ La existencia de ENB monótonos de estrategia pura ha sido establecido por la literatura en juegos bayesianos supermodulares. En particular, el resultado de existencia de Van Zandt y Vives (2007) aplica en nuestro contexto; su resultado de existencia no requiere que los jugadores tengan posteriores no atómicas cuando participan en el juego básico.

4.2 Orden 1: Acciones en Equilibrio de Nash bayesiano

Buscamos asimilar el modelo de un agente tanto como es posible. Primero extendemos la definición de sensibilidad a un contexto de varios jugadores.

Definición 3 (Sensibilidad del Equilibrio) *Dados dos juegos bayesianos, $\mathcal{G}_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho''}, G)$ y $\mathcal{G}_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho'}, G)$, decimos que*

- *los jugadores son **más sensibles con una media mayor** bajo $\mathcal{G}_{\rho''}$ que bajo $\mathcal{G}_{\rho'}$ si para cada ENB monótono $a^*(\rho')$ de $\mathcal{G}_{\rho'}$, existe un ENB monótono $a^*(\rho'')$ de $\mathcal{G}_{\rho''}$ tal que $a_i^*(\rho'')$ domina a $a_i^*(\rho')$ en orden convexo creciente para todo $i \in N$ y*

¹⁵Por los supuestos (A.6), (A.10) y (A.12), la mejor respuesta del jugador i es monótona en s_i cuando sus oponentes utilizan estrategias monótonas. Mientras que restringir la atención a ENB monótonos puede ser con pérdida de generalidad, los equilibrios extremos son monótonos. Específicamente, los ENB monótonos de menor y mayor estrategia pura de un juego bayesiano supermodular acotan a todos los otros ENB (Milgrom y Roberts (1990); Van Zandt y Vives (2007)).

- los jugadores son **más sensibles con una media menor** bajo $\mathcal{G}_\rho''$ que bajo $\mathcal{G}_\rho'$ si para cada ENB monótono $a^*(\rho'')$ de $\mathcal{G}_\rho'$, existe un ENB monótono $a^*(\rho')$ de $\mathcal{G}_\rho''$ tal que $a_i^*(\rho'')$ domina a $a_i^*(\rho')$ en el **orden convexo decreciente** para todo $i \in N$.

La definición de sensibilidad en el contexto de juegos bayesianos está más involucrada que en el caso de un agente porque tenemos que tomar en cuenta la posibilidad de varios resultados de ENB. Sin embargo, si nos concentramos en una selección de equilibrios en particular, entonces podemos regresar a la definición más sencilla utilizada en el contexto de un agente.

4.3 Orden 2: Información

Ahora extendemos el orden estocástico supermodular de un agente a un contexto con varias estructuras de información.

Definición 4 (Orden Estocástico Supermodular en Juegos) Dadas dos estructuras de perfiles de información $\Sigma_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}, \dots, \Sigma_{\rho_n})$ y $\Sigma_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}, \dots, \Sigma_{\rho_n})$, decimos que $\Sigma_{\rho''}$ domina a $\Sigma_{\rho'}$ en el orden estocástico supermodular, denotado por $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ si Σ_{ρ_i} domina a Σ_{ρ_i} en el orden estocástico supermodular para todo $i \in N$.

4.4 Preferencias y Resultados Principales para Juegos

Sea Γ^I la clase de funciones de pago $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface (A.7)-(A.10) y tiene una utilidad marginal $u_{a_i}(\theta, a)$ que para toda $j \in N$,

- (i) es convexa en a_j para todo $(\theta, a_{-j}) \in \Theta \times A_{-j}$,
- (ii) tiene diferencias crecientes en $(\theta, a_{-j}; a_j)$.

Abajo, mostramos que los pagos en Γ^I están ligados a una sensibilidad con media mayor.¹⁶

Sea Γ^D la clase de funciones de pago $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface (A.7)-(A.10) y tiene una utilidad marginal $u_{a_i}(\theta, a)$ que para todo $j \in N$

¹⁶Notar que $\Gamma^I \subseteq \mathcal{U}^I$. Además, si $u(\theta, a)$ es independiente de (θ_{-i}, a_{-i}) y $u \in \mathcal{U}^I$, entonces $u \in \Gamma^I$.

- (i) es cóncava en a_j para todo $(\theta, a_{-j}) \in \Theta \times A_{-j}$, (ii) tiene diferencias decrecientes en $(\theta, a_{-j}; a_j)$.

Abajo, mostramos que los pagos en Γ^D están ligados a una sensibilidad con media menor.

Teorema 2 *Considerando dos juegos bayesianos $\mathcal{G}_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho''}, G)$ y $\mathcal{G}_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho'}, G)$ en los que $\Sigma_{\rho''}$ domina a $\Sigma_{\rho'}$ en el orden estocástico supermodular. Si $u^i \in \Gamma^I$ ($u^i \in \Gamma^D$) para todo $i \in N$, entonces los jugadores son más sensibles con una media mayor (menor) bajo $\mathcal{G}_{\rho''}$ que bajo $\mathcal{G}_{\rho'}$.*

La demostración del Teorema 2 se encuentra en el Apéndice B (Mekonnen y Leal-Vizcaíno, 2018). Aquí brindamos un breve bosquejo que se visualiza en cuatro partes. Supongamos $u^i \in \Gamma^I$ para todo $i \in N$ y consideremos un perfil de estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$. Además, fijemos un jugador $i \in N$.

1. Manteniendo todo lo demás constante, una mayor calidad en la información lleva a una distribución de mejores respuestas más dispersa.
 - Supongamos $\rho_i \succeq_{spm} \rho_i$ y $\Sigma_{\rho_j} = \Sigma_{\rho_j}$ para todo $j \neq i$. Fijemos una estrategia monótona para todos los jugadores $j \neq i$. Entonces la mejor respuesta del jugador i bajo $\Sigma_{\rho''}$ domina a su mejor respuesta bajo $\Sigma_{\rho'}$ en el orden convexo creciente. Esta es una extensión del Teorema 1 en el contexto de un agente.
2. Manteniendo todo lo demás constante, una mejor calidad en la información del oponente llevar a una distribución de mejores respuestas más dispersa.
 - Supongamos $\rho_j \succeq \rho_j$ para alguna $j \neq i$ y $\Sigma_{\rho_k} = \Sigma_{\rho_k}$ para todo $k \neq j$. Fijemos las estrategias monótonas de los jugadores $k \neq i$. Entonces la mejor respuesta del jugador i bajo $\Sigma_{\rho''}$ domina a su mejor respuesta bajo $\Sigma_{\rho'}$ en el orden creciente.¹⁷ Cuando mejora la calidad de la información del jugador j , $\tilde{s}_j$ se vuelve más correlacionado con $\tilde{\theta}_j$ que a su vez es (débilmente) correlacionada con $\tilde{\theta}_i$.¹⁸ Por lo tanto, al incrementar la calidad de la información del jugador j , las señales $\tilde{s}_i$ y $\tilde{s}_j$ indirectamente se vuelven más correlacionadas. Así, el jugador i puede predecir mejor la acción aleatoria del jugador j y enfrentarla.

¹⁷El dominio puede ser en el sentido débil, es decir, es posible que la mejor respuesta no cambia bajo las dos estructuras de información.

¹⁸Al decir débilmente correlacionada, nos referimos a que permitimos que $\tilde{\theta}_i$ sea independiente de $\tilde{\theta}_j$.

3. Manteniendo todo lo demás constante, una distribución más dispersa de las acciones de un jugador llevan a una distribución de mejores respuestas más dispersa.
 - Supongamos $\Sigma_{\rho''} = \Sigma_{\rho'}$. Para algún jugador $j \neq i$ consideremos dos estrategias monótonas α_j y α_j tales que α_j domina a α_j en el orden convexo creciente. Fijemos las estrategias monótonas de los jugadores $k \neq j, i$. Entonces la mejor respuesta del jugador i a α_j domina a su mejor respuesta a α_j en el orden convexo creciente. Es un resultado similar al de las complementariedades estratégicas entre (a_j, a_i) e implica que la mejor respuesta del jugador i es estrategias monótonas siempre que j utiliza una estrategia monótona.
4. Finalmente, mostramos que la combinación de los efectos mencionados es que la distribución de resultados en ENB para cada jugador se vuelve más dispersa si al menor un jugador consigue una mejor calidad de la información.

Ejemplos

Mientras las condiciones de los pagos en el Teorema 2 pueden parecer abstractas, mostramos con ejemplos particulares cómo son satisfechas naturalmente.

Ejemplo 1 (Concursos de Belleza Generalizados)

Sea $g_i : \Theta \times A_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h_i : A_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ sean funciones acotadas y medibles y sea $\beta_i \in (0, 1)$. Sea

$$u^i(\theta, a) = -\beta_i \left(g_i(\theta, a_{-i}) - a_i \right)^2 - (1 - \beta_i) \left(h_i(a_{-i}) - a_i \right)^2.$$

Entonces $u^i \in \Gamma^I$ ($u^i \in \Gamma^D$) si $g_i(\theta, a_{-i})$ y $h_i(a_{-i})$ (i) son crecientes, (ii) dos veces diferenciables y convexas (cóncavas) en a_j para todos $j \neq i$ y (iii) tiene diferencias crecientes (decrecientes) en $(\theta, a_{-j}; a_j)$ para toda $j \neq i$.

Este ejemplo generaliza el modelo canónico de concursos de belleza (Keynes, 1936; Morris y Shin, 2002) el cual asume una variable de estado distribuida normal (valor común), señales distribuidas normales y un pago simétrico con $g_i(\theta, a_{-i}) = \theta$ y $h_i(a_{-i}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$. Una formulación más general que abarque todos los juegos cuadráticos (Angeletos y Pavan, 2007; Bergemann y Morris, 2013) es la siguiente:

$$u^i(\theta, a) = -a_i^2 + 2a_i g_i(\theta, a_{-i}) + f_i(\theta, a_{-i}),$$

donde g satisface las mismas condiciones de arriba y $f_i : \Theta \times A_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y medible pero no se le exige nada más. Mientras que $f_i(\theta, a_{-i})$ no es importante desde una perspectiva positiva, es importante para análisis del bienestar.

Los juegos cuadráticos canónicos satisfacen $u^i \in \Gamma^I \cap \Gamma^D$ para todos los agentes. Como un corolario del Teorema 2, podemos sostener que más información lleva a una extensión que conserva la media de la distribución de acciones en equilibrio sin la suposición de estados y señales distribuidos normales y sin la suposición de preferencias simétricas. Sin embargo, tenemos que tomar en cuenta la posibilidad de múltiples equilibrios (ver Teorema 2).

Ejemplo 2 (Proyectos conjuntos)

Sea $A_i = [0, 1]$ para todo $i \in N$. Sea $v_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ y $c_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas y medibles. Sea

$$u^i(\theta, a) = \prod_{j=1}^n a_j v_i(\theta) - c_i(a_i).$$

Entonces $u^i \in \Gamma^I$ si (i) $v_i(\theta)$ es una función no negativa y creciente, (ii) $c_i(a_i)$ es una función convexa, creciente y dos veces diferenciable y (iii) $c_i(a_i)$ es cóncava en a_i (lo que se satisface si el jugador tiene costo cuadrático).

Este ejemplo es una variante del modelo de riesgo moral en equipos (Holmstrom, 1982): cada jugador i ejerce un esfuerzo a_i con costo $c_i(a_i)$. La probabilidad de éxito es $\prod_{j=1}^n a_j$, en la cual el jugador i consigue un (posiblemente valor común) pago $v_i(\theta)$. Cada jugador observa en privado una señal sobre el valor del proyecto antes de ejercer un esfuerzo.

También podemos incorporar un componente de selección adversa al ejemplo: asumir adicionalmente que $\Theta_i = [0, 1]$ para todo $i \in N$ y $v_i(\theta) = \nu_i \prod_{j=1}^n \theta_j$. La productividad de un jugador está dada por $\theta_i a_i$ donde θ_i representa la habilidad del jugador y a_i su esfuerzo. La probabilidad total de éxito es $\prod_{j=1}^n \theta_j a_j$ donde el jugador i recibe un valor de $\nu_i > 0$. Cada jugador observa en privado una señal sobre su productividad antes de ejercer un esfuerzo.

Ejemplo 3 (Juegos de Redes con Información Incompleta)

Sea $A_i = [0, \bar{a}_i]$ para todo $i \in N$. Sea $\beta_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ y $c_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas y medibles. Sea $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ el grafo de una red con $g_{i,i}(\theta) = 0$ para todo $\theta \in \Theta$, es decir $g(\theta)$ es una matriz de dimensión $n \times n$ con ceros en la diagonal. Sea

$$u^i(\theta, a) = \beta_i(\theta)a_i + \sum_{j=1}^n g_{i,j}(\theta)a_i a_j - c_i(a_i).$$

Entonces $u^i \in \Gamma^I$ si (i) $\beta_i(\theta)$ es una función creciente, (ii) $g_{i,j}(\theta)$ es una función no negativa y creciente para todo $j \neq i$, (iii) $c_i(a_i)$ es una función convexa, creciente y dos veces diferenciable y (iv) $c_i(a_i)$ es cóncava en a_i .

Una versión de este juego con información completa ha sido usada para estudiar los efectos en redes sociales (Ballester et al., 2006) así como precios de monopolio ante la presencia de externalidades en las redes (Candogan et al., 2012).

El ejemplo puede ser usado para estudiar los efectos de los compañeros en la educación: si un estudiante con habilidad θ_i pasa a_i horas estudiando, tiene un costo de oportunidad de $c_i(a_i)$ pero mejora sus resultados educativos (calificaciones, sueldos, etc) en $\beta_i(\theta_i)a_i$. Manteniendo constante el número de horas que pasa estudiando, a mayor habilidad del estudiante, mayores son sus resultados.

Adicionalmente, hay efectos de los compañeros (positivos) entre el estudiante i y el estudiante $j \neq i$ capturados por $g_{i,j}(\theta)a_i a_j$. Manteniendo constante el número de horas de estudio, mientras más alta sea la habilidad de alguno de los estudiantes, afecta más positivamente a sus compañeros. En particular, si asumimos que $g_{i,j}(\theta) = \max\{\theta_i, \theta_j\}$, los estudiantes inteligentes tienen un efecto multiplicador en el resto de sus compañeros. Si en lugar asumimos $g_{i,j}(\theta) = \min_{k \in N} \theta_k$, los efectos de los compañeros son tan efectivos como el estudiante menos brillante de la clase.

Ejemplo 4 (Sentimientos, Ciclos Económicos y Producción Agregada)

Considerar una economía de islas a la Lucas Jr (1972) en la que la isla $i \in \mathbb{I} = [0, 1]$ tiene una probabilidad igual de ser enfrentada con cualquier otra isla $j \in \mathbb{I}$. Después del enfrentamiento, cada isla primero observa alguna información con respecto a la productividad de la isla $\tilde{\theta}_i$ y luego comercia con su compañero. La forma reducida del modelo se resume por la función de mejor respuesta

$$y_i = (1 - \alpha)\mathbb{E}_i[\theta_i] + \alpha\mathbb{E}_i[h(y_j, Y)]$$

donde y_i es la producción en la isla i y $Y = \int_0^1 y_j d_j$ es la producción agregada condicional a toda la información. Partimos de la premisa clásica dejando que el agregador $h(y_j, Y)$ también dependa de Y .

Angeletos y La'O (2013) utilizan el modelo anterior en un contexto dinámico para estudiar cómo los ciclos económicos se manejan por choques de sentimientos. Su mayor innovación es la estructura de información que captura la correlación en las creencias: en cada periodo $t = 1, 2, \dots$, la isla i recibe señales sobre el estado y su compañero en ese enfrentamiento de $x_{i1t} = \theta_{it} + \varepsilon_{i1t}$, $x_{i2t} = x_{j1t} + \varepsilon_{i2t}$, $x_{i3t} = x_{j2t} + \xi_t + \varepsilon_{i3t}$, donde $\varepsilon_{i1t}, \varepsilon_{i2t}, \varepsilon_{i3t}$ son términos idiosincráticos de ruido distribuidos (a través de las islas), normales con media 0 y varianzas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ iid. El choque de sentimiento ξ_t , el cual captura la correlación en las creencias, es común a todas las islas y distribuido $N(0, \sigma_\xi^2)$.

Si h es creciente y convexa en cada argumento y tiene diferencias crecientes en (y_j, Y) , entonces el juego corresponde a uno de los concursos de belleza generalizados descritos en el Ejemplo 1. El incremento de la precisión $1/\sigma_1$ de la señal x_{i1t} va a incrementar la dispersión de la producción $\{y_{jt}\}_{j \in \mathcal{I}}$ entre las islas y también lleva a un nivel mayor de producción agregada Y_t en cada periodo t .

Además, Angeletos y LaO muestran que siempre que $\sigma_2^2 > 0$ y $\sigma_\xi^2 > 0$, la producción y_{it} y Y_t varían con el sentimiento ξ_t . Por lo tanto, la economía muestra ciclos provocados por creencias exuberantes o pesimistas. Esto lleva a que la producción agregada $Y_t = Y(x_t, \xi_t) = \int_0^1 y_{it} di$ tenga más dispersión relativo a una economía sin x_{i3t} . De manera interesante, cuando $h(y_j, Y)$ tiene diferencias crecientes, la producción agregada tiene una tendencia mayor, $\bar{Y} = \mathbb{E}(Y_t)$ en el equilibrio del ciclo económico. En particular, los ciclos económicos pueden elevar la tendencia de la producción y permitir una inversión promedio y acumulación de capital mayores.

5 Aplicaciones

Consideramos dos aplicaciones para nuestro resultado principal en el contexto de un agente y dos aplicaciones de nuestro resultado en juegos bayesianos.

5.1 Aplicación: Subsidios Pigouvianos y Producción Monopolística

En el ejemplo de la Sección 2.1, consideramos el efecto de la calidad de la información en la decisión de producción de un monopolista en un ejemplo muy estilizado. En esta subsección consideramos el ejemplo en un contexto más general: un monopolista que produce $q \in [0, \bar{q}]$ enfrenta una curva de demanda inversa inclinada $P(q)$ y una función de costo $c(\theta, q)$ donde el parámetro $\theta \in \Theta$ es desconocido. El monopolista

tiene una creencia previa $\mu \in \Delta(\Theta)$. Cuando θ aumenta, el costo marginal decrece, es decir, $-c(\theta, q)$ tiene diferencias crecientes en (θ, q) . Asumimos que la ganancia del monopolista $\pi(\theta, q) = qP(q) - c(\theta, q)$ es estrictamente cóncava en q y permite una solución interior para cada $\theta \in \Theta$.¹⁹

Antes de tomar una decisión sobre la producción, el monopolista puede adquirir información de $\mathcal{P}$, un conjunto de estructuras de información que satisface (A.5). Asumimos que para cualquier $\Sigma_{\rho''}, \Sigma_{\rho'} \in \mathcal{P}$, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ o viceversa. Sea $\kappa : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ el costo de adquirir información con $\kappa(\rho'') \geq \kappa(\rho')$ cuando $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$.

