Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2011-04

Competencia en Precios en una Red

Carlos Lever Guzmán
Banco de México

Julio 2011

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Competencia en Precios en una Red*

Carlos Lever Guzmán[†]
Banco de México

Resumen

Presentamos un modelo de competencia imperfecta donde no todas las empresas pueden venderle a todos los consumidores. Usamos un modelo de red para modelar la estructura de interacciones locales entre empresas y consumidores. Encontramos que el bienestar total se maximiza cuando la red está completamente conectada, lo cual corresponde a competencia perfecta, y se reduce monótonamente a medida que se eliminan conexiones hasta que las empresas se vuelven monopolios locales. Cuando estudiamos cuáles redes se forman en equilibrio encontramos que las redes estables no están completamente conectadas pero están lo suficientemente conectadas para descartar que existan monopolios locales. Nuestros resultados se extienden a competencia oligopolística cuando los consumidores sólo pueden comprar a una empresa o a todas las empresas.

Palabras Clave: Mercados de redes, competencia en precios, competencia oligopolística, competencia de Bertrand.

Abstract

We present a model of imperfect price competition where not all firms can sell to all consumers. A network structure models the local interaction of firms and consumers. We find that aggregate surplus is maximized with a fully connected network, which corresponds to perfect competition, and decreases monotonically as the network becomes less connected until firms become local monopolists. When we study which networks are likely to form in equilibrium, we find that stable networks are not fully connected but are connected enough to rule out local monopolists. Our results extend to oligopolistic competition when consumers can either buy from a single firm or from all firms.

Keywords: Network markets, price competition, oligopoly competition, Bertrand competition.

JEL Classification: D43, D85, L11, L13.

*Tengo una gran deuda con Matthew Jackson por guiarme y apoyarme en este proyecto. También agradezco la muy útil retroalimentación de Doug Bernheim, Jon Levin, Ilya Segal, Andy Skrzypacz, Juuso Toikka, Ben Golub, Matt Elliot, Michihiro Kandori, Preston McAfee, Luis Rayo, de los miembros del seminario informal de teoría microeconómica en Stanford y del grupo de trabajo sobre redes.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: clever@banxico.org.mx.

1. Introducción

Las redes se han vuelto populares para modelar mercados donde los consumidores sólo pueden comprar productos de algunas (pero no todas) las empresas. El propósito de estos modelos es entender cómo la estructura de las interacciones factibles afecta los precios y el bienestar, así como estudiar cómo los incentivos de mercados dan forma a la estructura de la red.

Sin embargo, los modelos recientes de redes para mercados todavía tienen dificultades para encontrar el balance entre modelar una descripción realista de los mercados y al mismo tiempo mantener los modelos lo suficientemente manejables para incorporar estructuras de redes complejas. En el presente documento se modela el mercado mediante un mecanismo estándar descentralizado: la competencia en precios de Bertrand. Se encuentra que el bienestar total se maximiza solamente cuando la red está completamente conectada, lo cual corresponde a competencia perfecta, y se reduce monótonamente a medida que se eliminan conexiones. La ineficiencia más alta ocurre cuando las empresas se vuelven monopolistas sobre algunos componentes de la red. Lo anterior contrasta con los resultados de modelos de redes previos que encontraron que la asignación siempre es eficiente condicional a la estructura de la red.¹

Dos documentos importantes en la literatura son Kranton y Minehart (2001) y Corominas-Bosch (2004). Kranton y Minehart utilizan una subasta ascendente estilizada donde los mercados secuencialmente llegan al equilibrio para subcomponentes de la red. Aunque este mecanismo es similar a la idea del subastador Walrasiano (ttonnement), es difícil ver cómo este mecanismo puede ser descentralizado. A su vez, Corominas-Bosch utiliza un protocolo de negociación con ofertas alternantes, pero se requiere que todos los miembros en cada parte del mercado anuncien sus propuestas simultáneamente, lo cual también implica cierto grado de centralización en el proceso de determinación de precios.

Ambos documentos llegan a conclusiones distintas acerca cuáles redes se esperaría se formasen en equilibrio. Kranton y Minehart encuentran que las redes de equilibrio siempre son eficientes, mientras que Corominas-Bosch encuentran que las redes tienden a estar sobre-conectadas. En el presente documento, se encuentra que redes estables están subconectadas con respecto a la estructura de una red eficiente.²

Un factor clave para nuestros resultados es la presencia de consumidores cautivos: los

¹Véase Kranton y Minehart (2001), Corominas-Bosch (2004), Blume et al. (2007) y Elliot (2010).