Considerar un planificador social que no tiene la capacidad de regular precios ni cantidades. *¿Bajo qué condiciones el planificador social demanda más información que el monopolista?*²⁰

Sea $q^M(s; \rho)$ la cantidad óptima que produce el monopolista cuando observa la realización de una señal $s \in S$ de una estructura de información $\Sigma_{\rho} \in \mathcal{P}$. El problema ex-ante del monopolista es elegir una estructura de información que maximice

$$\int_{\Theta \times S} \pi(\theta, q^M(s; \rho)) dF(\theta, s; \rho) - \kappa(\rho).$$

En contraste, el planificador social toma en cuenta el excedente del consumidor. Sea $CS(q)$ el excedente del consumidor cuando el monopolista produce q . El pago ex-ante del planificador es dado por

$$\int_{\Theta \times S} \pi(\theta, q^M(s; \rho)) dF(\theta, s; \rho) + \int_S CS(q^M(s; \rho)) dF_S(s) - \kappa(\rho).$$

Así, el planificador tiene una demanda por información más alta que el monopolista cuando una mayor calidad de la información incrementa el excedente del consumidor esperado, es decir, cuando la información tiene una externalidad positiva en los consumidores.

Proposición 2 *Sea $-qP(q)/P(q) \leq 1$ y sea la función de ganancias $\pi \in \mathcal{U}^I$. Entonces el planificador social tiene una demanda por información más alta que el monopolista.*

Remark 4 *Las condiciones suficientes para $-qP(q)/P(q) \leq 1$ y $\pi \in \mathcal{U}^I$ son que la demanda inversa $P(q)$ es lineal y $-c(q, \theta) \in \mathcal{U}^I$.*

¹⁹Una condición suficiente es que $c(\theta, q)$ es convexa en q y $P(q)$ es decreciente y cóncava en q .

²⁰Athey y Levin (2017) consideran un problema similar. Sin embargo, en su aplicación, el planificador puede regular precios/cantidades así como la calidad de la información.

Con relación a la Sección 2.1, cuando $a \geq 0$ tenemos que $-c(q, \theta) \in \mathcal{U}^I$.²¹. Por lo tanto, dado que $P(q)$ es lineal, tenemos que $\pi \in \mathcal{U}^I$ y se mantiene la Proposición 2. Cuando $a < 0$ tenemos en cambio $\pi \in \mathcal{U}^D \setminus \mathcal{U}^I$ y la clasificación del valor social y el valor privado de la información es ambiguo.

Intuitivamente, $-qP(q)/P(q) \leq 1$ implica que cuando la cantidad producida aumenta, los consumidores obtienen más y más de las ganancias en bienestar que el monopolista. Por lo tanto, el excedente del consumidor es una función convexa de la cantidad. En otras palabras, el planificador social es más amante al riesgo que el monopolista, es decir, los consumidores (y el planificador) se benefician cuando el monopolista se vuelve más sensible con una media mayor a medida que la calidad de la información aumenta. Del Teorema 1, obtenemos el comportamiento de respuesta deseado cuando $\pi \in \mathcal{U}^I$.

5.2 Aplicación: Divulgación de la Información

En el juego de divulgación de la información de Rayo y Segal (2010) y el juego de persuasión bayesiana de Kamenica y Gentzkow (2011), un emisor tiene plena flexibilidad de qué información compartir con un receptor para persuadir al receptor de llevar a cabo una acción que es deseable para el emisor. Kamenica y Gentzkow brindan una herramienta para resolver el problema del emisor: primero caracterizan el valor interino del emisor como una función de la creencia posterior del receptor y luego toman la envoltura cóncava de la función de valor interino del emisor.

Sin embargo, la concavificación requiere una solución cerrada a la estrategia de optimización del receptor. Usualmente esto es solo posible cuando el conjunto de acciones es finito o cuando la estrategia óptima del receptor solo depende de la media posterior.²²

Partimos de ese enfoque y restringimos las preferencias del receptor a la clase que permite estática comparativa bayesiana no ambigua (Teorema 1), después caracterizamos las condiciones de las preferencias del emisor que brindan divulgación máxima o mínima en dos casos: cuando el emisor está restringido a un conjunto totalmente

²¹Cuando $a = 0$, $-c(q, \theta) \in \mathcal{U}^I \cap \mathcal{U}^D$

²²Ejemplos de artículos que usan estas condiciones simplificantes son [citeray10](#), [Bergemann y Morris \(2013\)](#), [Bergemann et al. \(2015\)](#), [Gentzkow y Kamenica \(2016\)](#), [Kolotilin \(2018\)](#), [Kolotilin et al. \(2017\)](#), [Lipnowski y Mathevet \(2017\)](#), [Taneva \(2017\)](#), [Li y Norman \(2018\)](#), [Dworczak y Martini \(2018\)](#).

ordenado de señales y cuando permitimos una completa flexibilidad en políticas de divulgación.

Sea el pago del emisor $v : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que es continuo en a para todo $\theta \in \Theta$. El pago del receptor está dado por $u : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface (A.1)-(A.4). Para el siguiente resultado asumimos que el emisor está restringido a $\mathcal{P}$, un conjunto de estructuras de información que satisfacen (A.5) (recordar que una señal satisface (A.5) si genera posteriores que están ordenadas en el primer orden estocástico).

El problema del receptor está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{\Sigma_\rho \in \mathcal{P}} V(\rho) &= \int_{\Theta \times S} v(\theta, a(s, \rho)) dF(\theta, s; \rho) \quad s.t. \\ a(s; \rho) &= \arg \max_{a \in A} \int_{\Theta} u(\theta, a) \mu(d\theta|s; \rho) \quad \forall \Sigma_\rho \in \mathcal{P}, \forall s \in S. \end{aligned}$$

Proposición 3 *Asumir que $v(\theta, a)$ satisface las diferencias crecientes (diferencias decrecientes) en $(\theta; a)$ y se mantiene alguna de las siguientes:*

- i) $u \in \mathcal{U}^I$ y $v(\theta, a)$ es creciente y convexa (decreciente y cóncava) en a ,
- ii) $u \in \mathcal{U}^D$ y $v(\theta, a)$ es decreciente y convexa (creciente y cóncava) en a o,
- iii) $u \in \mathcal{U}^I \cap \mathcal{U}^D$ y $v(\theta, a)$ es convexa (cóncava) en a .

Para estructuras de información $\Sigma_{\rho''}, \Sigma_{\rho'} \in \mathcal{P}$, $V(\rho'') \geq V(\rho')$ ($V(\rho'') \leq V(\rho')$) if $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$.

Por lo tanto, cuando el emisor está restringido a políticas de divulgación en $\mathcal{P}$, la proposición brinda las condiciones bajo las cuales se obtiene la divulgación de la información máxima o mínima.

La Proposición 3 se puede ver como la caracterización de conflicto mínima y máxima entre un emisor y un receptor: si su deseo de correlacionar acciones y estados se mueve en la misma dirección (opuesta) y al receptor le gusta (disgusta) la dispersión de acciones habrá completa (nula) divulgación.²³

Remark 5 -

Las condiciones en la Proposición 3 también están relacionadas a la Observación 1

²³Notar que siempre que el emisor no cumpla con alguna de las condiciones i,ii,iii, hay un receptor que las satisface para el que hay divulgación interior. En ese sentido las condiciones para el emisor son también necesarias.

en Kamenica y Gentzkow (2011)) ya que son condiciones suficientes para que $\hat{v}(\mu) = \int_{\Theta} v(\theta, a^*(\mu)) \mu(d\theta)$ sea una función cóncava o convexa sobre las creencias que están clasificadas estocásticamente de primer orden —una debilitación de la convexidad y la concavidad respectivamente.

Cuando la revelación completa de información es una política disponible al emisor, brindamos un resultado que se mantiene independientemente de (A.5) y el orden estocástico supermodular. Bajo las condiciones correspondientes de pagos de la Proposición 3, la revelación completa de la información es la política óptima de persuasión sobre todas las políticas de persuasión sin restricción (todas las estructuras de información).

Teorema 3 *Supongamos que $v(\theta, a)$ satisface las diferencias crecientes en (θ, a) y que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- i. $u \in \mathcal{U}^I$ y $v(\theta, a)$ es creciente y convexa en a ,*
- ii. $u \in \mathcal{U}^D$ y $v(\theta, a)$ es decreciente y convexa en a o,*
- iii. $u \in \mathcal{U}^I \cap \mathcal{U}^D$ y $v(\theta, a)$ es convexa en a .*

Entonces la revelación completa de información es la política de divulgación óptima entre todas las señales posibles.

El Teorema 3 procede de un razonamiento similar al de las demostraciones de la Proposición 1 y el Corolario 1: la estructura de información completa es más informativa (en orden de Blackwell) que cualquier otra señal y trivialmente induce posteriores que satisfacen (A.5) (porque Θ es un conjunto ordenado). Así, cuando el emisor puede usar una estructura de información cualquiera, el Corolario 1 y las condiciones del Teorema 3 implican que existe un conflicto mínimo entre el emisor y el receptor, estableciendo la optimalidad de la completa divulgación.

Notar también que cuando el emisor tiene completa flexibilidad, algunas de las señales factibles no satisfacen (A.5) y no pueden ser ordenadas en el orden estocástico supermodular. Sin embargo, en el caso especial cuando solo hay dos posibles estados del mundo, la Proposición 3 implica ya sea completa o nula divulgación. La razón es que (A.5) siempre se satisface cuando hay dos posibles estados, lo que implica que cualquier estructura de información es dominada tanto por la estructura de información completa y domina la estructura de información nula en el orden estocástico supermodular.

Ejemplo 5 (El Problema de Agencia en los Portafolios)

Para ilustrar el valor en la Proposición 3, considerar el problema de administración de portafolios entre un asesor financiero neutral al riesgo (emisor) y un inversionista adverso al riesgo (receptor) con una utilidad Bernoulli $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Hay dos activos: dinero que produce una tasa de rendimiento de cero y un activo riesgoso que produce una tasa de retorno de $\tilde{x}$. El retorno aleatorio en el activo riesgoso se extrae de un soporte en $\underline{x} < 0 < \bar{x}$ de acuerdo a una función de distribución absolutamente continua G_θ con densidad g_θ . El estado del mundo θ captura la distribución subyacente de retornos del activo riesgoso.

Supongamos que para $\theta'' > \theta'$,

$$\int_{\underline{x}}^z x [dG_{\theta''}(x) - dG_{\theta'}(x)] \geq 0, \quad (\text{RS})$$

para todo $z \in [\underline{x}, \bar{x}]$ con igualdad cuando $z = \bar{x}$.²⁴

Supongamos que el asesor financiero obtiene una cuota de $\pi \in (0, 1)$ del retorno del activo riesgoso, donde π representa a las tarifas de administración. Por lo tanto, si el inversionista ocupa una fracción $a \in [0, 1]$ de su riqueza $W > 0$ en el activo riesgoso, su pago ex-post es

$$u(\theta, a) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \vartheta \left((1-a)W + aW(1+x(1-\pi)) \right) dG_\theta(x),$$

mientras que el pago ex-post del asesor financiero está dado por

$$v(\theta, a) = aW\pi \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} x dG_\theta(x).$$

Ex-ante, el valor de θ es desconocido y tanto el emisor como el receptor tienen una creencia previa común $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$. El asesor financiero elige qué información compartir con el inversionista para influir en qué tanto se invierte en el activo riesgoso. ¿Cuándo es mejor que el asesor financiero comparta más información sobre el activo riesgoso?

La estrategia óptima del inversionista no está caracterizada por un corte de la media

²⁴Rothschild y Stiglitz (1971) muestran que todos los agentes adversos al riesgo invierten más en un activo riesgoso distribuido de acuerdo a $G_{\theta''}$ que a $G_{\theta'}$ si y solo si (RS) se cumple. Nosotros asignamos su agente a nuestro problema de administración de portafolios.

de sus creencias posteriores y depende de momentos mayores de su posterior (no solo su media posterior). Así, el ejemplo no cumple con los supuestos simplificados usados con frecuencia en la literatura de persuasión para usar el enfoque de concavificación.

Sin embargo, en nuestro ejemplo de administración de portafolios, (RS) implica que $u(\theta, a)$ tiene diferencias crecientes en $(\theta; a)$ y que el asesor financiero tiene un pago $v(\theta, a)$ que es independiente del estado, lineal y creciente en a . Podemos fácilmente aplicar la Proposición 3 y concluir que el asesor financiero prefiere brindar al inversionista una calidad mayor (menor) de información si $u \in \mathcal{U}^I$ ($u \in \mathcal{U}^D$). Por ejemplo, cuando la utilidad Bernoulli del inversionista satisface la condición de prudencia relativa.²⁵

$$-\frac{\vartheta'''(x)}{\vartheta''(x)}x \geq 1,$$

es directo probar que $u \in \mathcal{U}^I$ (utilizando el teorema de segundo valor medio). Así, el asesor financiero prefiere comunicar toda la información al inversionista. Adicionalmente, del Teorema 3, la divulgación completa de información es la política de persuasión óptima sobre todas las estructuras de información.

5.3 Aplicación: Intercambio de Información en Juegos Supermodulares

Considerar un juego bayesiano con valor común de dos jugadores con $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}$. El juego básico está dado por $G \triangleq (A_i, u_{i=1,2}^i, \mu^0)$ donde el pago $u^i : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ satisface (A.7)-(A.10) y la creencia previa común $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$ satisface trivialmente (A.6).

Antes de jugar el juego básico, cada jugador i observa una señal de una estructura de información $\Sigma_{\rho_i} \in \mathcal{P}_i$, donde $\mathcal{P}_i$ denota el conjunto de estructuras de información. Asumimos que cada $\Sigma_\rho \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ satisface (A.11)-(A.13). Además, para cada $i = 1, 2$ y dos estructuras de información cualesquiera $\Sigma_{\rho_i}, \Sigma_{\bar{\rho}_i} \in \mathcal{P}_i$, se cumple ya sea $\rho_i \succeq_{spm} \bar{\rho}_i$ o viceversa. Sea $\Sigma_{\bar{\rho}_i} \in \mathcal{P}_i$ la estructura de información completa, es decir, una estructura de información que correlaciona perfectamente la señal y el estado.

Supongamos que el jugador 1 está dotado exógenamente con $\Sigma_{\rho_1} = \Sigma_{\bar{\rho}_1}$, es decir, el jugador 1 observa la realización de $\tilde{\theta}$. En contraste, el jugador 2 no observa una señal exógena. En su lugar, el jugador 1 elige una estructura de información $\Sigma_{\rho_2} \in \mathcal{P}_2$

²⁵Ver Kimball (1990) para un análisis del coeficiente de prudencia relativa y su efecto en ahorros preventivos.

para el jugador 2. En otras palabras, antes de conocer el estado, el jugador 1 se compromete a cuánta información va a compartir con el jugador 2 eligiendo una política de divulgación.²⁶ Cada elección de Σ_{ρ_2} define un juego bayesiano $\mathcal{G} \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}, G)$ como se muestra en la Figura 5.

Fig. 5: Programación del juego de intercambio de información

Para cada juego bayesiano $\mathcal{G}_\rho$, asumimos que los jugadores pueden concentrar en el ENB monótono máximo $a^*(\rho) = (a_1^*(\rho), a_2^*(\rho))$ con $a_i^*(\cdot; \rho) : S_i \rightarrow A_i$. Dado que $\tilde{s}_1$ está perfectamente correlacionado con $\tilde{\theta}$, con un poco de abuso de notación, el pago en el ENB del jugador 1 está dado por

$$U_1(\rho) = \int_{\Theta \times S_2} u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) dF(\theta, s_2; \rho_2).$$

¿Cuánta información querría compartir el jugador 1 con el jugador 2? La pregunta del intercambio de información en juegos bayesianos ha sido explorada dentro del contexto de competencia entre firmas empezando con Novshek y Sonnenschein (1982), Clarke (1983), Vives (1984), Gal-Or (1985), y Raith (1996). La literatura en general muestra que la divulgación completa de la información es óptima para el caso de competencia entre firmas con complementariedades estratégicas (ej. competencia de Bertrand diferenciada). Más recientemente, Bergemann y Morris (2013) brinda un análisis comprensivo de intercambio de información en concursos de belleza y similarmente muestran que la divulgación de información completa es óptima cuando existen complementariedades estratégicas entre los jugadores.

Sin embargo, la literatura previa se ha concentrado en juegos lineal cuadráticos y estados y señales distribuidos normales. En esta aplicación, en su lugar usamos la estática comparativa desarrollada en el Teorema 2 para extender la optimalidad de

²⁶Otra interpretación es que el jugador 1 tiene el rol del "emisor" y el jugador 2 el rol del "receptor" en un juego de persuasión bayesiana como en la subsección 5.2. La única diferencia aquí es que tanto el emisor como el receptor llevan a cabo una acción.

la divulgación completa de la información más allá de juegos con mejores respuestas lineales.

Proposición 4 *Supongamos que $u^1 : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las diferencias crecientes en (θ, a_1, a_2) y se mantiene alguna de las siguientes condiciones:*

- i. $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ y u^1 es creciente y convexa en a_2 ,*
- ii. $u^i \in \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ y u^1 es decreciente y convexa en a_2 o*
- iii. $u^i \in \Gamma^I \cap \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ y u^1 es convexa en a_2 .*

Entonces, es óptimo que el jugador 1 elija $\Sigma_{\rho_2} = \Sigma_{\bar{\rho}_2}$.

El juego de proyecto conjunto del Ejemplo 2 y el juego de redes del Ejemplo 3 satisfacen la primera condición suficiente y el modelo de competencia diferenciada de Bertrand con demanda lineal (ej. Raith (1996)) satisface la tercera condición suficiente.²⁷ Por lo tanto, en los tres casos podemos aplicar la Proposición 4 para concluir que es óptimo ex-ante para el jugador 1 el compartir completamente su información con el jugador 2.

Es importante notar que, aún con la generalización de los juegos lineal cuadráticos, la aplicación en esta subsección es un caso especial del modelo de intercambio de información estándar. El jugador 1 observa todo acerca del estado (de valor común) mientras que el jugador 2 no. Así, solo el jugador 1 está en una posición para compartir información. En Leal-Vizcaíno y Mekonnen (2018), generalizamos el resultado de la Proposición 4 a un contexto en donde cada jugador recibe una señal exógena y decide cuánta información compartir con su oponente.²⁸ Establecemos que el resultado del intercambio de información completo es robusto para diferentes especificaciones y estructuras de información y pagos. Además, mostramos que es una estrategia dominante y, por lo tanto, el único resultado de Nash del juego de intercambio de información.

²⁷Bertrand lineal diferenciado: para cada jugador $i \in N$, la función de ganancias está dada por

$$u^i(\theta, a) = (a_i - c_i) \left(\alpha_i(\theta) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} a_j - \beta_{ii} a_i \right),$$

donde a es el vector de precios, $\alpha_i(\theta)$ es un cambio en la demanda con $\alpha'_i(\cdot) \geq 0$, $c_i > 0$ es el costo marginal y $\beta_{ij} \geq 0 > \beta_{ii} \forall j \neq i$.

²⁸La generalización requiere un orden más fuerte que las estructuras de información. Por lo tanto, los resultados en Leal-Vizcaíno y Mekonnen (2018) no son una aplicación inmediata del Teorema 2.

5.4 Adquisición de la Información y el Valor de la Transparencia

Los oligopolistas están afectados por muchas variables que no pueden observar o estimar con precisión: su propia función de costos, la función de costos de sus rivales, la demanda en un mercado en particular en una fecha en particular, etc. En la medida que estas piezas de información son privadas y sujetas a aprendizaje, debemos contemplar el proceso de acopio de la información como un juego de adquisición de información.

Así como los costos fijos o los retornos crecientes pueden generar una estructura de mercado imperfectamente competitiva al limitar la entrada, la información superior de una empresa incumbente puede constituir una barrera a la entrada. En principio, el caso de la adquisición de la información no es diferente al tratamiento clásico del capital o la capacidad de inversión cuando se estudia la entrada, acomodación y salida en mercados oligopólicos. Sin embargo, mostramos cómo el invertir en información difiere de otros tipos de inversión, tales como la capacidad, aprendizaje al hacer, publicidad, etc. (Bulow et al., 1985).

Concentramos nuestro análisis en la adaptación a la entrada.²⁹ Descomponemos el impacto de la adquisición de la información en las ganancias de la empresa incumbente en dos efectos: un efecto directo (que siempre es no negativo (Blackwell, 1951, 1953)) de mejorar la toma de decisiones de la empresa incumbente y un efecto indirecto (que puede ser positivo o negativo) proveniente de la respuesta de la empresa entrante al ajustar su estrategia ante la información de la empresa incumbente. Llamamos al efecto indirecto el *valor de la transparencia* y mostramos que es positivo o negativo dependiendo de (i) la sensibilidad de la empresa entrante a cambios en la calidad de la información de la empresa incumbente y (ii) el signo de la externalidad impuesta en la empresa incumbente por la sensibilidad de la empresa entrante.

El análisis de adaptación a la entrada y el valor de la transparencia es formalmente equivalente a caracterizar la demanda de información en juegos de adquisición de la información abiertos y encubiertos. La diferencia en el valor de la información en estos juegos es precisamente el valor de la transparencia. El entendimiento sobre qué guía la diferencia entre las demandas de información abiertas y encubiertas es de interés independiente para los teóricos que estudian el valor de la información, quienes seguido

²⁹ Ante una amenaza a la entrada hay tres tipos de comportamientos que puede presentar la empresa incumbente: la entrada puede ser bloqueada, desalentada o acomodada. Ver Tirole (1988).

centran su atención a uno de los dos juegos (encubierto o abierto) por simplicidad técnica.

5.4.1 Preliminares

Consideramos un juego bayesiano de dos jugadores compuesto de dos etapas: una etapa de adquisición de información seguida de un juego básico $G \triangleq (\{A_i, u^i\}_{i=1,2}, \mu^0)$ donde el pago $u^i : \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ satisface (A.7)-(A.10) y la prior común $\mu^0 \in \Delta(\Theta)$ satisface (A.6).

En la etapa de adquisición de información, el jugador 2 tiene una estructura de información Σ_{ρ_2} exógenamente dada. Por otro lado, el jugador 1 tiene permitido elegir una estructura de información de un conjunto $\mathcal{P}_1$ tal que para cualquier $\Sigma_{\rho_1} \in \mathcal{P}_1$, $\Sigma_{\rho} \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2})$ satisface (A.11)-(A.13). Adicionalmente, asumimos que para cualquier par de estructuras de información $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_1} \in \mathcal{P}_1$ se cumple ya sea $\rho_1 \succeq \rho_1$ o viceversa. Sea $\kappa : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{R}$ el costo de adquirir información con $\kappa(\rho_1) \geq \kappa(\rho_1)$ cuando $\rho_1 \succeq_{spm} \rho_1$.

Durante toda esta sección, solo consideramos la adquisición de información en estrategias puras en la primera etapa.³⁰ También asumimos que los jugadores coordinan en el ENB monótono máximo de estrategia pura en la segunda etapa.

Para entender mejor la diferencia entre adquisición de información abierta y encubierta, supongamos que inicialmente el jugador 1 está dotado de una estructura de información Σ_{ρ_1} y es de conocimiento común, es decir, ambos jugadores saben que el juego bayesiano es $\mathcal{G}_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}, G)$. Sea $(a_1^*(\rho'), a_2^*(\rho'))$ el ENB resultante de $\mathcal{G}_{\rho'}$. Consideremos los siguientes dos escenarios como un ejercicio mental.

En el primer escenario, el jugador 1 tiene permitido ya sea mantenerse en Σ_{ρ_1} o cambiarse a Σ_{ρ_1} . El jugador 2 no observa si el jugador 1 se cambia o no. Este escenario ejemplifica el juego de adquisición de información abierto. Si el jugador 1 se cambia a $\Sigma_{\rho_1'}$, el juego cambia de $\mathcal{G}_{\rho'}$ a $\mathcal{G}_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho_1'}, \Sigma_{\rho_2}, G)$ y el ENB resultante es $(a_1^*(\rho''), a_2^*(\rho''))$.

En el segundo escenario, el jugador 1 también puede cambiarse a $\Sigma_{\rho_1'}$ pero el jugador 2 no sabe que el jugador 1 puede cambiarse ni observa su elección. Este escenario ejemplifica el juego de adquisición de información encubierto. Si el jugador 1 se cambia, el jugador 2 de manera inocente va a creer que el juego aún es $\mathcal{G}_{\rho'}$ y continúa jugando $a_2^*(\rho')$. Por el otro lado, el jugador 1 responde de la mejor manera a $a_2^*(\rho')$ jugando la

³⁰Para adquisición de información abierta esto es sin pérdida ya que el jugador 2 observa la estructura de información elegida antes de la segunda etapa. Por lo tanto, el jugador 1 aleatoriza solo cuando es indiferente.

estrategia $a_1^{BR}(a_2^*(\rho'), \rho'')$.

Dado que deseamos distinguir entre la elección de información del jugador 1 y las creencias del jugador 2, denotamos el resultado actual de la etapa de adquisición de información con $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ y las creencias del jugador 2 sobre el resultado de la etapa de adquisición de información con $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \rho_2)$. Decimos que el jugador 2 tiene creencias correctas cuando $\hat{\rho}_1 = \rho_1$ (que debe ser el caso en cualquier equilibrio).

Dado el resultado de la primera etapa ρ y la creencia del jugador 2 $\hat{\rho}$, sea $U_1(\rho; \hat{\rho}) - \kappa(\rho_1)$ el pago ex-ante del jugador en el juego encubierto (segundo escenario), donde

$$U_1(\rho; \hat{\rho}) = \int_{\Theta \times S} u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) d\mathbf{F}(\theta, s; \rho).$$

En el juego abierto (primer escenario), el jugador 2 tiene creencias correctas. Por lo tanto, dado el resultado de la primera etapa ρ , el pago al jugador 1 en el juego abierto es $U_1(\rho; \rho) - \kappa(\rho_1)$ con

$$\begin{aligned} U_1(\rho; \rho) &= \int_{\Theta \times S} u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\rho), \rho), a_2^*(s_2; \rho)) d\mathbf{F}(\theta, s; \rho) \\ &= \int_{\Theta \times S} u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) d\mathbf{F}(\theta, s; \rho), \end{aligned}$$

donde la igualdad se sigue de $a_1^{BR}(a_2^*(\rho), \rho) = a_1^*(\rho)$ por la definición de ENB.

Definición 5 *Dado el resultado de la primera etapa ρ y las creencias del jugador 2 $\hat{\rho}$, el valor de la transparencia está dado por:*

$$VT(\rho; \hat{\rho}) = U_1(\rho; \rho) - U_1(\rho; \hat{\rho}).$$

En otras palabras, $VT(\rho, \hat{\rho})$ representa la ganancia o pérdida del jugador 1 por compartir con el jugador 2 su elección de la primera etapa, Σ_{ρ_1} , en lugar de dejar que el jugador 2 crea incorrectamente que su elección de la primera etapa es $\Sigma_{\hat{\rho}_1}$. El valor de la transparencia no captura ninguna ventaja de información sustantiva; la estructura de información elegida por el jugador 1 en ambos casos es Σ_{ρ_1} . En su lugar, captura los efectos indirectos de la información proveniente de un cambio en las creencias del jugador 2 y por lo tanto, su respuesta estratégica.³¹

³¹El trato que le damos al valor de la transparencia está poco conectado con las condiciones de con-

5.4.2 Valor y Demanda de Información

Antes de comentar cómo caracterizar el valor de la transparencia, presentamos por qué es un concepto económico interesante. En particular, mostramos que el valor de la transparencia es útil para responder a las siguientes preguntas: *¿Cuándo es la adquisición de información de mejor calidad sin costo pero abierta siempre beneficiosa para el jugador 1? ¿El jugador 1 adquiere más información cuando la adquisición es abierta o cuando es encubierta?*

En juegos encubiertos, la información solo tiene un efecto directo, es decir, más información permite al jugador 1 tomar mejores decisiones en la segunda etapa. Por lo tanto, el valor de la información sin costo nunca es negativa (Neyman, 1991).

Mientras que la información tiene el mismo efecto directo beneficioso en juegos abiertos, también hay efectos estratégicos; el jugador 2 observa cuánta información adquiere el jugador 1 y responde en la segunda etapa. Si el jugador 2 determina que es óptimo elegir una acción desfavorable (castigar al jugador 1) en el equilibrio de la segunda etapa siempre que el jugador 1 adquiera más información, entonces el valor de la información en juegos abiertos puede ser negativa (Kamien et al., 1990). No obstante, mostramos que el valor de información *abierta* no puede ser negativo si el jugador 1 se beneficia de divulgar al jugador 2 que ha adquirido una calidad de información mayor.

Proposición 5 *Para dos estructuras de información cualesquiera $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\hat{\rho}_1} \in \mathcal{P}_1$, supongamos que $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1$ implica $VT(\rho; \hat{\rho}) \geq 0$. Entonces $U_1(\rho; \rho) \geq U_1(\hat{\rho}; \hat{\rho})$.*

Proof. Para dos estructuras de información $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\hat{\rho}} \in \mathcal{P}_1$ podemos escribir

$$U_1(\rho; \rho) - U_1(\hat{\rho}; \hat{\rho}) = \underbrace{U_1(\rho; \rho) - U_1(\rho; \hat{\rho})}_{=VT(\rho; \hat{\rho})} + \underbrace{U_1(\rho; \hat{\rho}) - U_1(\hat{\rho}; \hat{\rho})}_{\text{valor de la información encubierta}}.$$

Amir y Lazzati (2016) (Proposición 7) muestran que el segundo término es no negativo cuando $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}$, es decir, el valor de la información encubierta es no negativo cuando la calidad de la información aumenta. Por lo tanto, si $VT(\rho; \hat{\rho}) \geq 0$, podemos concluir que el valor de la información abierta es también no negativo cuando la calidad de la información aumenta. ■

formidad de expectativas en Tirole (2015). La conformidad de expectativas implica que el jugador 1 está más dispuesto a adquirir Σ_{ρ_1} sobre $\Sigma_{\hat{\rho}_1}$ cuando el jugador 2 cree que el jugador 1 va a adquirir Σ_{ρ_1} . Es sencillo mostrar que la conformidad de expectativas es equivalente a $VT(\rho; \hat{\rho}) + VT(\hat{\rho}; \rho) \geq 0$.

Para responder la segunda pregunta sobre la demanda de información, sean $\Sigma_{\rho_1^c}$ y $\Sigma_{\rho_1^o}$ las estructuras de información adquiridas en un equilibrio de Nash de estrategia pura (ENEP) de juegos abiertos y encubiertos.³² Específicamente, $\Sigma_{\rho_1^c}$ es una solución a

$$\max_{\Sigma_{\rho_1} \in \mathcal{P}} U_1(\rho; \rho^c) - \kappa(\rho_1).$$

En otras palabras, dado que el jugador 2 cree que el jugador 1 elige $\Sigma_{\rho_1^c}$ en equilibrio, es óptimo para el jugador 1 elegir $\Sigma_{\rho_1^c}$. En contraste, $\Sigma_{\rho_1^o}$ resuelve

$$\max_{\Sigma_{\rho_1} \in \mathcal{P}} U_1(\rho; \rho) - \kappa(\rho_1).$$

En otras palabras, $\Sigma_{\rho_1^o}$ es óptimo para el jugador 1 después de tomar en cuenta que el jugador 2 va a observar la estructura de información elegida en la primera etapa y va a responder a ella en la segunda. Mostramos que siempre que el valor de la transparencia es no negativo, el jugador 1 adquiere más información en juegos abiertos que en juegos encubiertos, sin importar la función de costos.

Proposición 6 *Para dos estructuras de información cualesquiera $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\hat{\rho}_1} \in \mathcal{P}_1$, sea $VT(\rho; \hat{\rho}) \geq 0$ si y solo si $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1$. Entonces $\rho_1^o \succeq_{spm} \rho_1^c$.*

Proof. Supongamos $\Sigma_{\rho_1^c} \neq \Sigma_{\rho_1^o}$ (en otro caso, es trivial).³³ Por definición,

$$\begin{aligned} U_1(\rho^c; \rho^c) - \kappa(\rho_1^c) &\geq U_1(\rho^o; \rho^c) - \kappa(\rho_1^o) \\ U_1(\rho^o; \rho^o) - \kappa(\rho_1^o) &\geq U_1(\rho^c; \rho^c) - \kappa(\rho_1^c). \end{aligned}$$

Combinando las dos desigualdades, obtenemos que $U_1(\rho^o; \rho^o) - U_1(\rho^o; \rho^c) = VT(\rho^o; \rho^c) \geq 0 \Leftrightarrow \rho_1^o \succeq_{spm} \rho_1^c$. ■

³²Hemos hecho un supuesto implícito de que ENEP existe en el juego de adquisición de información encubierto. Establecer que tal equilibrio existe está más allá del alcance de esta sección. Sin embargo, cuando κ es una función constante, $U_1(\rho; \hat{\rho}) - \kappa(\rho_1)$ satisface un cruce único en $(\rho_1; \hat{\rho}_1)$, es decir, dados $\rho_1'' \succeq_{spm} \rho_1'$ y $\hat{\rho}_1'' \succeq_{spm} \hat{\rho}_1'$, $U_1(\rho_1''; \hat{\rho}_1'') - \kappa(\rho_1'') \geq U_1(\rho_1'; \hat{\rho}_1') - \kappa(\rho_1') \implies U_1(\rho_1''; \hat{\rho}_1'') - \kappa(\rho_1'') \geq U_1(\rho_1'; \hat{\rho}_1') - \kappa(\rho_1')$. Entonces, con supuestos apropiados en $\mathcal{P}$, podemos usar Milgrom y Shannon (1994) y Athey (2001) para establecer la existencia de ENEP en el juego encubierto.

³³El supuesto implícito de resultados de equilibrio único en el resultado de arriba solo se hace para simplificar su exposición. el antecedente de la Proposición 6 implica que $VT(\hat{\rho}; \hat{\rho}) = 0$ y $VT(\rho; \hat{\rho}) \geq 0$ para cualquier $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1$. De esta manera podemos aplicar las herramientas ya conocidas de estática comparativa monótona para funciones de cruce único para mostrar que el conjunto de soluciones para el problema de maximización de equilibrios abiertos domina al conjunto de soluciones para equilibrios encubiertos.

5.4.3 Caracterizando el Valor de la Transparencia

Ahora caracterizamos el valor de la transparencia que depende de la sensibilidad del jugador 2 y la externalidad que impone la sensibilidad del jugador 2 en el jugador 1.

Teorema 4 *Supongamos ya sea que el juego básico G es uno de valores privados independientes o $u^1(\theta, a)$ tiene diferencias crecientes en (θ, a_1, a_2) . Adicionalmente, supongamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- i. $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ y u^1 es creciente y convexa en a_2 ,*
- ii. $u^i \in \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ y u^1 es decreciente y convexa en a_2 o*
- iii. $u^i \in \Gamma^I \cap \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ y u^1 es convexa en a_2*

Entonces para dos estructuras de información cualesquiera $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\hat{\rho}_1} \in \mathcal{P}_1$, $VT(\rho; \hat{\rho}) \geq 0$ si y solo si $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1$.

El juego de proyecto conjunto del Ejemplo 2, el juego de redes del Ejemplo 3 y los modelos de competencia a la Bertrand con productos diferenciados (Raith, 1996) satisfacen las condiciones del Teorema 4. Por lo tanto, aplicando la Proposición 6, podemos concluir que la demanda de información en estos ejemplos es más alta cuando la adquisición de la información es abierta.

Para obtener un poco de intuición, recordar que $VT(\rho; \hat{\rho}) = U_1(\rho; \rho)U_1(\rho; \hat{\rho})$ está dado por

$$\int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho).$$

Considerar el caso de valores privados independientes y sea $S_2 = [0, 1]$. Tomando una expansión de Taylor de primer orden, podemos aproximar el valor de la transparencia como

$$\begin{aligned} & \approx \underbrace{\int_{\Theta \times S} u_{a_1}^1(\theta_1, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) (a_1^*(s_1; \rho) - a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho)) d\mathbf{F}(\theta, s; \rho)}_{=0 \text{ by optimality in second stage}} \\ & + \int_0^1 \underbrace{\left[\int_{\Theta_1 \times S_1} u_{a_2}^1(\theta_1, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) dF(\theta_1, s_1; \rho_1) \right]}_{\triangleq \zeta(s_2)} (a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho})) dF_{S_2}(s_2). \end{aligned}$$

Las condiciones en el Teorema 4 conectan el signo del valor de la transparencia con la sensibilidad del jugador 2, $a_2^*(\rho) - a_2^*(\hat{\rho})$, el tipo de externalidad que la acción del jugador 2 impone en el jugador 1, $\text{signo}(u_{a_2}^1)$ y la actitud de riesgo del jugador 1 ante la acción del jugador 2, $\text{signo}(u_{a_2 a_2}^1)$.

Por ejemplo, suponiendo que la condición i. del Teorema 4 se cumple. Como $u^1(\theta_1, a)$ es creciente y convexa en a_2 , $\zeta(s_2)$ es no negativa y creciente en s_2 . Adicionalmente, del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ implica que el jugador 2 se vuelve más sensible con una media mayor cuando la calidad de la información del jugador 1 aumenta. Del Lema 1,

$$\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1 \implies \int_t^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) dF_{S_2}(s_2) \geq 0$$

para todo $t \in [0, 1]$. Por el Teorema del segundo valor medio, existe alguna $t^* \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} VT(\rho; \hat{\rho}) &\approx \int_0^1 \zeta(s_2) \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) dF_{S_2}(s_2) \\ &= \zeta(1) \int_{t^*}^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) dF_{S_2}(s_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Para el caso de valores independientes privados, el Teorema 4 puede ser generalizado a la taxonomía mostrada en la Figura 6. Las primeras dos columnas describen cómo el jugador 2 responde cuando la estructura de información cambia de $\Sigma_{\hat{\rho}}$ a Σ_{ρ} . Las siguientes dos columnas son supuestos ubicados en la función de utilidad del jugador 1. La última columna presenta el signo resultante del valor de la transparencia. La primera, tercera y quinta fila de la Figura 6 corresponden a las condiciones i, ii y iii del Teorema 4, respectivamente. Por ejemplo, la quinta fila de la Figura 6 establece que si un cambio de Σ_{ρ_1} a $\Sigma_{\hat{\rho}_1}$ conduce a una extensión que conserva la media de las acciones del jugador 2 (*cst* significa media constante) y si la utilidad del jugador 1 es convexa en a_2 (sin más restricciones para $\text{signo}(u_{a_2}^1)$), entonces el valor de la transparencia $VT(\rho; \hat{\rho})$ es no negativo.