²Excepto cuando los costos de conexión miembros son demasiado altos. Como se muestra más adelante, si un regulador conoce los costos de empresas y conectar a una red es caro, entonces preferiría regular los precios y estipular que las redes tengan menos conexiones.

consumidores que solamente pueden comprar a una empresa. Sin consumidores cautivos, las empresas siempre juegan estrategias estándar de Bertrand, la asignación es siempre eficiente y los detalles de la estructura de la red no son relevantes.

Esto es un corolario de un resultado importante de Byford (2007) en un modelo estrechamente relacionado al presentado en este documento. Su resultado es relevante porque se puede aplicar a cualquier subconjunto de empresas en cualquier red. Para ser preciso, dado cualquier subconjunto S tal que todos los consumidores conectados con una empresa en S también están conectados con al menos una empresa adicional en S , Byford muestra que las empresas en S siempre fijan su precio de tal manera que se iguale a su costo marginal.³ Para cumplir la condición de Byford es necesario que ninguna empresa en S tenga consumidores cautivos. Conversamente, si no existen consumidores cautivos en la economía, S es igual al conjunto completo de empresas.

Otro documento de investigación similar al presente estudio es Nava (2010) que estudia competencia en cantidades (Cournot) a través de redes donde el flujo de productos es endógeno. En contraste al modelo del presente documento, Nava encuentra que el bienestar total puede disminuir al aumentar las conexiones en la red y que las empresas se benefician si pueden discriminar el precio que cobran a los consumidores.

Mi modelo está estrechamente relacionado con el modelo de ventas de Varian, aunque su objetivo principal fue el estudio de patrones de precios cuando algunos consumidores estaban informados y otros no. Por lo tanto, Varian se enfocó en un modelo simétrico.⁴ En el presente documento se intenta relacionar los precios y el bienestar con estructuras de redes distintas al del modelo de Varian.

Después de resolver el juego de determinación de precios para una red fija, se estudia cuáles redes tienen mayor probabilidad de formarse. Para ello, se analiza una serie de juegos de entrada donde las empresas deciden formar conexiones con consumidores. Encontramos que las redes estables sólo están parcialmente conectadas. Las empresas sí forman suficientes conexiones para competir por algunos consumidores, pero no forman suficientes conexiones para que la red esté completamente conectada. Debido que la competencia en precios es muy agresiva, las empresas deciden disminuir su agresividad al abstenerse de formar conexiones con todos los consumidores.

La mayoría de nuestros resultados se basan en un modelo de competencia en duopolio, ya que es difícil obtener resultados analíticos con más empresas. El modelo de duopolio es un marco de referencia útil para aclarar los resultados de otros modelos de redes. Como

³Byford muestra lo anterior para equilibrios de Nash en estrategias puras, pero su demostración se puede extender a equilibrios en estrategias mixtas.

⁴Véase Varian (1981).

se muestra en la Sección 4, los resultados pueden extenderse a competencia oligopolística siempre y cuando los consumidores sólo puedan comprar de una empresa o de todas.

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 2 se define el modelo básico de duopolio; la Sección 2.1. resuelve un ejemplo de competencia en una red de carreteras que contiene gran parte de la intuición para resolver el modelo; la Sección 2.2. encuentra el equilibrio único de Nash del modelo duopolio; la Sección 2.3. realiza ejercicios de estática comparativa para el bienestar; la Sección 2.4. analiza qué cambiaría si las empresas pueden discriminar sus precios; la Sección 3 analiza qué tipos de redes son propensas a formarse en equilibrio; la Sección 4 extiende los resultados para la competencia oligopolística; y la Sección 5 discute algunas implicaciones del modelo para medidas estándar de centralidad de redes.

2. El Modelo de Duopolio

Figura 1: Un número C_1 de consumidores sólo pueden comprar de la Empresa 1 (F_1), un número C_2 sólo de la Empresa 2 (F_2); y un número $C_{1,2}$ puede comprar de ambas empresas.

En el modelo asumimos que existe un número finito de consumidores y dos empresas (*firms*), denominadas F_1 y F_2 . Las empresas y los consumidores se representan mediante nodos en una red. (Véase Figura 1.) C_1 denota el **número** de consumidores que sólo pueden comprar a la Empresa 1, C_2 el número de consumidores que solamente pueden comprar a F_2 , y $C_{1,2}$ el número de consumidores que pueden comprar a ambas empresas. Los consumidores tienen que tener una conexión con una empresa para poder comprar su producto o servicio.