$a_2(\rho) - a_2(\hat{\rho})$		Externalidad		Transparencia
sensibilidad	promedio	$\text{signo}(u_{a_2}^1)$	$\text{sign}(u_{a_2 a_2}^1)$	$VT(\rho; \hat{\rho})$
$\nearrow$	$\nearrow$	+	+	+
$\nearrow$	$\nearrow$	-	-	-
$\nearrow$	$\searrow$	-	+	+
$\nearrow$	$\searrow$	+	-	-
$\nearrow$	<i>cst</i>	.	+	+
$\nearrow$	<i>cst</i>	.	-	-
$\searrow$	$\nearrow$	+	-	+
$\searrow$	$\nearrow$	-	+	-
$\searrow$	$\searrow$	-	-	+
$\searrow$	$\searrow$	+	+	-
$\searrow$	<i>cst</i>	.	-	+
$\searrow$	<i>cst</i>	.	+	-

Fig. 6: Una taxonomía del valor de la transparencia para valores privados independientes.

5.4.4 Relación a los Efectos Estratégicos de la Inversión en Competencia de Empresas

La caracterización del valor de la transparencia está relacionada con la taxonomía de la conducta estratégica en la competencia entre empresas estudiada por Fudenberg y Tirole (1984) y Bulow et al. (1985).³⁴ Aquí seguimos el tratamiento estilo libro de texto de Tirole (1988) y solo consideramos el caso de ajuste a la entrada a un duopolio bajo información completa.

Hay dos periodos y dos empresas, una incumbente (empresa 1) y una entrante (empresa 2). En el primer periodo, la empresa incumbente elige un nivel de inversión $K_1 \in \mathbb{R}$, que la empresa entrante observa. El término inversión se usa en un sentido amplio y puede representar, por ejemplo, inversión en investigación y desarrollo que disminuya los costos marginales de la incumbente o publicidad que captura una porción del mercado.

En el segundo periodo, ambas empresas compiten ya sea en cantidades (sustitutos estratégicos) o en precios (complementos estratégicos). Sea $(a_1^*(K_1), a_2^*(K_1))$ el equilibrio de Nash resultante del segundo periodo después de que la empresa incumbente elige

³⁴Para un estudio completo de los diferentes ejemplos y aplicaciones, recomendamos Shapiro (1989).

Para un estudio más reciente que utilice las herramientas de juegos supermodulares, ver Vives (2001).

K_1 en el primer periodo. El pago de la incumbente de elegir un nivel de inversión K_1 está dado por $U_1(K_1, a_1^*(K_1), a_2^*(K_1))$.

Fudenberg y Tirole (1984) muestran que el efecto marginal total en el pago de la incumbente por incrementar su inversión puede descomponerse en

$$\frac{dU_1}{dK_1} = \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial K_1}}_{\text{direct effect}} + \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial a_1} \frac{da_1^*}{dK_1}}_{\substack{=0 \\ \text{by Envelope theorem}}} + \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial a_2} \frac{da_2^*}{dK_1}}_{\text{strategic effect}}.$$

value of "covert" investment

Incrementar el nivel de la inversión tiene un efecto directo en el pago a la empresa incumbente, por ejemplo, reduciendo el costo marginal. También afecta a la elección óptima de acción de la incumete en el segundo periodo, capturado por $\frac{da_1^*}{dK_1}$. Si la empresa entrante fue incapaz de observar la elección de inversión de la incumete, estos serían los únicos efectos marginales que tomar en cuenta cuando la incumete aumenta su inversión.

Sin embargo, ya que la empresa entrante observa la elección K_1 del primer periodo de la incumbente, la inversión también tiene efectos estratégicos; la producción y elección de precios de la entrante se ve afectada indirectamente por K_1 . Este efecto estratégico depende de la respuesta en equilibrio de la entrante ante un incremento en el nivel de inversión, representado por $\frac{da_2^*}{dK_1}$ y en la externalidad que imponen las acciones de la entrante en el pago de la incumbente, representadas por $\frac{\partial U_1}{\partial a_2}$.

En nuestro modelo, el juego es de información incompleta: el jugador 1 es el incumete, el jugador 2 es el entrante y el nivel de inversión K_1 corresponde a la calidad de la estructura de información ρ_1 del jugador 1. El efecto total de incrementar la inversión en información abiertamente de Σ_{ρ_1} a $\Sigma_{\hat{\rho}_1}$ puede ser descompuesto en

$$U_1(\rho; \rho) - U_1(\hat{\rho}; \hat{\rho}) = \underbrace{U_1(\rho; \hat{\rho}) - U_1(\hat{\rho}; \hat{\rho})}_{\text{value of covert investment}} + \underbrace{U_1(\rho; \rho) - U_1(\rho; \hat{\rho})}_{\text{strategic effect}}.$$

El valor de la inversión encubierta (el valor de información encubierta) captura cómo el pago del jugador 1 se incrementa por su habilidad para tomar mejores decisiones informadas mientras se mantenga fija la estrategia del jugador 2. El efecto estratégico en nuestro modelo corresponde al valor de la transparencia. Él captura cómo cambian los pagos del jugador 1 cuando la estrategia del jugador 2 se ve afectada indirectamente por el cambio en la calidad de la información.

De la expansión de Taylor de primer orden, hemos mostrado que el efecto estratégico de la información depende de la sensibilidad del jugador 2, $a_2^*(\rho) - a_2^*(\hat{\rho})$, la externalidad que la acción de jugador 2 impone en el jugador 1, $u_{a_2}^1$ y adicionalmente, la actitud de riesgo del jugador 1 ante la acción del jugador 2, $u_{a_2 a_2}^1$. Nuestra caracterización del valor de la transparencia puede por lo tanto ser pensada como una extensión estocástica de la caracterización de los efectos estratégicos de la inversión por Fudenberg y Tirole (1984).

6 Conclusión

Brindamos un marco general para estudiar cambios en los equilibrios y bienestar cuando la calidad de la información privada aumenta. La teoría tiene implicaciones importantes tanto en los juegos bayesianos como en problemas de decisión bayesianos. Nuestra teoría de *estática comparativa bayesiana* se compone de tres componentes clave: un orden de información, un ordenamiento estocástico de acciones y una clase de funciones de utilidad. Nuestro teorema principal prueba que para una subclase de funciones de utilidad supermodular hay una dualidad entre el orden de las acciones y el orden de la información: los resultados en equilibrio se vuelven más dispersos en el orden de las acciones estocástico si y solo si la calidad de la señal aumenta en el orden de la información.

Hay implicaciones tanto positivas como normativas. Por ejemplo, la calidad de la información privada afecta la dispersión de los precios en economías industriales. En macroeconomía, puede incrementar la volatilidad seccional de la inversión o la producción agregada y también puede inducir una producción agregada esperada mayor.

En análisis de bienestar, conectamos información, acciones y pagos a través del concepto de externalidades informativas. Un monopolista con información más precisa sobre sus costos incrementa tanto la volatilidad como el nivel promedio de producción si enfrenta una demanda suficientemente convexa. Esto tiene externalidades positivas en los consumidores.

En los juegos de divulgación de información (persuasión bayesiana), caracterizamos los niveles de conflicto mínimos y máximos entre un emisor y un receptor, condiciones bajo las cuales la divulgación máxima de información es óptima. Encontramos que las condiciones para divulgación completa son también similares a las condiciones que implican que el intercambio de información completo es óptimo para oligopolistas competidores, de este modo extendiendo la literatura en organización industrial a contextos

más generales.

Finalmente, estudiamos el proceso de ajuste a la entrada en mercados oligopólicos donde una empresa incumbente puede invertir en adquisición de información. El análisis de los efectos indirectos de la información en las ganancias de la empresa incumbente a través de la conducta inducida por la empresa entrante (el valor de la transparencia) es formalmente equivalente a caracterizar la diferencia entre las demandas de información abierta y encubierta. Caracterizamos el valor de la transparencia dependiendo de la sensibilidad de la empresa entrante a la información de la empresa incumbente y el signo de la externalidad impuesto en la incumbente por la sensibilidad de la entrante.

La teoría de estática comparativa bayesiana puede ser útil para generalizar muchas de las intuiciones desarrolladas para economías cuadráticas a una clase de pagos con dinámicas más ricas. Un camino para futuras investigaciones es estudiar el uso eficiente y en equilibrio de la información.³⁵ Otra pregunta abierta es cómo un planificador central debería intervenir en los mercados con fundamentos inciertos e información dispersa en contextos no lineales.³⁶

Más generalmente, el marco de trabajo puede ser aplicado al diseño de la información.³⁷ Otras extensiones incluyen estudiar la estática comparativa con respecto a la calidad de la información pública, cambios exógenos a la distribución previa de los fundamentos del mercado y cambios en las actitudes hacia el riesgo o la resolución temporal de la incertidumbre.

Referencias

- Rabah Amir and Natalia Lazzati. 2016. Endogenous information acquisition in bayesian games with strategic complementarities. *Journal of Economic Theory* 163 (2016), 684–698.
- George-Marios Angeletos and Jennifer La’O. 2013. Sentiments. *Econometrica* 81, 2 (2013), 739–779.

³⁵Angeletos y Pavan (2007) estudian el uso de información eficiente y en equilibrio en economías cuadráticas.

³⁶Angeletos y Pavan (2009); Lorenzoni (2010); Angeletos y La’O (2018) estudian la elaboración de políticas en economías cuadráticas con información dispersa.

³⁷Ver Bergemann y Morris (2018) para un estudio reciente en diseño de información.

- George-Marios Angeletos and Jennifer La'O. 2018. Optimal monetary policy with informational frictions. (2018).
- George-Marios Angeletos and Alessandro Pavan. 2007. Efficient use of information and social value of information. *Econometrica* 75, 4 (2007), 1103–1142.
- George-Marios Angeletos and Alessandro Pavan. 2009. Policy with dispersed information. *Journal of the European Economic Association* 7, 1 (2009), 11–60.
- Susan Athey. 2001. Single crossing properties and the existence of pure strategy equilibria in games of incomplete information. *Econometrica* 69, 4 (2001), 861–889.
- Susan Athey. 2002. Monotone Comparative Statics under Uncertainty. *The Quarterly Journal of Economics* 117, 1 (2002), 187–223.
- Susan Athey and Jonathan Levin. 2017. The Value of Information in Monotone Decision Problems. *Research in Economics* (2017).
- Coralio Ballester, Antoni Calvó-Armengol, and Yves Zenou. 2006. Who's who in networks. Wanted: The Key Player. *Econometrica* 74, 5 (2006), 1403–1417.
- Dirk Bergemann, Benjamin Brooks, and Stephen Morris. 2015. The Limits of Price Discrimination. *American Economic Review* 105, 3 (March 2015), 921–57.
- Dirk Bergemann and Stephen Morris. 2013. Robust predictions in games with incomplete information. *Econometrica* 81, 4 (2013), 1251–1308.
- Dirk Bergemann and Stephen Morris. 2018. Information Design: A Unified Perspective. *Journal of Economic Literature*, forthcoming (2018).
- David Blackwell. 1951. Comparison of Experiments. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley, Calif., 93–102.
- David Blackwell. 1953. Equivalent Comparisons of Experiments. *Ann. Math. Statist.* 24, 2 (06 1953), 265–272.
- Jeremy Bulow, John D Geanakoplos, and Paul D Klemperer. 1985. Multimarket oligopoly: Strategic substitutes and complements. *Journal of Political Economy* 93, 3 (1985), 488–511.

- Ozan Candogan, Kostas Bimpikis, and Asuman Ozdaglar. 2012. Optimal Pricing in Networks with Externalities. *Operations Research* 60, 4 (2012), 883–905.
- Richard N Clarke. 1983. Collusion and the incentives for information sharing. *The Bell Journal of Economics* (1983), 383–394.
- Luca Colombo, Gianluca Femminis, and Alessandro Pavan. 2014. Information Acquisition and Welfare. *Review of Economic Studies* 81, 4 (2014), 1438–1483.
- Piotr Dworczak and Giorgio Martini. 2018. The Simple Economics of Optimal Persuasion. *Journal of Political Economy*, forthcoming (2018).
- Drew Fudenberg and Jean Tirole. 1984. The fat-cat effect, the puppy-dog ploy, and the lean and hungry look. *The American Economic Review* 74, 2 (1984), 361–366.
- Esther Gal-Or. 1985. Information sharing in oligopoly. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1985), 329–343.
- Matthew Gentzkow and Emir Kamenica. 2016. A Rothschild-Stiglitz Approach to Bayesian Persuasion. *American Economic Review P&P* 106, 5 (May 2016), 597–601.
- Olivier Gossner. 2000. Comparison of Information Structures. *Games and Economic Behavior* 30 (2000), 44–63.
- Christian Hellwig and Laura Veldkamp. 2009. Knowing what others know: Coordination motives in information acquisition. *The Review of Economic Studies* 76, 1 (2009), 223–251.
- Jack Hirshleifer. 1971. The Private and Social Value of Information and the Reward to Inventive Activity. *The American Economic Review* 61, 4 (1971), 561–74.
- Bengt Holmstrom. 1982. Moral Hazard in Teams. *The Bell Journal of Economics* (1982), 324–340.
- Martin Kaae Jensen. 2018. Distributional Comparative Statics. *The Review of Economic Studies* 85, 1 (2018), 581–610.
- Ian Jewitt. 2006. Information Order in Decision and Agency Problems. *mimeo* (01 2006).

- Emir Kamenica and Matthew Gentzkow. 2011. Bayesian persuasion. *American Economic Review* 101, 6 (2011), 2590–2615.
- Morton I Kamien, Yair Tauman, and Shmuel Zamir. 1990. On the value of information in a strategic conflict. *Games and Economic Behavior* 2, 2 (1990), 129 – 153.
- John Maynard Keynes. 1936. The general theory of money, interest and employment. *Reprinted in The Collected Writings of John Maynard Keynes* 7 (1936).
- Miles S Kimball. 1990. Precautionary Saving in the Small and in the Large. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1990), 53–73.
- Anton Kolotilin. 2018. Optimal information disclosure: A linear programming approach. *Theoretical Economics* 13, 2 (2018), 607–635.
- Anton Kolotilin, Tymofiy Mylovanov, Andriy Zapechelnyuk, and Ming Li. 2017. Persuasion of a Privately Informed Receiver. *Econometrica* 85, 6 (2017), 1949–1964.
- René Leal-Vizcaíno and Teddy Mekonnen. 2018. Information Sharing in Supermodular Games. (2018).
- E. L. Lehmann. 1988. Comparing Location Experiments. *Ann. Statist.* 16, 2 (06 1988), 521–533.
- Fei Li and Peter Norman. 2018. Sequential Persuasion. *working paper* (2018).
- Elliot Lipnowski and Laurent Mathevet. 2017. Simplifying Bayesian Persuasion. *working paper* (2017).
- Guido Lorenzoni. 2010. Optimal monetary policy with uncertain fundamentals and dispersed information. *The Review of Economic Studies* 77, 1 (2010), 305–338.
- Jay Lu. 2016. Random Choice and Private Information. *Econometrica* 84, 6 (2016), 1983–2027.
- Robert E Lucas Jr. 1972. Expectations and the Neutrality of Money. *Journal of economic theory* 4, 2 (1972), 103–124.
- Massimo Marinacci and Luigi Montrucchio. 2005. Ultramodular functions. *Mathematics of Operations Research* 30, 2 (2005), 311–332.

- Teddy Mekonnen and René Leal-Vizcaíno. 2018. Bayesian Comparative Statics: Online Appendix. (2018).
- Paul Milgrom and John Roberts. 1990. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1990), 1255–1277.
- Paul Milgrom and John Roberts. 1994. Comparing equilibria. *The American Economic Review* (1994), 441–459.
- Paul Milgrom and Chris Shannon. 1994. Monotone Comparative Statics. *Econometrica* 62, 1 (1994), 157–180.
- Paul R Milgrom and Robert J Weber. 1982. A Theory of Auctions and Competitive Bidding. *Econometrica* 50, 5 (September 1982), 1089–1122.
- Stephen Morris and Hyun Song Shin. 2002. Social Value of Public Information. *The American Economic Review* 92, 5 (2002), 1521–1534.
- Alfred Müller and Dietrich Stoyan. 2002. *Comparison methods for stochastic models and risks*. Vol. 389. Wiley.
- David P Myatt and Chris Wallace. 2011. Endogenous information acquisition in coordination games. *The Review of Economic Studies* 79, 1 (2011), 340–374.
- David P. Myatt and Chris Wallace. 2015. Cournot competition and the social value of information. *Journal of Economic Theory* 158 (2015), 466 – 506. Symposium on Information, Coordination, and Market Frictions.
- Abraham Neyman. 1991. The positive value of information. *Games and Economic Behavior* 3, 3 (1991), 350–355.
- William Novshek and Hugo Sonnenschein. 1982. Fulfilled expectations Cournot duopoly with information acquisition and release. *The Bell Journal of Economics* (1982), 214–218.
- Alessandro Pavan and Xavier Vives. 2015. Information, Coordination, and Market Frictions: An Introduction. *Journal of Economic Theory* 158 (2015), 407 – 426. Symposium on Information, Coordination, and Market Frictions.

- Nicola Persico. 2000. Information Acquisition in Auctions. *Econometrica* 68, 1 (2000), 135–148.
- John K.-H. Quah and Bruno Strulovici. 2009. Comparative Statics, Informativeness, and the Interval Dominance Order. *Econometrica* 77, 6 (2009), 1949–1992.
- R. Radner. 1962. Team Decision Problems. *Ann. Math. Statist.* 33, 3 (09 1962), 857–881.
- Michael Raith. 1996. A general model of information sharing in oligopoly. *Journal of Economic Theory* 71, 1 (1996), 260–288.
- Luis Rayo and Ilya Segal. 2010. Optimal Information Disclosure. *Journal of Political Economy* 118, 5 (2010), 949–987.
- Michael Rothschild and Joseph E Stiglitz. 1971. Increasing risk II: Its economic consequences. *Journal of Economic theory* 3, 1 (1971), 66–84.
- René L Schilling. 2005. *Measures, integrals and martingales*. Cambridge University Press.
- Moshe Shaked and J George Shanthikumar. 2007. *Stochastic orders*. Springer Science & Business Media.
- Carl Shapiro. 1989. Theories of oligopoly behavior. *Handbook of industrial organization* 1 (1989), 329–414.
- Ina Taneva. 2017. Information Design. *working paper* (2017).
- André H Tchen. 1980. Inequalities for distributions with given marginals. *The Annals of Probability* (1980), 814–827.
- Jean Tirole. 1988. *The theory of industrial organization*. MIT press.
- Jean Tirole. 2015. Cognitive Games and Cognitive Traps. (2015).
- Takashi Ui and Yasunori Yoshizawa. 2015. Characterizing social value of information. *Journal of Economic Theory* 158 (2015), 507 – 535. Symposium on Information, Coordination, and Market Frictions.