Por ahora asumimos que la estructura de la red está determinada exógenamente antes de realizar cualquier transacción y es de conocimiento común para todos los jugadores. En la Sección 3 analizamos cómo se forma la red.

Los consumidores C_1 y C_2 representan los *consumidores cautivos* y $C_{1,2}$ los *consumidores móviles*. Las empresas se etiquetan de tal manera que la **Empresa 1 tiene una**

cantidad mayor o igual de consumidores cautivos: $C_1 \geq C_2$.

Los consumidores compran a lo más un producto y obtienen un valor que es información privada. Los productos de distintas empresas son sustitutos perfectos. Los valores privados son realizaciones independientes a partir de una función de distribución común: $Q(p)$, que denota la probabilidad de que el consumidor tenga un valor mayor o igual a p . Es decir, Q se define sobre $[0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ y es decreciente. Se asume que Q es diferenciable. Para simplificar el modelo, se asume que $Q(p) - pQ'(p)$ satisface la condición de un solo cruce (*single-crossing condition*), definida de la siguiente manera.

$$Q(p) - pQ'(p) \text{ cruza cero una vez y desde arriba.}$$

Una condición suficiente para satisfacer la condición de un solo cruce es que Q tenga una elasticidad decreciente (es decir, es log-cóncava) y que el problema del monopolista tenga una solución bien definida (es decir, que $Q(p) - pQ'(p)$ cruce cero al menos una vez). Este supuesto simplifica las demostraciones y las estrategias de equilibrio, pero no es esencial. Para tener una idea de por qué es útil, nótese que en equilibrio las empresas enfrentan un dilema entre disminuir las ganancias que obtienen de los consumidores cautivos vs. aumentar la probabilidad de vender a los consumidores móviles. La condición de un solo cruce asegura que cualquier reducción en el precio disminuye la ganancia obtenida de los consumidores cautivos, por lo tanto, el dilema está presente sobre todo el rango de precios relevante.

Las empresas participan en la competencia de Bertrand, es decir, anuncian simultáneamente los precios que cobrarán a cualquier consumidor que compra su producto. Las empresas no pueden discriminar los precios. (La Sección 2.4 presenta el modelo sin esa restricción.) Los consumidores observan primero todos los precios y después, con la probabilidad $Q(p)$, deciden comprar a la empresa más barata, conectada con ellos. En caso de empate, los consumidores deciden aleatoriamente entre las empresas. Las empresas pueden anunciar cualquier precio no negativo. Para encontrar los equilibrios, se tiene que permitir a las empresas utilizar estrategias mixtas.

Definición 1. *Un esquema de fijación de precios en estrategias mixtas para la Empresa j es una función de distribución $\sigma_j(p) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$.*

Las empresas maximizan su ganancia esperada, denominada π_j . Un subíndice $-j$ denota la empresa que no es j . En la sección de oligopolio este subíndice denota todas las empresas que no son j . Se asume que las empresas tienen un costo marginal constante por vender sus productos, el cual se normaliza a cero.

Las empresas solucionan el siguiente problema.

$$\max_{\sigma_j} \pi_j(\sigma_j, \sigma_{-j}) = \max_{\sigma_j} E_{p_j} \left[p_j \left(C_j + C_{1,2} (1 - \sigma_{-j}(p_j)) \right) Q(p_j) \right]$$

Para resolver el juego, se buscan los equilibrios Nash. Dado que el comportamiento de los consumidores está capturado trivialmente por $Q(p)$, nos enfocaremos en analizar las estrategias de las empresas.

Definición 2. Un **Equilibrio Nash** para el juego de fijación de precios es un perfil de estrategias, (σ_1, σ_2) , tal que ningún jugador j puede desviarse a una estrategia alternativa σ'_j y recibir una ganancia mayor:

$$\pi_j(\sigma_j, \sigma_{-j}) \geq \pi_j(\sigma'_j, \sigma_{-j}); \forall \sigma'_j \neq \sigma_j, \forall j \in \{1, 2\}$$

Denotamos las estrategias de equilibrio con un asterisco en el superíndice, (σ_1^*, σ_2^*) , y denotamos por (π_1^*, π_2^*) a las ganancias esperadas correspondientes.