- Timothy Van Zandt and Xavier Vives. 2007. Monotone equilibria in Bayesian games of strategic complementarities. *Journal of Economic Theory* 134, 1 (2007), 339–360.
- J Miguel Villas-Boas. 1997. Comparative statics of fixed points. *Journal of Economic Theory* 73, 1 (1997), 183–198.
- Xavier Vives. 1984. Duopoly information equilibrium: Cournot and Bertrand. *Journal of Economic Theory* 34, 1 (1984), 71–94.
- Xavier Vives. 1990. Nash equilibrium with strategic complementarities. *Journal of Mathematical Economics* 19, 3 (1990), 305–321.
- Xavier Vives. 2001. *Oligopoly pricing: old ideas and new tools*. MIT press.
- Zhixiang Zhang. 2008. Comparison of Information Structures with Infinite States of Nature. *dissertation submitted to Johns Hopkins University (Department of Economics)* (2008).

7 Apéndice A

7.1 Lemas Preliminares

A continuación se muestran dos caracterizaciones de la sensibilidad, una usando la CDF $H(\cdot; \rho)$ y otra usando la función de cuantil definida como $\hat{a}(q; \rho) = \inf\{z : q \leq H(z; \rho)\}$ para $q \in (0, 1)$.

Lema 1 [*Shaked y Shantikumar, 2007; Teorema 4.A.2-A.3*]

Dadas dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$, lo siguiente es equivalente:

i. Un agente es más sensible con una media mayor $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$.

ii. Para cualquier función convexa creciente $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dH(z; \rho'') \geq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dH(z; \rho').$$

iii. Para toda $t \in [0, 1]$,

$$\int_t^1 \hat{a}(q; \rho'') dq \geq \int_t^1 \hat{a}(q; \rho') dq.$$

De la misma manera, los siguientes son equivalentes:

iv. Un agente es más sensible con una media menor $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$.

v. Para cualquier función convexa decreciente $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dH(z; \rho'') \geq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dH(z; \rho').$$

vi. Para toda $t \in [0, 1]$,

$$\int_0^t \hat{a}(q; \rho'') dq \leq \int_0^t \hat{a}(q; \rho') dq.$$

La siguiente caracterización del orden estocástico supermodular será útil para la demostración del Teorema 1

Lema 2 Dadas dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ si y sólo si, para toda función integrable $\psi : \Theta \times S \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga diferencias crecientes (DC) en $(\theta; s)$,

$$\int_{\Theta \times S} \psi(\theta, s) dF(\theta, s; \rho'') \geq \int_{\Theta \times S} \psi(\theta, s) dF(\theta, s; \rho')$$

Proof. Recordemos que todas las estructuras de información inducen la misma distribución marginal de $\tilde{\theta}$ que corresponde a la información previa del agente. También se ha asumido sin pérdida de generalidad que todas las estructuras de información inducen la misma distribución marginal de $\tilde{s}$. Dicho resultado se desprende del Teorema 3.8.2 de Müller y Stoyan (2002) o de Tchen (1980). ■

Algunos de los resultados presentados hacen uso del siguiente resultado del Lema 1 de Quah y Strulovici (2009)

Lema 3 Sean $g : [x', x''] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : [x', x''] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables.

1. Si g es creciente y $\int_x^{x''} h(t) dt \geq 0$ para toda $x \in [x', x'']$, entonces $\int_{x'}^{x''} g(t) h(t) dt \geq g(x') \int_{x'}^{x''} h(t) dt$
2. Si g es decreciente y $\int_x^x h(t) dt \geq 0$ para toda $x \in [x', x'']$, entonces $\int_{x'}^{x''} g(t) h(t) dt \geq g(x'') \int_{x'}^{x''} h(t) dt$

7.2 Problema de un solo Agente

Demostración del Teorema 1

Proof. ($\implies$) El beneficio $u(\theta, a)$ satisface DC en $(\theta; a)$ y la estructura de información Σ_ρ tiene la propiedad de que $s > s'$ implica $\mu(\cdot|s; \rho) \succeq_{FOSD} \mu(\cdot|s'; \rho)$. De la estática comparativa monótona, la acción óptima $a(\rho) : S \rightarrow A$ es una función monótona de s . Por lo tanto, desde una perspectiva ex-ante, la acción óptima coincide con la función cuantil empleada para definir la capacidad de respuesta en el Lema 1, i.e., $a(\rho) = \hat{a}(\rho)$ con certeza.

Sin pérdida de generalidad, se asume que la marginal en las señales está uniformemente distribuida en el intervalo de la unidad.³⁸ Para cualesquiera dos estructuras de información $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ y cualquier realización de la señal $s \in [0, 1]$, las condiciones de primer orden implican que

$$\int_{\Theta} u_a(\theta, a(s; \rho'')) \mu(d\theta|s; \rho'') - \int_{\Theta} u_a(\theta, a(s; \rho')) \mu(d\theta|s; \rho') = 0$$

las cuales pueden ser reescritas como

$$\int_{\Theta} \left(u_a(\theta, a(s; \rho'')) - u_a(\theta, a(s; \rho')) \right) \mu(d\theta|s; \rho'') + \int_{\Theta} u_a(\theta, a(s; \rho')) \left(\mu(d\theta|s; \rho'') - \mu(d\theta|s; \rho') \right) = 0$$

Si $u \in \mathcal{U}^I$, entonces $u_a(\theta, a)$ es convexa en a para toda θ . Así,

$$u_a(\theta, a(s; \rho'')) - u_a(\theta, a(s; \rho')) \geq u_{aa}(\theta, a(s; \rho')) (a(s; \rho'') - a(s; \rho'))$$

y

$$\left(a(s; \rho'') - a(s; \rho') \right) \int_{\Theta} u_{aa}(\theta, a(s; \rho')) \mu(d\theta|s; \rho'') + \int_{\Theta} u_a(\theta, a(s; \rho')) \left(\mu(d\theta|s; \rho'') - \mu(d\theta|s; \rho') \right) \leq 0.$$

³⁸Como se menciona en el texto, es posible aplicar la transformación de probabilidad integral a las señales

Para cada $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
& \int_t^1 (a(s; \rho') - a(s; \rho'')) ds \\
& \leq \int_t^1 \underbrace{\left(- \int_{\Theta} u_{aa}(\theta, a(s; \rho')) \mu(d\theta|s; \rho'') \right)}_{\triangleq B(s)}^{-1} \int_{\Theta} u_a(\theta, a(s; \rho')) \left(\mu(d\theta|s; \rho') - \mu(d\theta|s; \rho'') \right) ds \\
& = \int_{\Theta \times [0, 1]} u_a(\theta, a(s; \rho')) B(s) \mathbb{1}_{[s \geq t]} \left(dF(\theta, s; \rho') - dF(\theta, s; \rho'') \right),
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{1}_{[s \geq t]}$ es la función indicador que es igual a 1 si $s \geq t$ y 0 en otro caso.

Definiendo $\psi(\theta, s; t) \triangleq u_a(\theta, a(s; \rho')) B(s) \mathbb{1}_{[s \geq t]}$. Para cualquier $\theta'' > \theta'$, $\psi(\theta'', s; t) - \psi(\theta', s; t) = 0$ para $s < t$ y

$$\psi(\theta'', s; t) - \psi(\theta', s; t) = B(s) \left(u_a(\theta'', a(s; \rho')) - u_a(\theta', a(s; \rho')) \right) \geq 0$$

para $s \geq t$. La desigualdad se sigue de DC de u en $(\theta; a)$ y la concavidad estricta de u en a . Ya que $u \in \mathcal{U}^I$, u_a también satisface DC en $(\theta; a)$, i.e., $u_a(\theta'', a) - u_a(\theta', a)$ es creciente en a . Y como $a(s; \rho')$ es creciente en s , $u_a(\theta'', a(s; \rho')) - u_a(\theta', a(s; \rho'))$ también es creciente en s .

Adicionalmente, $u \in \mathcal{U}^I$ implica que $-u_a$ satisface diferencias decrecientes en $(\theta; a)$ y es cóncava en a . Por lo tanto, $-u_{aa}(\theta, a)$ es decreciente en ambas θ y a . Dado que mayores realizaciones de señales conllevan a mayores acciones y a cambios estocásticos de primer orden en las creencias,

$$- \int_{\Theta} u_{aa}(\theta, a(s; \rho')) \mu(d\theta|s; \rho'')$$

es una función decreciente en s . Así $B(s)$ es creciente en s . Por lo tanto, se puede concluir que $\psi(\theta'', s; t) - \psi(\theta', s; t)$ es creciente en s . En otras palabras, $\psi(\theta, s; t)$ satisface DC en $(\theta; s)$. Así, para cada $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
& \int_t^1 (a(s; \rho') - a(s; \rho'')) ds \\
& \leq \int_{\Theta \times [0, 1]} \psi(\theta, s; t) \left(dF(\theta, s; \rho') - dF(\theta, s; \rho'') \right) \leq 0
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene del Lema 2.

($\Leftarrow$) Por definición, si $\rho'' \not\prec_{spm} \rho'$, existe un $(\theta^*, s^*) \in \Theta \times [0, 1]$ tal que

$$F(\theta^*, s^*; \rho'') < F(\theta^*, s^*; \rho').$$

Definiendo una función de pago

$$u(\theta, a) = -\frac{1}{2} \left(\bar{a} - \mathbb{1}_{[\theta \leq \theta^*]}(\bar{a} - \underline{a}) - a \right)^2.$$

El pago $u(\theta, a)$ satisface (A.1)-(A.4): es continuo, dos veces diferenciable, y estrictamente cóncavo en a para cada $\theta \in \Theta$. Satisface DC en $(\theta; a)$. Para cada $\theta \in \Theta$, la acción óptima se calcula fácilmente a partir de las condiciones de primer orden de manera que la acción óptima bajo información completa es $\underline{a}$ si $\theta \leq \theta^*$ y $\bar{a}$ en otro caso. Además, la utilidad marginal $u_a(\theta, a) = \bar{a} - \mathbb{1}_{[\theta \leq \theta^*]}(\bar{a} - \underline{a}) - a$ es

(i) lineal en a para toda $\theta \in \Theta$, y (ii) tiene diferencias constantes en $(\theta; a)$.

Por tanto, $u \in \mathcal{U}^I \cap \mathcal{U}^D$. Para cualquier Σ_ρ ,

$$\begin{aligned} a(s; \rho) &= \bar{a} - (\bar{a} - \underline{a}) E \left[\mathbb{1}_{[\bar{\theta} \leq \theta^*]} | s; \rho \right] \\ &= \bar{a} - (\bar{a} - \underline{a}) \int_{\underline{\theta}}^{\theta^*} \mu(d\omega | s; \rho). \end{aligned}$$

Entonces, dados $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{s^*} (a(s; \rho'') - a(s; \rho')) dF_S(s) \\ &= (\bar{a} - \underline{a}) \left(F(\theta^*, s^*; \rho') - F(\theta^*, s^*; \rho'') \right) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el agente no es más sensible con menor media bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$. Cabe destacar que para cualquier Σ_ρ ,

$$E[a(\rho)] = \bar{a} - (\bar{a} - \underline{a}) \int_0^1 \int_{\underline{\theta}}^{\theta^*} \mu(d\omega | s; \rho) dF_S(s) = \bar{a} - (\bar{a} - \underline{a}) \int_{\underline{\theta}}^{\theta^*} \mu^0(d\omega),$$

que es independiente de ρ . Así,

$$\begin{aligned} & \int_{s^*}^1 (a(s; \rho'') - a(s; \rho')) dF_S(s) \\ &= \underbrace{\int_0^1 (a(s; \rho'') - a(s; \rho')) dF_S(s)}_{\substack{=E[a(\rho'')] - E[a(\rho')] \\ =0}} - \left(\underbrace{\int_0^{s^*} (a(s; \rho'') - a(s; \rho')) dF_S(s)}_{>0} \right) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el agente no es más sensible con una media mayor bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo $\Sigma_{\rho'}$. ■

Demostración de la Proposición 1

Proof. Sea $a_i = a^*(\mu_i)$ para $i = 1, 2$, $a_\lambda = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$, y $\mu_\lambda = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$. De la condición de primer orden tenemos que $\int_{\Theta} u_a(\theta, a_i) \mu_i(d\theta) = 0$. Sea $u \in \mathcal{U}^I$.

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} u_a(\theta, a_\lambda) \mu_\lambda(d\theta) &\leq \lambda \int_{\Theta} u_a(\theta, a_1) \mu_\lambda(d\theta) + (1 - \lambda) \int_{\Theta} u_a(\theta, a_2) \mu_\lambda(d\theta) \\ &= \lambda^2 \int_{\Theta} u_a(\theta, a_1) \mu_1(d\theta) + (1 - \lambda)^2 \int_{\Theta} u_a(\theta, a_2) \mu_2(d\theta) \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda) \left[\int_{\Theta} u_a(\theta, a_2) \mu_1(d\theta) + \int_{\Theta} u_a(\theta, a_1) \mu_2(d\theta) \right] \\ &= \lambda(1 - \lambda) \int_{\Theta} [u_a(\theta, a_1) - u_a(\theta, a_2)] (\mu_2(d\theta) - \mu_1(d\theta)) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se deriva de la convexidad de u_a . Como se mostró previamente, la DC de la utilidad $u(\theta, a)$ en $(\theta; a)$ junto con $\mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$ implica que $a_2 \geq a_1$. Por la DC de la utilidad marginal u_a en $(\theta; a)$, se tiene que $u_a(\theta, a_1) - u_a(\theta, a_2)$ es una función decreciente de θ . Así, la última desigualdad proviene de la definición de dominancia estocástica de primer orden. Dado que el valor marginal de a_λ es no positiva en μ_λ , se debe tener que $a^*(\mu_\lambda) \leq a_\lambda$. Un argumento simétrico establece que si $u \in \mathcal{U}^D$, entonces $a^*(\mu_\lambda) \geq a_\lambda$. ■

Demostración del Corolario 1

Proof. Se realiza la demostración de la media creciente, el otro caso es análogo. Se

comienza con el Lema A.

Lema (A) *Suponer $u \in \mathcal{U}^I$. Para cualquier secuencia finita de creencias $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ con $\mu_n \succeq_{FOSD} \mu_{n-1} \succeq_{FOSD} \dots \succeq_{FOSD} \mu_1$, y cualquier serie de pesos $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, se tiene que*

$$a^*\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a^*(\mu_i)$$

Si $u \in \mathcal{U}^D$ la desigualdad opuesta se mantiene.

Proof.

$$\begin{aligned} a^*\left(\lambda_1 \mu_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \mu_i\right) &\leq \lambda_1 a^*(\mu_1) + \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i\right) a^*\left(\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\sum_{k=2}^n \lambda_k} \mu_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a^*(\mu_i) \end{aligned}$$

La primera línea se deriva de la Proposición 1 usando la propiedad de que la dominancia estocástica de primer orden se mantiene bajo combinaciones convexas. La segunda línea se obtiene por inducción. ■

Sea $\Sigma_{\rho''}$ una estructura de información que induce posteriores $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ con las probabilidades correspondientes $\{\tau_i^{\rho''}\}_{i=1}^n$ de manera que $\mu_i \succeq_{FOSD} \mu_j$ cuando $i > j$. Sea $\Sigma_{\rho'}$ otra estructura de información que induce posteriores $\{\nu_k\}_{k=1}^m$ con las probabilidades correspondientes $\{\tau_k^{\rho'}\}_{k=1}^m$.

Asumiendo que $\Sigma_{\rho'}$ es una difuminación de $\Sigma_{\rho''}$ de manera que para cada $k = 1, \dots, m$, existan los pesos $\{\lambda_i^k\}_{i=1}^n$ tal que (i) $\lambda_i^k \in [0, 1]$, (ii) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 1$, y (iii) $\nu_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mu_i$. Además, para cada $i = 1, \dots, n$, $\tau_i^{\rho''} = \sum_{k=1}^m \lambda_i^k \tau_k^{\rho'}$.

Para mostrar que el agente es más sensible con una media mayor bajo $\Sigma_{\rho''}$ que bajo

$\Sigma_{\rho'}$, es necesario tomar cualquier función creciente y convexa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \varphi(z) dH(z; \rho') &= \sum_{k=1}^m \varphi(a^*(\nu_k)) \tau_k^{\rho'} \\
&= \sum_{k=1}^m \varphi\left(a^*\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mu_i\right)\right) \tau_k^{\rho'} \\
&\leq \sum_{k=1}^m \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k a^*(\mu_i)\right) \tau_k^{\rho'} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_i^k \varphi(a^*(\mu_i)) \tau_k^{\rho'} \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi(a^*(\mu_i)) \tau_i^{\rho''} = \int \varphi(z) dH(z; \rho'')
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se deriva del Lema A y de la monotonicidad de φ , mientras que la segunda desigualdad proviene de la convexidad de φ . El resultado deseado se obtiene de la caracterización de la sensibilidad con una media mayor en el Lema 1.

El argumento previo puede ser extendido al caso de creencias posteriores infinitas siguiendo los métodos descritos en Zhang (2008). ■

7.2.1 Cuando la capacidad de respuesta falla

En esta sección se explora por qué una mejor calidad de la información, no siempre conduce a acciones óptimas más dispersas cuando $u \notin \mathcal{U}^I \cup \mathcal{U}^D$. Una vez más, sea el estado espacio $\Theta = \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$. Considerando cuatro diferentes creencias $\{\mu_n\}_{n=1,2,3,4}$ tal que $\mu_n = n\delta$ para algún $\delta \in (0, 1/4)$. Las creencias son ordenadas por la dominancia estocástica de primer orden con $\mu_4 \succeq_{FOSD} \mu_3 \succeq_{FOSD} \mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$.

En la Figura 7a, se grafican las utilidades marginales esperadas de alguna función de pago u . Es importante notar que $u(\theta, a)$ satisface DC en $(\theta; a)$ —la utilidad marginal esperada de μ_{n+1} recae en la utilidad marginal esperada de μ_n . Así, $a_{n+1} \geq a_n$. Adicionalmente, $u_a(\theta, a)$ también satisface DC en $(\theta; a)$ —la altura de las flechas punteadas aumenta de izquierda a derecha. Sin embargo, las utilidades marginales son ahora concavas, lo cual implica que la utilidad marginal disminuye a un ritmo acelerado. Por lo tanto, $u \notin \mathcal{U}^I$. Además, $a_4 - a_3 < a_3 - a_2$ mientras que $a_3 - a_2 > a_2 - a_1$. La Figura 7b

representa esta no-convexidad” de la acción óptima como una función de creencias.

Fig. 7: No-convexidad para $u \notin \mathcal{U}^I$

La Figura 8 ilustra por qué el agente puede no ser sensible a un aumento en la calidad de la información cuando la acción óptima no es convexa ni cóncava, como en la Figura 7b. Sea $\Sigma_{\rho''}$ una estructura de información que induce tres posteriores $\{\mu_1, \mu_0, \mu_4\}$ con probabilidades $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ tal que $\mu_4 \succeq_{FOSD} \mu_0 \succeq_{FOSD} \mu_1$. Sea $\Sigma_{\rho'}$ con posteriores $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ con probabilidades $\{1/6, 1/3, 1/3, 1/6\}$ donde $\mu_2 = 0.5\mu_1 + 0.5\mu_0$ y $\mu_3 = 0.5\mu_4 + 0.5\mu_0$. Entonces $\mu_4 \succeq_{FOSD} \mu_3 \succeq_{FOSD} \mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$. Es importante notar que $\Sigma_{\rho'}$ es equivalente a tomar la información de $\Sigma_{\rho''}$ con probabilidad 0.5 y a no tomar información con probabilidad 0.5. Así, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$.

Sea la función $a^*(\mu)$ tal que no es convexa ni cóncava y sea la acción promedio bajo $\Sigma_{\rho''}$ igual a la acción promedio bajo $\Sigma_{\rho'}$. En la Figura 8a, esto corresponde al punto de intersección entre la línea punteada y la línea curva sólida en μ_0 . La Figura 8b grafica la distribución sobre acciones óptimas. $\Sigma_{\rho''}$ induce la línea punteada, mientras que $\Sigma_{\rho'}$ induce la línea sólida.

Si se empieza a integrar desde la derecha, entonces $\int_x^\infty H(z; \rho'') - H(z; \rho') dz \leq 0$ para toda $x > a^*(\mu_3)$ pero la señal cambia en algún punto $x^* \in (a^*(\mu_0), a^*(\mu_3))$. Así, el agente no será sensible con mayor media bajo $\Sigma_{\rho''}$. Si por el contrario, se integra por la izquierda, entonces $\int_{-\infty}^x H(z; \rho'') - H(z; \rho') dz \geq 0$ para toda $x < a^*(\mu_2)$ pero la señal cambia en algún punto $x^{**} \in (a^*(\mu_2), a^*(\mu_0))$. Así, el agente no será sensible con menor media bajo $\Sigma_{\rho''}$.

De hecho, conforme la acción promedio bajo $\Sigma_{\rho''}$ se iguala a la acción promedio bajo

Fig. 8: No-convexa/cóncava y no-sensible

$\Sigma_{\rho'}$, se puede concluir que $a(\rho'')$ y $a(\rho')$ no pueden ser ordenadas por la mayoría de los ordenamientos de variabilidad estocástica univariada como la dominancia estocástica de segundo orden, las dispersiones que preservan la media, el orden de Lorenz, el orden de dilatación, y el orden dispersivo.³⁹

Una razón más del por qué una mayor calidad de la información puede no conducir a una mayor capacidad de respuesta es cuando el supuesto de una solución interior, (A.3), es violado. Supongamos que el límite superior en el espacio de las acciones, $\bar{a}$, es una restricción para la creencia a priori, i.e., $a^*(\mu_0) = \bar{a}$. Sea $\Sigma_{\rho'}$ una estructura de información completamente no informativa. Entonces $\Sigma_{\rho'}$ induce $\bar{a}$ con probabilidad uno, por lo tanto el primer orden estocástico domina la distribución sobre las acciones inducidas para cualquier otra estructura $\Sigma_{\rho''}$, incluso si $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$.

8 Apéndice B

8.1 Juegos

Demostración del Teorema 2

Proof.

Para simplificar, sea $n = 2$. Una vez más, se assume sin pérdida de generalidad que para cada jugador $i = 1, 2$, la marginal de las señales, F_{S_i} , es una distribución uniforme

³⁹Shaked y Shanthikumar (2007) proporcionan un tratamiento completo de estos ordenamientos.

en el intervalo unitario.

Se fija un juego básico G . Para cada jugador i , sea $\alpha_i : S_i \rightarrow A_i$ una estrategia arbitraria medible y monótona. Sea $\mathcal{A}_i$ el conjunto de todas las estrategias medibles y monótonas, y sea $\mathcal{A} \triangleq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dada una estructura de información Σ_ρ y las estrategias del oponente $\alpha_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$, sea $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho) : S_i \rightarrow A_i$ la mejor estrategia de respuesta del jugador i . Específicamente, para toda $s_i \in [0, 1]$,

$$a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho) = \arg \max_{a_i \in A_i} \int_{\Theta \times S_{-i}} u^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho).$$

De (A.6) y (A.10)-(A.13), $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho) \in \mathcal{A}_i$ para $i = 1, 2$.⁴⁰

Para cualesquiera estrategias monótonas $\alpha \triangleq (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{A}$, se denota el perfil de las estrategias de mejor respuesta por $a^{BR}(\alpha, \rho) \triangleq (a_1^{BR}(\cdot; \alpha_2, \rho), a_2^{BR}(\cdot; \alpha_1, \rho))$. Entonces, un ENB de $\mathcal{G}_\rho$, $a^*(\rho)$, es dado por el punto fijo $a^{BR}(a^*(\rho), \rho) = a^*(\rho)$.

Aquí sólo se trata el caso de $u^i \in \Gamma^\uparrow$. Un argumento simétrico establece el resultado para el caso de $u^i \in \Gamma^\downarrow$. La demostración del Teorema 2 procede en cuatro pasos:

1. La mejor estrategia de respuesta del jugador i se incrementa en el orden convexo creciente cuando la calidad de la información del jugador i incrementa (Lema 4)
2. La mejor estrategia de respuesta del jugador i se incrementa en el orden convexo creciente cuando la calidad de la información del jugador $-i$ incrementa (Lema 5)
3. La mejor estrategia de respuesta del jugador i se incrementa en el orden convexo creciente cuando la estrategia del jugador $-i$ se incrementa en el orden convexo creciente (Lema 6)
4. Dado 1-3, se aplican los teoremas existentes de estática comparativa sobre puntos fijos para obtener el resultado deseado.

Lema 4 *Fijando alguna estrategia arbitraria $\alpha_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$. Se toman dos estructuras $\Sigma_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho'_i}, \Sigma_{\rho_{-i}})$ y $\Sigma_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho'_i}, \Sigma_{\rho_{-i}})$ con $\rho''_i \succeq_{spm} \rho'_i$. Si $u^i \in \Gamma^\uparrow$, entonces $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho'')$ domina a $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho'_i)$ en el orden convexo creciente.*

⁴⁰Por la monotonicidad de la mejor respuesta, a_i^{BR} es equivalente a la función cuantil en casi todo. Por lo tanto se puede usar directamente a_i^{BR} para caracterizar la capacidad de respuesta aplicando el Lema 1.

Proof. Dado $\Sigma_{\rho_{-i}}$ y $\alpha_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$, sea

$$\tilde{u}^i(\theta_i, a_i) = \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} u^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i; \rho_{-i})$$

tal que

$$a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho) = \arg \max_{a_i \in A_i} \int_{\Theta_i} \tilde{u}^i(\theta_i, a_i) \mu(d\theta_i | s_i; \rho_i).$$

Llevando este problema al contexto del agente único donde el pago está dado por $\tilde{u}^i : \Theta_i \times A_i \rightarrow \mathbb{R}$. Así, si $\tilde{u}^i \in \mathcal{U}^\uparrow$, entonces por el Teorema 1, $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho'')$ domina a $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho')$ en el orden convexo creciente.

En primer lugar, $\tilde{u}^i$ hereda las propiedades de medibilidad, acotamiento y suavidad de u^i . Además, la concavidad de u^i en a_i para toda $(\theta, a_{-i}) \in \Theta \times A_{-i}$ implica la concavidad de $\tilde{u}^i$ en a_i para toda $\theta_i \in \Theta_i$. Similarmente, la convexidad de $u_{a_i}^i$ en a_i para toda $(\theta, a_{-i}) \in \Theta \times A_{-i}$ implica la convexidad de $\tilde{u}_{a_i}^i$ en a_i para toda $\theta_i \in \Theta_i$.

Para ver que $\tilde{u}^i(\theta_i, a_i)$ tiene DC en $(\theta_i; a_i)$, sea $\theta_i'' > \theta_i'$. Así,

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{a_i}^i(\theta_i'', a_i) - \tilde{u}_{a_i}^i(\theta_i', a_i) \\ &= \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} u_{a_i}^i(\theta_i'', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i''; \rho_{-i}) \\ & \quad - \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} u_{a_i}^i(\theta_i', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i'; \rho_{-i}) \\ &= \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} \left(u_{a_i}^i(\theta_i'', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) - u_{a_i}^i(\theta_i', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) \right) d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i''; \rho_{-i}) \\ & \quad + \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} u_{a_i}^i(\theta_i', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) \left(d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i''; \rho_{-i}) - d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i'; \rho_{-i}) \right) \end{aligned}$$

Como $u^i(\theta_i, \theta_{-i}, a_{-i}, a_i)$ tiene diferencias crecientes (DC) en $(\theta_i; a_i)$ para cada $(\theta_{-i}, a_{-i}) \in \Theta_{-i} \times A_{-i}$ y como la DC es preservada bajo la integración, el primer término

$$\int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} \left(u_{a_i}^i(\theta_i'', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) - u_{a_i}^i(\theta_i', \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i) \right) d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta_i''; \rho_{-i}) \geq 0.$$

Además, ya que $u^i(\theta_i, \theta_{-i}, a_{-i}, a_i)$ tiene DC en $(\theta_{-i}, a_{-i}; a_i)$ para cada $\theta_i \in \Theta_i$, $u_{a_i}^i(\theta_i, \theta_{-i}, a_{-i}, a_i)$ es creciente en (θ_{-i}, a_{-i}) . Como α_{-i} es una estrategia monótona, por (A.13) y (A.6), el

segundo término

$$\int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} u_{a_i}^i \left(\theta'_i, \theta_{-i}, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i \right) \left(d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta''_i; \rho_{-i}) - d\mathbf{F}(\theta_{-i}, s_{-i} | \theta'_i; \rho_{-i}) \right) \geq 0.$$

Por lo tanto, $\tilde{u}^i(\theta_i, a_i)$ tiene DC en $(\theta_i; a_i)$.

Un argumento similar dice que $\tilde{u}_{a_i}^i(\theta_i, a_i)$ tiene DC en $(\theta_i; a_i)$. Así, $\tilde{u}^i \in \mathcal{U}^\dagger$. El resultado deseado establecido en el lema se deriva del Teorema 1. ■

Lema 5 *Fijando alguna estrategia arbitraria $\alpha_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$. Se toman dos estructuras $\Sigma_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho_i}, \Sigma_{\rho''_{-i}})$ y $\Sigma_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho_i}, \Sigma_{\rho'_{-i}})$ con $\rho''_{-i} \succeq_{spm} \rho'_{-i}$. Si $u^i \in \Gamma^\dagger$, entonces $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho'')$ domina a $a_i^{BR}(\cdot; \alpha_{-i}, \rho')$ en el orden convexo creciente.*

Proof. Siguiendo el mismo argumento de la condición de primer orden que se empleó para la demostración del Teorema 1, para cada $s_i \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} & \left(a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho') - a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho'') \right) \underbrace{\int_{\Theta \times S_{-i}} -u_{a_i a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho'')}_{\triangleq \hat{B}(s_i)^{-1}} \\ & + \int_{\Theta \times S_{-i}} u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \left(d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho'') - d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho') \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces, para cada $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} & \int_t^1 \left(a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho') - a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho'') \right) ds_i \\ & \leq \int_t^1 \hat{B}(s_i) \int_{\Theta \times S_{-i}} u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \left(d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho') - d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i; \rho'') \right) ds_i \\ & = \int_{\Theta \times S} u_{a_i}^i(\theta_i, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \hat{B}(s_i) \mathbf{1}_{[s_i \geq t]} \left(d\mathbf{F}(\theta, s; \rho') - d\mathbf{F}(\theta, s; \rho'') \right) \\ & = \int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} \hat{\psi}(\theta_{-i}, s_{-i}; t) \left(dF(\theta_{-i}, s_{-i}; \rho'_{-i}) - dF(\theta_{-i}, s_{-i}; \rho''_{-i}) \right), \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\psi}(\theta_{-i}, s_{-i}; t) = \int_{\Theta_i \times S_i} u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \hat{B}(s_i) \mathbf{1}_{[s_i \geq t]} dF(s_i | \theta_i; \rho_i) \mu(d\theta_i | \theta_{-i}).$$

La igualdad se deriva de (A.11). Se toma $s''_{-i} > s'_{-i}$ lo cual implica que $\alpha_{-i}(s''_{-i}) \geq \alpha_{-i}(s'_{-i})$. Así,

$$\left[u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s''_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) - u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s'_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \right] \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} \geq 0,$$

para toda $(\theta, s_i) \in \Theta \times S_i$ porque $u^i(\theta, a_{-i}, a_i)$ tiene diferencias crecientes en $(a_{-i}; a_i)$. También es creciente en ambas θ y s_i porque $u_{a_i}^i(\theta, a_{-i}, a_i)$ tiene diferencias crecientes en $(\theta, a_i; a_{-i})$. De manera similar,

$$\hat{B}(s_i) \geq 0$$

por la concavidad de u^i in a_i . Es creciente en s_i porque $u_{a_i}^i$ es convexa en a_i , tiene DC en $(\theta, a_{-i}; a_i)$, y porque $\mathbf{F}(\theta, s_{-i}|s_i; \rho'')$ es creciente en FOSD ya que s_i incrementa. Así, junto con (A.6) y (A.13),

$$\begin{aligned} & \hat{\psi}(\theta_{-i}, s''_{-i}; t) - \hat{\psi}(\theta_{-i}, s'_{-i}; t) \\ &= \int_{\Theta_i \times S_i} \left\{ \left[u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s''_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) - u_{a_i}^i(\theta, \alpha_{-i}(s'_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha_{-i}, \rho')) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \hat{B}(s_i) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} \right\} dF(s_i | \theta_i; \rho_i) \mu(d\theta_i | \theta_{-i}) \end{aligned}$$

es creciente en θ_{-i} . En otras palabras, $\hat{\psi}(\theta_{-i}, s_{-i}; t)$ tiene DC en $(\theta_{-i}; s_{-i})$. Del Lema 2, $\rho''_{-i} \succeq_{spm} \rho'_{-i}$ implica que

$$\int_{\Theta_{-i} \times S_{-i}} \hat{\psi}(\theta_{-i}, s_{-i}; t) \left(dF(\theta_{-i}, s_{-i}; \rho'_{-i}) - dF(\theta_{-i}, s_{-i}; \rho''_{-i}) \right) \leq 0,$$

obteniendo así el resultado deseado. ■

Lema 6 *Fijando Σ_ρ . Sea $\alpha''_{-i}, \alpha'_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$ tal que α''_{-i} domina a α'_{-i} en el orden convexo creciente. Si $u^i \in \Gamma^\uparrow$, entonces, $a_i^{BR}(\cdot; \alpha''_{-i}, \rho)$ también domina a $a_i^{BR}(\cdot; \alpha'_{-i}, \rho)$ en el orden convexo creciente.*

Proof. Eliminando la dependencia en ρ mientras se mantiene fijo. Para cualquier $t \in [0, 1]$, se emplea el argumento de la condición de primer orden (similar a la demostración

del Lema 5) para obtener la expresión

$$\begin{aligned}
& \int_t^1 (a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) - a_i^{BR}(s_i; \alpha''_{-i})) ds_i \\
& \leq \int_t^1 \underbrace{\left\{ \left(- \int_{\Theta \times S_{-i}} u_{a_i a_i}^i \left(\theta, \alpha''_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i) \right)^{-1} \right\}}_{\triangleq \tilde{B}_i(s_i)} \\
& \times \int_{\Theta \times S_{-i}} \left[u_{a_i}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) - u_{a_i}^i \left(\theta, \alpha''_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \right] d\mathbf{F}(\theta, s_{-i} | s_i) \Big\} ds_i.
\end{aligned}$$

De la convexidad de $u_{a_i}^i$ en a_{-i} ,

$$\begin{aligned}
& u_{a_i}^i \left(\theta_i, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) - u_{a_i}^i \left(\theta_i, \alpha''_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \\
& \leq u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta_i, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) (\alpha'_{-i}(s_{-i}) - \alpha''_{-i}(s_{-i})).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& \int_t^1 (a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) - a_i^{BR}(s_i; \alpha''_{-i})) ds_i \\
& \leq \int_{S_{-i}} (\alpha'_{-i}(s_{-i}) - \alpha''_{-i}(s_{-i})) \int_{\Theta \times S_i} u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \tilde{B}(s_i) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} d\mathbf{F}(\theta, s_i | s_{-i}) ds_{-i}.
\end{aligned}$$

Del Lema 1 y de la equivalencia de la estrategia monótona α_{-i} con su función cuantil, α''_{-i} domina a α'_{-i} in en el orden convexo creciente si

$$\int_t^1 (\alpha'_{-i}(s_{-i}) - \alpha''_{-i}(s_{-i})) ds_{-i} \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Además, para cada $s_{-i} \in [0, 1]$

$$u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} \geq 0, \quad \forall (\theta, s_i) \in \Theta \times S_i$$

ya que u^i tiene diferencias crecientes en $(a_{-i}; a_i)$ para toda $\theta \in \Theta$. También es creciente

en ambas θ y s_i porque $u_{a_i}^i$ tiene diferencias crecientes en $(\theta, a_i; a_{-i})$. Del mismo modo,

$$\tilde{B}(s_i) \geq 0$$

debido a la concavidad de u^i en a_i . Es creciente en s_i porque $u_{a_i}^i$ es convexo en a_i , tiene DC en $(\theta, a_{-i}; a_i)$, y porque $\mathbf{F}(\theta, s_{-i}|s_i)$ es creciente en FOSD ya que s_i incrementa. Así, junto con (A.6) y (A.13),

$$\int_{\Theta \times S_i} u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \tilde{B}(s_i) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} d\mathbf{F}(\theta, s_i | s_{-i})$$

es una función creciente de s_{-i} . Aplicando el Lema 3, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_t^1 (a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) - a_i^{BR}(s_i; \alpha''_{-i})) ds_i \\ & \leq \int_{S_{-i}} (\alpha'_{-i}(s_{-i}) - \alpha''_{-i}(s_{-i})) \int_{\Theta \times S_i} u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \tilde{B}(s_i) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} d\mathbf{F}(\theta, s_i | s_{-i}) ds_{-i} \\ & \leq \underbrace{\int_{S_{-i}} (\alpha'_{-i}(s_{-i}) - \alpha''_{-i}(s_{-i})) ds_{-i}}_{\leq 0} \underbrace{\int_{\Theta \times S_i} u_{a_i a_{-i}}^i \left(\theta, \alpha'_{-i}(s_{-i}), a_i^{BR}(s_i; \alpha'_{-i}) \right) \tilde{B}(s_i) \mathbb{1}_{[s_i \geq t]} d\mathbf{F}(\theta, s_i | 0)}_{\geq 0} \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, 1]$. ■

A continuación se aborda el ultimo paso en la desmostación. Se aplica la estática comparativa de los puntos fijos proporcionados por Villas-Boas (1997). Para llevar a cabo lo anterior, es necesaria la siguiente definición.

Definición 6 (Espacio Contractible) *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un espacio contractible si existe un mapa $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para toda $x \in X$*

1. $\Phi(\cdot, \lambda)$ es continua en λ ,
2. $\Phi(x, 0) = x$ y $\Phi(x, 1) = x^*$ para alguna $x^* \in X$

Intuitivamente, X es contractible si puede ser continuamente encogido en un punto dentro de sí mismo.

Villas-Boas (1997, Teorema 6) Sea X un subconjunto compacto de un espacio de Banach. Considerando relaciones continuas $T_1 : X \rightarrow X$ y $T_2 : X \rightarrow X$, y un orden transitivo y reflexivo $\succeq$ en X . Para toda $x \in X$, sea el conjunto superior $\{x' \in X : x' \succeq x\}$ un subconjunto compacto y contractible. Dejando que ambos T_1 y T_2 tengan un punto fijo en X . Suponiendo $x' \succeq x \Rightarrow T_1(x') \succeq T_1(x)$, y suponiendo $T_1(x) \succeq T_2(x)$ para toda $x \in X$. Entonces para cada punto fijo x_2^* de T_2 , existe un punto fijo x_1^* de T_1 tal que $x_1^* \succeq x_2^*$.

Los pocos pasos restantes prueban que la configuración propuesta satisface los supuestos necesarios para aplicar el resultado de Villas-Boas.⁴¹

Sea $BV([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones de variación acotada de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$. Dada una función $g \in BV([0, 1], \mathbb{R})$, sea $V(g)$ la variación total de g .⁴² Deniendo la norma de la variación acotada por $\|g\|_{BV} = \int_0^1 |g(s)|ds + V(g)$. El espacio $BV([0, 1], \mathbb{R})$ equipado con el $\|\cdot\|_{BV}$ es un espacio de Banach.

Lema 7 Para cada $i = 1, 2$, $\mathcal{A}_i$ es un subconjunto compacto del espacio Banach $(BV([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{BV})$.

Proof. Alguna $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$ es de variación acotada ya que es una función creciente. Por lo tanto, $\mathcal{A}_i$ es un subconjunto de $BV([0, 1], \mathbb{R})$.

Para mostrar que $\mathcal{A}_i$ es un subconjunto compacto de $BV([0, 1], \mathbb{R})$, se toma una secuencia $\{\tilde{\alpha}_{i,k}\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}_i$. La secuencia está uniformemente acotada ya que cada función $\alpha_{i,k}$ se relaciona en el intervalo compacto A_i . Del Teorema de Selección de Helly, la secuencia converge a una función creciente $\tilde{\alpha}_i \in BV([0, 1], \mathbb{R})$.

Además, ya que $\underline{a}_i \leq \tilde{\alpha}_{i,k}(0)$ para toda k , el límite también satisface $\underline{a}_i \leq \tilde{\alpha}_i(0)$. De manera similar, ya que $\bar{a}_i \geq \tilde{\alpha}_{i,k}(1)$ para toda k , el límite también satisface $\bar{a}_i \geq \tilde{\alpha}_i(1)$. Finalmente, el límite puntual de funciones medibles es medible (Corolario 8.9, Medida, Integrales y Martingalas, Schilling (2005)). Debido a que $\tilde{\alpha}_i$ es una función monótona y medible que mapea de $[0, 1]$ a A_i , $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{A}_i$. ■

⁴¹En el caso donde $u^i \in \Gamma^\downarrow$ para toda $i \in N$, se usa el Teorema 7 de Villas-Boas (1997) que usa conjuntos inferiores generados por el orden convexo decreciente para obtener las estáticas comparativas deseadas de los puntos fijos.

⁴²Específicamente, $V(g) = \sup_{p \in P} \sum_{i=0}^{n_p-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$ donde P es el conjunto de todas las particiones $p = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_p}\}$ en $[0, 1]$.

Definiendo un orden parcial débil sobre $\mathcal{A}_i$ con $\alpha''_i \succeq_i \alpha'_i$ si, y sólo si, α''_i domina a α'_i en el orden convexo creciente. Usando el Lema 1 (y la equivalencia de α_i a su función cuantil), $\alpha''_i \succeq_i \alpha'_i$ si, y sólo si

$$\int_t^1 \alpha''_i(s_i) ds_i \geq \int_t^1 \alpha'_i(s_i) ds_i, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Denotando el conjunto superior de α_i con $\mathcal{US}(\alpha_i) \triangleq \{\alpha'_i \in \mathcal{A}_i : \alpha'_i \succeq_i \alpha_i\} \subseteq \mathcal{A}_i$.

Lema 8 *Para cada $i = 1, 2$, y para cualquier $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$, $\mathcal{US}(\alpha_i)$ es un conjunto compacto y contractible.*

Proof. Para una dada $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$, $\mathcal{US}(\alpha_i)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}_i$ (se deriva del Teorema de convergencia dominada). Por lo tanto, es compacto. Para mostrar que $\mathcal{US}(\alpha_i)$ es contractible, sea $\alpha_i^c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_i$ la función constante con $\alpha_i^c(s) = \bar{\alpha}_i$ para toda $s \in [0, 1]$. Notar que $\alpha_i^c \in \mathcal{A}_i$. Adicionalmente, $\alpha_i^c(s) \geq \alpha_i(s)$, $\forall s \in [0, 1]$ lo cual implica que $\alpha_i^c \succeq_i \alpha_i \Rightarrow \alpha_i^c \in \mathcal{US}(\alpha_i)$.

Para cada $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$, definir el mapeo $\Phi : \mathcal{US}(\alpha_i) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{US}(\alpha_i)$ de manera que

$$\Phi(\alpha'_i, \lambda) = (1 - \lambda)\alpha'_i + \lambda\alpha_i^c.$$

$\Phi(\cdot, \lambda)$ es continua en λ . Conforme λ incrementa de 0 a 1, Φ deforma continuamente cualquier estrategia en $\mathcal{US}(\alpha_i)$ a la estrategia constante α_i^c , la cual está en $\mathcal{US}(\alpha_i)$. Por lo tanto, $\mathcal{US}(\alpha_i)$ es contractible. ■

Hasta ahora, se tiene un orden, $\succeq_i$, en $\mathcal{A}_i$ que genera conjuntos superiores compactos y contractibles. Se extienden estas propiedades a $\mathcal{A} \triangleq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ con el orden del producto: dado $\alpha'', \alpha' \in \mathcal{A}$, $\alpha'' \succeq \alpha'$ si, y sólo si, $\alpha''_i \succeq_i \alpha'_i$ para cada $i = 1, 2$. Junto con la topología del producto, $\succeq$ es un orden parcial en $\mathcal{A}$ que genera conjuntos superiores compactos y contractibles.⁴³

Para un juego bayesiano $\mathcal{G}_\rho \triangleq (\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\rho_2}, G)$, se define un operador $T_\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con

$$T_\rho(\alpha) = (a_1^{BR}(\alpha_2, \rho), a_2^{BR}(\alpha_1, \rho)).$$

T_ρ es continuo en α ya que las funciones de utilidad son continuas en las acciones. Un

⁴³ $\mathcal{A}$ es un subconjunto de un espacio Banach equipado con la métrica $d(\alpha', \alpha) = \sum_i \|\alpha'_i - \alpha_i\|_{BV}$.

ENB monótono de $\mathcal{G}_\rho$, $a^*(\rho)$, es un punto fijo de T_ρ . Se sabe que dicho punto fijo existe (Van Zandt y Vives, 2007).

Considerando dos juegos diferentes, $\mathcal{G}_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\rho''}, \Sigma_{\rho''}, G)$ y $\mathcal{G}_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\rho'}, \Sigma_{\rho'}, G)$, con $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ para toda $i = 1, 2$. Para toda $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\rho''_i \succeq_{spm} \rho'_i, \forall i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{por el Lema 4} \\ \text{y el Lema 5}}} \quad a_i^{BR}(\alpha_{-i}, \rho'') \succeq_i a_i^{BR}(\alpha_{-i}, \rho'), \forall i \Leftrightarrow T_{\rho''}(\alpha) \succeq T_{\rho'}(\alpha).$$

Adicionalmente,

$$\alpha'' \succeq \alpha' \Leftrightarrow \alpha''_i \succeq_i \alpha'_i, \forall i \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por el Lema 6}} \quad a_i^{BR}(\alpha''_{-i}, \rho'') \succeq_i a_i^{BR}(\alpha'_{-i}, \rho''), \forall i \Leftrightarrow T_{\rho''}(\alpha'') \succeq T_{\rho''}(\alpha').$$

De esta forma ahora se puede aplicar directamente el Teorema 6 de Villas-Boas (1997) para concluir que, para cada punto fijo $a^*(\rho')$ de $T_{\rho'}$, existe un punto fijo $a^*(\rho'')$ de $T_{\rho''}$ tal que $a^*(\rho'') \succeq a^*(\rho')$. ■

8.2 Aplicaciones

Demostración de la Proposición 2

Proof. $-qP''(q)/P'(q) \leq 1$ implica que $CS(q) = \int_0^q P(t)dt - qP(q)$ es una función creciente convexa. Si $\pi \in \mathcal{U}^I$, entonces para dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$ con $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$, $q^M(\rho'')$ domina a $q^M(\rho')$ en el orden convexo creciente, i.e., el monopolista es sensible con mayor media bajo $\Sigma_{\rho''}$. Por definición, $E[CS(q^M(\rho''))] \geq E[CS(q^M(\rho'))]$. ■

Demostración de la Proposición 3

Proof. Se toman dos estructuras de información $\Sigma_{\rho''}, \Sigma_{\rho'}$ con $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$. La diferencia del pago ex-ante del emisor está dada por $V(\rho'') - V(\rho')$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Theta \times S} v(\theta, a(s; \rho'')) [dF(\theta, s; \rho'') - dF(\theta, s; \rho')] \\ &+ \int_{\Theta \times S} [v(\theta, a(s; \rho'')) - v(\theta, a(s; \rho'))] dF(\theta, s; \rho'). \end{aligned} \tag{1}$$

Cuando $v(\theta, a)$ tiene DC en $(\theta; a)$ y $a(s; \rho)$ es creciente en s (lo cual se deriva de $u(\theta, a)$ satisfaciendo DC en $(\theta; a)$ y las posteriores creciendo en FOSD a medida que

s incrementa), $v(\theta, a(s; \rho))$ tiene DC en $(\theta; s)$. Así, por el Lema 2, el primer término integral es no negativo.

Cuando $v(\theta, a)$ es diferenciable⁴⁴ y convexa en a para toda $\theta \in \Theta$, el segundo término integral satisface

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta \times S} [v(\theta, a(s; \rho'')) - v(\theta, a(s; \rho'))] dF(\theta, s; \rho') \\ & \geq \int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] \underbrace{\int_{\Theta} v_a(\theta, a(s, \rho')) \mu(d\theta | s; \rho') ds}_{= \mathbb{E}_{\Theta}[v_a(\tilde{\theta}, a(s, \rho')) | s; \rho']} ds. \end{aligned}$$

Cuando $v(\theta, a)$ es tanto convexa en a como con DC en $(\theta; a)$, y las creencias posteriores crecen en FOSD conforme s incrementa, el término $\mathbb{E}_{\Theta}[v_a(\tilde{\theta}, a(s, \rho')) | s; \rho']$ es una función creciente de s .

Caso I: $u \in \mathcal{U}^I$ y v es creciente en a .

Del Teorema 1, $u \in \mathcal{U}^I$ implica que

$$\int_t^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] ds \geq 0, \forall t \in [0, 1].$$

Del Lema 3 y $v(\theta, a)$ creciente en a ,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] \mathbb{E}_{\Theta}[v_a(\tilde{\theta}, a(s, \rho')) | s; \rho'] ds \\ & \geq \underbrace{\int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] ds}_{\geq 0 \text{ ya que } u \in \mathcal{U}^I} \mathbb{E}_{\Theta}[v_a(\tilde{\theta}, a(0, \rho')) | 0; \rho'] \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el segundo término integral en (1) también es no negativo. En otras palabras, $V(\rho'') \geq V(\rho')$.

Caso II: $u \in \mathcal{U}^D$ y v es decreciente en a .

Del Teorema 1, $u \in \mathcal{U}^D$ implica que

$$\int_0^t [a(s; \rho') - a(s; \rho'')] ds \geq 0, \forall t \in [0, 1].$$

⁴⁴Si v no es diferenciable, se puede aproximar uniformemente con una función analítica convexa.

Del Lema 3 y $v(\theta, a)$ decreciente en a ,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] \mathbb{E}_\Theta[v_a(\tilde{\theta}, a(s, \rho')) | s; \rho'] ds \\
&= \int_0^1 [a(s; \rho') - a(s; \rho'')] \mathbb{E}_\Theta[-v_a(\tilde{\theta}, a(s, \rho')) | s; \rho'] ds \\
&\geq \underbrace{\int_0^1 [a(s; \rho') - a(s; \rho'')] ds}_{\geq 0 \text{ ya que } u \in \mathcal{U}^D} \mathbb{E}_\Theta[-v_a(\tilde{\theta}, a(1, \rho')) | 1; \rho'] \geq 0.
\end{aligned}$$

Una vez más, el segundo término integral en (1) también es no negativo. Por lo tanto, $V(\rho'') \geq V(\rho')$.

Caso III: $u \in \mathcal{U}^D \cap \mathcal{U}^D$.

Del Teorema 1, $u \in \mathcal{U}^I \cap \mathcal{U}^D$ implica que

$$\int_t^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] ds \geq 0, \forall t \in [0, 1],$$

con igualdad en $t = 0$. Del Lema 3

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] \int_\Theta v_a(\theta, a(s, \rho')) \mu(d\theta | s; \rho') ds \\
&\geq \underbrace{\int_0^1 [a(s; \rho'') - a(s; \rho')] ds}_{=0} \int_\Theta v_a(\theta, a(0, \rho')) \mu(d\theta | 0; \rho') ds = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $V(\rho'') \geq V(\rho')$.

Estableciendo el pago del emisor con los argumentos previos a $-v(\theta, a)$, se obtienen los enunciados correspondientes para las preferencias que satisfacen diferencias decrecientes y la concavidad. ■

Demostración del Teorema 3

Proof.

Primer caso: Se asume $u \in \mathcal{U}^I$, y $v(\theta, a)$ es creciente y convexa en a , y satisface diferencias crecientes en $(\theta; a)$:

Sea $\mu_2 \succeq_{FOSD} \mu_1$ y sea $\mu_\lambda = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$. De la Proposición 1 $a^*(\mu_\lambda) \leq \lambda a^*(\mu_1) + (1 - \lambda)a^*(\mu_2)$. Sea $a_1 = a^*(\mu_1)$, $a_2 = a^*(\mu_2)$, $a_\lambda = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ entonces

$$\begin{aligned}
\int v(a^*(\mu_\lambda), \theta) d\mu_\lambda &\leq \int v(a^*(\mu_\lambda), \theta) d\mu_\lambda \\
&\leq \lambda \int v(a_1, \theta) d\mu_\lambda + (1 - \lambda) \int v(a_2, \theta) d\mu_\lambda \\
&= \lambda^2 \int v(a_1, \theta) d\mu_1 + (1 - \lambda)^2 \int v(a_2, \theta) d\mu_2 \\
&\quad \lambda(1 - \lambda) \left[\int v(a_1, \theta) d\mu_2 + \int v(a_2, \theta) d\mu_1 \right] \\
&= \lambda \int v(a_1, \theta) d\mu_1 + (1 - \lambda) \int v(a_2, \theta) d\mu_2 \\
&\quad \lambda(1 - \lambda) \left[\int v(a_1, \theta) d\mu_2 + \int v(a_2, \theta) d\mu_1 - \int v(a_1, \theta) d\mu_1 - \int v(a_2, \theta) d\mu_2 \right] \\
&\leq \lambda \int v(a_1, \theta) d\mu_1 + (1 - \lambda) \int v(a_2, \theta) d\mu_2
\end{aligned}$$

Por inducción, si alguna señal $\Sigma_{\rho''}$ satisface (A.5) y tiene posteriores finitas, entonces para cualquier difuminación $\Sigma_{\rho'}$ con posteriores finitas se tiene que $V(\rho'') > V(\rho')$ (ver la demostración del Corolario 1). El argumento previo puede extenderse al caso de posteriores infinitas siguiendo los métodos en Zhang (2008). Los otros dos casos son análogos. ■

Demostración de la Proposición 4

Proof. Se toman dos estructuras de información cualesquiera $\Sigma_{\rho''} \triangleq (\Sigma_{\bar{\rho}_1}, \Sigma_{\rho_2''})$, $\Sigma_{\rho'} \triangleq (\Sigma_{\bar{\rho}_1}, \Sigma_{\rho_2'})$ con $\rho_2'' \succeq_{spm} \rho_2'$. Entonces $U_1(\rho'') - U_1(\rho')$

$$= \int_{\Theta \times S_2} u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho''), a_2^*(s_2; \rho'')) dF(\theta, s_2; \rho_2'') - \int_{\Theta \times S_2} u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) dF(\theta, s_2; \rho_2'),$$

que puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
& \int_{\Theta \times S_2} \left[u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho''), a_2^*(s_2; \rho'')) - u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho'')) \right] dF(\theta, s_2; \rho'') \quad (2) \\
& + \int_{\Theta \times S_2} \left[u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho'')) - u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \right] dF(\theta, s_2; \rho'') \\
& + \int_{\Theta \times S_2} u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \left[dF(\theta, s_2; \rho'') - dF(\theta, s_2; \rho') \right].
\end{aligned}$$

El primer término de (2) es no negativo ya que $a_1^*(\rho'')$ es la mejor respuesta del jugador 1 a $a_2^*(\rho'')$ y a la estructura de información $\Sigma_{\rho''}$. Para el tercer término de (2), se toma que $s_2'' > s_2'$ lo cual implica que $a_2^*(s_2''; \rho') \geq a_2^*(s_2'; \rho')$ y se debe notar que

$$u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2''; \rho')) - u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2'; \rho'))$$

es creciente en θ porque u^1 tiene DC en $(\theta, a_1; a_2)$. Por lo tanto, $u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho'))$ tiene DC en $(\theta; s_2)$. Del Lema 2,

$$\int_{\Theta \times S_2} u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \left[dF(\theta, s_2; \rho'') - dF(\theta, s_2; \rho') \right] \geq 0$$

y el tercer término de (2) también es no negativo.

Derivado de la convexidad y de la diferenciabilidad de u^1 en a_2 , el segundo término de (2) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \int_{S_2} \int_{\Theta} \left[u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho'')) - u^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \right] \mu(d\theta|s_2; \rho'') ds_2 \\
& \geq \int_{S_2} (a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho')) \int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \mu(d\theta|s_2; \rho'') ds_2.
\end{aligned}$$

Como u^1 tiene DC en $(\theta, a_1; a_2)$, $a_1^*(\theta; \rho')$ es creciente en θ , $a_2^*(s_2; \rho')$ es creciente en s_2 , y el supuesto (A.12),

$$\int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \mu(d\theta|s_2; \rho'')$$

es creciente en s_2 .

Caso I: $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ y u^1 es creciente en a_2 .

Del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ implica que $a_2^*(\rho'')$ domina a $a_2^*(\rho')$ en el orden convexo creciente. Del Lema 1,

$$\int_t^1 \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) ds_2 \geq 0$$

para toda $t \in [0, 1]$. Derivado del Lema 3, el segundo término de (2) es mayor que

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) \int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \mu(d\theta|s_2; \rho'') ds_2 \\ & \geq \underbrace{\int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) ds_2}_{\geq 0 \text{ debido al orden convexo creciente}} \underbrace{\int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(0; \rho')) \mu(d\theta|0; \rho'')}_{\geq 0 \text{ ya que } u^1 \text{ es creciente en } a_2} \geq 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2'' \succeq_{spm} \rho_2'$ implica que $U_1(\rho'') \geq U_1(\rho')$. Como $\bar{\rho}_2 \succeq_{spm} \rho_2$ para toda $\Sigma_{\rho_2} \in \mathcal{P}_2$, entonces el pago ex-ante del jugador 1 es maximizado por la estructura de información completa.

Caso II: $u^i \in \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ y u^1 es decreciente en a_2 .

Del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ implica que $a_2^*(\rho'')$ domina a $a_2^*(\rho')$ en el orden convexo decreciente. Del Lema 1,

$$\int_0^t \left(a_2^*(s_2; \rho') - a_2^*(s_2; \rho'') \right) ds_2 \geq 0$$

para toda $t \in [0, 1]$. Del Lema 3, el segundo término de (2) es mayor que

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho') - a_2^*(s_2; \rho'') \right) \int_{\Theta} -u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \mu(d\theta|s_2; \rho'') ds_2 \\ & \geq \underbrace{\int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho') - a_2^*(s_2; \rho'') \right) ds_2}_{\geq 0 \text{ debido al orden convexo decreciente}} \underbrace{\int_{\Theta} -u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(1; \rho')) \mu(d\theta|1; \rho'')}_{\geq 0 \text{ ya que } u^1 \text{ es decreciente en } a_2} \geq 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2'' \succeq_{spm} \rho_2'$ implica que $U_1(\rho'') \geq U_1(\rho')$ y que el pago ex-ante del jugador 1 es maximizado por la estructura de información completa.

Caso III: $u^i \in \Gamma^I \cap \Gamma^D$ para $i = 1, 2$.

Del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^I \cap \Gamma^D$ para $i = 1, 2$ implica que $a_2^*(\rho'')$ es una dispersión que preserva la media de $a_2^*(\rho')$, i.e., $a_2^*(\rho'')$ domina a $a_2^*(\rho')$ en el orden convexo creciente y

decreciente. Del Lema 1,

$$\int_0^t \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) ds_2 \geq 0$$

para toda $t \in [0, 1]$. Del Lema 3, el segundo término de (2) es mayor que

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) \int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(s_2; \rho')) \mu(d\theta|s_2; \rho'') ds_2 \\ & \geq \underbrace{\int_{S_2} \left(a_2^*(s_2; \rho'') - a_2^*(s_2; \rho') \right) ds_2}_{=0 \text{ debido a la dispersión que preserva la media}} \int_{\Theta} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(\theta; \rho'), a_2^*(0; \rho')) \mu(d\theta|0; \rho'') = 0. \end{aligned}$$

Así, $\rho_2'' \succeq_{spm} \rho_2'$ implica que $U_1(\rho'') \geq U_1(\rho')$ y que el pago ex-ante del jugador 1 es maximizado por la estructura completa de información. ■

Demostración del Teorema 4

Proof. únicamente se presenta la demostración para el caso donde $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ y $u^1(\theta, a)$ es una función creciente y convexa de a_2 . Los casos restantes pueden ser demostrados con argumentos similares.⁴⁵

Se toman dos estructuras de información $\Sigma_{\rho_1}, \Sigma_{\hat{\rho}_1} \in \mathcal{P}$. Por definición, $VT(\rho; \hat{\rho}) = U_1(\rho; \rho) - U_1(\rho; \hat{\rho})$ está dado por

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho) \\ & = \underbrace{\int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \rho)) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho)}_{\geq 0 \text{ por optimalidad}} \\ & \quad + \underbrace{\int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho)}_{\substack{\geq u_{a_2}^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) (a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \\ \text{por la convexidad de } u^1 \text{ en } a_2}} \\ & \geq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \int_{\Theta_1 \times S_1} u_{a_2}^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) d\mathbf{F}(\theta, s_1|s_2; \rho) ds_2. \end{aligned}$$

⁴⁵El lector debe dirigirse también a la demostración de la Proposición 4 la cual contiene una demostración similar para los tres casos.

Definiendo $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\zeta(s_2) \triangleq \int_{\Theta_1 \times S_1} u_{a_2}^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) d\mathbf{F}(\theta, s_1 | s_2; \rho).$$

Hasta aquí, se ha establecido que

$$VT(\rho; \hat{\rho}) \geq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \zeta(s_2) ds_2.$$

Se puede también reescribir $VT(\rho; \hat{\rho}) = U_1(\rho; \rho) - U_1(\rho; \hat{\rho})$ como

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho) \\ &= \int_{\Theta \times S} \underbrace{\left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) - u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right]}_{\substack{\leq -u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho))(a_2^*(s_2; \hat{\rho}) - a_2^*(s_2; \rho)) \\ \text{por la concavidad de } -u^1 \text{ en } a_2}} d\mathbf{F}(\theta, s; \rho) \\ &+ \underbrace{\int_{\Theta \times S} \left[u^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) - u^1(\theta, a_1^{BR}(s_1; a_2^*(\hat{\rho}), \rho), a_2^*(s_2; \hat{\rho})) \right] d\mathbf{F}(\theta, s; \rho)}_{\leq 0 \text{ por optimalidad}} \\ &\leq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \int_{\Theta_1 \times S_1} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) d\mathbf{F}(\theta, s_1 | s_2; \rho) ds_2. \end{aligned}$$

Definiendo $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\eta(s_2) \triangleq \int_{\Theta_1 \times S_1} u_{a_2}^1(\theta, a_1^*(s_1; \rho), a_2^*(s_2; \rho)) d\mathbf{F}(\theta, s_1 | s_2; \rho).$$

Entonces,

$$\int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \eta(s_2) ds_2 \geq VT(\rho; \hat{\rho}) \geq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \zeta(s_2) ds_2.$$

Se debe recordar que $u^1(\theta, a)$ es creciente en a_2 , i.e., externalidades positivas. Por lo tanto, ambas $\zeta(s_2) \geq 0$ y $\eta(s_2) \geq 0$ para toda $s_2 \in [0, 1]$. Adicionalmente, $u_{a_2}^1(\theta, a)$ también es creciente en a_2 por la convexidad. Así, cuando se tienen valores privados independientes, o cuando $u^1(\theta, a)$ satisface DC en $(\theta, a_1; a_2)$ (junto con (A.6) y (A.11)-(A.13)), entonces $\zeta(s_2)$ y $\eta(s_2)$ son crecientes en s_2 .

($\implies$) Suponer que $\rho_1 \succeq_{spm} \hat{\rho}_1$. Del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ implica que $a_2^*(\rho)$ domina a $a_2^*(\hat{\rho})$ en el orden convexo creciente. Del Lema 1,

$$\int_t^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) ds_2 \geq 0$$

para total $t \in [0, 1]$. Usando el Lema 3, se puede concluir que

$$\begin{aligned} VT(\rho; \hat{\rho}) &\geq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \zeta(s_2) ds_2 \\ &\geq \zeta(0) \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) ds_2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

($\impliedby$) Suponer que $\rho_1 \not\succeq_{spm} \hat{\rho}_1$. Por el supuesto, $\mathcal{P}$ es un conjunto completamente ordenado de estructuras de información. Así, $\hat{\rho}_1 \succeq_{spm} \rho_1$. Del Teorema 2, $u^i \in \Gamma^I$ para $i = 1, 2$ implica que $a_2^*(\hat{\rho})$ domina a $a_2^*(\rho)$ en el orden convexo creciente. Del Lema 1,

$$\int_t^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) ds_2 \leq 0$$

para total $t \in [0, 1]$. Usando el segundo teorema del valor medio, existe una $t^* \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} VT(\rho; \hat{\rho}) &\leq \int_0^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \eta(s_2) ds_2 \\ &= \eta(1) \int_{t^*}^1 \left(a_2^*(s_2; \rho) - a_2^*(s_2; \hat{\rho}) \right) \eta(s_2) ds_2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Con esto se concluye la demostración. ■

8.3 Blackwell, Lehmann, y el Orden Supermodular

Es natural preguntarse por qué el orden supermodular es el orden relevante a considerar en lugar del más familiar orden de Blackwell (Blackwell, 1951, 1953) o el orden de Lehmann (Lehmann, 1988). La respuesta es doble: La primera razón para enfocarse en el orden supermodular tiene que ver con el valor de la información en la clase de problemas de decisión que se consideran. Blackwell (1951, 1953) muestra que todos los tomadores de decisión valoran una mayor calidad de información si y sólo si la calidad de la información está clasificada por la informatividad de Blackwell. Athey y Levin (2017) muestran que si la clase de problemas de decisión está restringida a preferencias supermodulares, entonces una mayor calidad de la información es valiosa si y sólo si la información es clasificada por el orden supermodular más general. Nuestros resultados consolidan aún más el vínculo entre la clase de pagos supermodulares y el orden supermodular al proveer condiciones en las utilidades marginales de las funciones de pago supermodulares, de manera que los agentes reaccionan más cuando la calidad de la información se incrementa, si y sólo si la calidad de la información es clasificada por el orden supermodular.

Segundo, dentro de la clase de estructuras de información que satisfacen (A.5), el orden supermodular es un orden más general que la informatividad de Blackwell y que el orden de Lehmann. En particular, si las estructuras de información satisfacen la propiedad de la razón de verosimilitud monótona (PRVM) (un supuesto más fuerte que (A.5)), entonces la informatividad de Blackwell implica el orden de Lehmann, el cual a su vez implica el orden supermodular. Lo contrario, sin embargo, no es cierto tal cual se muestra en el ejemplo debajo. La Figura 7 representa la anidación de los órdenes de información y la clase de problemas de decisión asociados.

Fig. 9: Ordenamiento de información y problemas de decisión

El siguiente es un ejemplo de estructuras de información que pueden ser ordenadas empleando el orden supermodular pero no el orden de Lehmann.⁴⁶ Únicamente para esta sección, se consideran estructuras de información $\Sigma_\rho \triangleq (S, \{F(\cdot|\theta; \rho)\}_{\theta \in \Theta})$ tales que $\{F(\cdot|\theta; \rho)\}_{\theta \in \Theta}$ satisface la PRVM, i.e., para cualquier $s < s'$, la función de verosimilitud

$$\frac{f(s'|\theta; \rho)}{f(s|\theta; \rho)}$$

es no decreciente en θ .⁴⁷

Orden de (precisión) Lehmann: $\Sigma_{\rho''}$ domina a $\Sigma_{\rho'}$ en el orden de Lehmann, denotado como $\rho'' \succeq_L \rho'$, si para toda $s \in S$,

$$F^{-1}\left(F(s|\theta; \rho')|\theta; \rho''\right)$$

es no decreciente en θ .

Ejemplo: Sea $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ con $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Sea μ_i^o tal que en θ_i se tiene $\mu_1^o = \mu_2^o = \frac{2}{5}$ y $\mu_3^o = \frac{1}{5}$. Considerando dos estructuras de información $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$ tales que el espacio de señales S es el intervalo unitario para ambas estructuras y $F(s|\theta_i; \rho')$ está dada por

⁴⁶Véase Lehmann (1988), Persico (2000), y Jewitt (2007) para un análisis más complete del ordenamiento de Lehmann.

⁴⁷Este es un supuesto mucho más restrictivo en las estructuras de señales que (A.5).

	$0 \leq s < 1/2$	$1/2 \leq s \leq 1$
θ_1	$s \frac{3}{2}$	$\frac{1+s}{2}$
θ_2	s	s
θ_3	0	$2s - 1$

mientras que $F(s|\theta_i; \rho'')$ está dada por Para ambas estructuras de información,

	$0 \leq s < 1/2$	$1/2 \leq s \leq 1$
θ_1	$2s$	1
θ_2	$\frac{s}{2}$	$\frac{3s-1}{2}$
θ_3	0	$2s - 1$

la marginal en la señal es simplemente la distribución uniforme en $S = [0, 1]$, i.e., $F_S(s; \rho') = F_S(s; \rho'') = s$ para toda $s \in [0, 1]$. Además, ambas estructuras satisfacen la PRVM: para cualquier $s < s' < 1/2$ o $1/2 \leq s < s'$, las funciones de verosimilitud satisfacen

$$\frac{f(s'|\theta_i; \rho')}{f(s|\theta_i; \rho')} = \frac{f(s'|\theta_i; \rho'')}{f(s|\theta_i; \rho'')} = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

mientras que para cualquier $s < 1/2 \leq s'$, los cocientes de verosimilitud satisfacen

$$\underbrace{\frac{f(s'|\theta_1; \rho')}{f(s|\theta_1; \rho')}}_{=1/3} < \underbrace{\frac{f(s'|\theta_2; \rho')}{f(s|\theta_2; \rho')}}_{=1} < \underbrace{\frac{f(s'|\theta_3; \rho')}{f(s|\theta_3; \rho')}}_{=\infty},$$

y

$$\underbrace{\frac{f(s'|\theta_1; \rho'')}{f(s|\theta_1; \rho'')}}_{=0} < \underbrace{\frac{f(s'|\theta_2; \rho'')}{f(s|\theta_2; \rho'')}}_{=3} < \underbrace{\frac{f(s'|\theta_3; \rho'')}{f(s|\theta_3; \rho'')}}_{=\infty}.$$

Como resultado, $s' > s$ implica que $\mu(\cdot|s'; \rho) \succeq_{FOSD} \mu(\cdot|s; \rho)$, para $\rho = \rho', \rho''$ (Milgrom; 1981).

En primer lugar se muestra que $\rho' \not\preceq_L \rho''$ y $\rho'' \not\preceq_L \rho'$. Si $\rho' \succeq_L \rho''$, entonces

$$F^{-1}\left(F(s|\theta; \rho'')|\theta; \rho'\right)$$

debe ser creciente en θ para cada $s \in [0, 1]$. Sin embargo, para toda $s \in [0, 1]$

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_3; \rho'')|\theta_3; \rho'\right) = s$$

mientras que

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_1; \rho'')|\theta_1; \rho'\right) \geq F^{-1}\left(F(s|\theta_1; \rho')|\theta_1; \rho'\right) = s$$

ya que $F(s|\theta_1; \rho'') \geq F(s|\theta_1; \rho')$. De manera similar,

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_2; \rho'')|\theta_2; \rho'\right) \leq F^{-1}\left(F(s|\theta_2; \rho')|\theta_2; \rho'\right) = s$$

porque $F(s|\theta_2; \rho'') \leq F(s|\theta_2; \rho')$. En resumen, se tiene

$$F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_2; \rho'')|\theta_2; \rho'\right) < F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_3; \rho'')|\theta_3; \rho'\right) < F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_1; \rho'')|\theta_1; \rho'\right)$$

lo cual no cumple la condición de monotonicidad de Lehmann. Por lo tanto, $\rho' \not\preceq_L \rho''$.

La Figura 8 representa las distribuciones condicionales de las señales. La línea sólida negra es la distribución condicional de las señales dada θ_3 bajo ambos $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$. Las líneas azules, sólida y punteada, son la distribución condicional de las señales dado θ_1 bajo $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$ respectivamente. De manera similar, las líneas rojas, sólida y punteada, son la distribución condicional de las señales dada θ_2 bajo $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$ respectivamente. Empezando desde $s^* \in [0, 1]$, las flechas muestran la transformación hacia $\tau_i = F^{-1}\left(F(s^*|\theta_i; \rho'')|\theta_i; \rho'\right)$ donde las flechas azules, rojas y negras corresponden a θ_1 , θ_2 , y θ_3 respectivamente. De la misma manera, si $\rho'' \succeq_L \rho'$, entonces

$$F^{-1}\left(F(s|\theta; \rho')|\theta; \rho''\right)$$

debe ser creciente en θ para cada $s \in [0, 1]$. Sin embargo, para toda $s \in [0, 1]$,

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_3; \rho')|\theta_3; \rho''\right) = s$$

mientras que

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_1; \rho')|\theta_1; \rho''\right) \leq F^{-1}\left(F(s|\theta_1; \rho'')|\theta_1; \rho''\right) = s,$$

Fig. 10: $\rho' \not\preceq_L \rho''$

y

$$F^{-1}\left(F(s|\theta_2; \rho')|\theta_2; \rho''\right) \geq F^{-1}\left(F(s|\theta_2; \rho'')|\theta_2; \rho''\right) = s.$$

En total, se tiene que

$$F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_1; \rho')|\theta_1; \rho''\right) < F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_3; \rho')|\theta_3; \rho''\right) < F^{-1}\left(F(\cdot|\theta_2; \rho')|\theta_2; \rho''\right)$$

no cumple la condición de monotonicidad de Lehmann. Por lo tanto, $\rho'' \not\preceq_L \rho'$. Incluso, $\Sigma_{\rho''}$ y $\Sigma_{\rho'}$ tampoco están ordenadas a la Blackwell ya que el orden de Blackwell implica el orden de Lehmann (dentro de la clase de estructuras con propiedad de la razón de verosimilitud monótona, PRVM).

La Figura 9 representa las distribuciones condicionales de las señales. La línea sólida negra es la distribución condicional de las señales dada θ_3 bajo ambas $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$. Las líneas azules, sólida y punteada, son la distribución condicional de las señales dada θ_1 bajo $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$ respectivamente. Del mismo modo, las líneas rojas, sólida y punteada, son la distribución condicional de las señales dada θ_2 bajo $\Sigma_{\rho'}$ y $\Sigma_{\rho''}$ respectivamente. Empezando desde $s^* \in [0, 1]$, las flechas muestran la transformación hacia $\tilde{\tau}_i = F^{-1}\left(F(s^*|\theta_i; \rho')|\theta_i; \rho''\right)$ donde las flechas azules, rojas y negras corresponden a θ_1 ,

θ_2 , y θ_3 respectivamente.

Fig. 11: $\rho'' \not\preceq_L \rho'$

A continuación, se muestra que $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$. Del Lema 2, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$ si $F(\theta_i, s; \rho') - F(\theta_i, s; \rho'') \leq 0$ para toda (θ_i, s) . Notar que para toda $s \in [0, 1]$,

$$F(\theta_1, s; \rho') - F(\theta_1, s; \rho'') = \mu_1^o \left(F(s|\theta_1; \rho') - F(s|\theta_1; \rho'') \right) \leq 0.$$

Además, para toda $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(\theta_2, s; \rho') - F(\theta_2, s; \rho'') &= \mu_1^o \left(F(s|\theta_1; \rho') - F(s|\theta_1; \rho'') \right) + \mu_2^o \left(F(s|\theta_2; \rho') - F(s|\theta_2; \rho'') \right) \\ &= \frac{2}{5} \left(F(s|\theta_1; \rho') - F(s|\theta_1; \rho'') + F(s|\theta_2; \rho') - F(s|\theta_2; \rho'') \right) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, $F(\theta_3, s; \rho') - F(\theta_3, s; \rho'') = \sum_{i=1}^3 \mu_i^o \left(F(s|\theta_i; \rho') - F(s|\theta_i; \rho'') \right) = F_S(s; \rho') - F_S(s; \rho'') = 0$. Por lo tanto, $\rho'' \succeq_{spm} \rho'$.