A continuación desarrollamos un ejemplo para destacar los resultados principales del documento. Los lectores interesados en continuar directamente con los resultados del modelo, pueden pasar a la Sección (2.2).

2.1. Un Ejemplo

Dos consumidores, A y B, quieren cruzar un río para ir a un pub irlandés. Para lograr eso, tienen que cruzar uno de dos puentes disponibles. Cada puente es administrado independientemente por una empresa que cobra un peaje a todos los consumidores que quieren cruzar. Los consumidores están dispuestos a pagar hasta 1 para cruzar el río. El único costo en el que incurren es el del peaje, así que su valor privado es:

$$Q(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq 1 \\ 0 & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Una red exógena de carreteras limita la selección de puentes para cada consumidor. Por ejemplo, en la Figura (4), el Consumidor A solamente puede cruzar el puente administrado por F_1 , mientras que el Consumidor B puede elegir entre los dos puentes. Las empresas anuncian simultáneamente su peaje. Después de observar estos precios, los consumidores deciden, en su caso, cuál puente van a cruzar.

Figura 2: **(La Red Monopolística)** Cada empresa tiene un monopolio local.

Figura 3: **(La Red Competitiva)** Una red con competencia perfecta.

Figura 4: **(La Red Mixta)** Una red que es un caso intermedio entre la red competitiva y la monopolística.

En la Red Monopolística, Figura (2), cada empresa sabe que tiene un monopolio local y fija sus precios de tal manera que pueda extraer todo el excedente de los consumidores:

$$p_1^* = p_2^* = 1$$

$$\pi_1^* = \pi_2^* = 1$$

La Red Competitiva, Figura (3), es un juego estándar de competencia de Bertrand donde las empresas bajan sus precios cuando otras empresas bajan sus precios hasta su ganancia desaparece.

$$p_1^* = p_2^* = 0$$

$$\pi_1^* = \pi_2^* = 0$$

En la Red Mixta, Figura (4), F_1 tiene un consumidor cautivo, C_A , del cual puede extraer todo el excedente cobrando $p_1 = 1$. Alternativamente, también puede intentar competir con F_2 por el consumidor móvil, C_B , a costa de reducir el precio cobrado a su consumidor cautivo. No existe equilibrio de Nash en estrategias puras para este juego: si cualquier empresa cobra un precio positivo, al menos una de estas empresas quisiera cobrar un precio ligeramente menor. Si ambas empresas cobraran cero, F_1 podría desviarse rentablemente y cobrar 1, extrayendo todo el excedente del consumidor cautivo. Una lógica similar a esta descarta la existencia de equilibrios con estrategias puras en el modelo completo de duopolio.

En esta red existe únicamente un equilibrio en estrategias mixtas, como se describe abajo.

F₁ : Fija $p = 1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. Con la probabilidad $\frac{1}{2}$ escoge $p < 1$ y fija su precio de acuerdo a:

$$\sigma_1^*(p|p < 1) = 2 - \frac{1}{p}; \forall p \in [\frac{1}{2}, 1)$$

F₂ : Fija el precio de acuerdo a:

$$\sigma_2^*(p) = 2 - \frac{1}{p}; \forall p \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Las ganancias en equilibrio son

$$\pi_1^* = 1; \pi_2^* = \frac{1}{2}$$

El ejemplo muestra que las empresas no siempre están mejor al tener acceso a más consumidores. En el caso de la Red Mixta, la Empresa 2 recibe una ganancia estrictamente mayor que en la Red Competitiva. Al agregar una conexión entre F_2 y C_A , la competencia aumenta y las ganancias disminuyen.

Las estrategias en equilibrio para el modelo de duopolio son cualitativamente similares a las del ejemplo. La Empresa 1 anuncia un precio igual al precio que maximiza sus ganancias monopolísticas con una probabilidad discreta y con probabilidad positiva ambas empresas aleatorizan sus precios en un intervalo continuo por debajo de este precio por debajo. El modelo se resuelve en la siguiente sección.

2.2. Solución para el Modelo de Duopolio

En esta sección se continúa el análisis para una red arbitraria con dos empresas y con cualquier número de consumidores. Para resolver el modelo, es útil derivar dos propiedades relevantes de la *condición de un solo cruce*. Primero, existe un precio único, p^M , que maximiza la ganancia obtenida de los consumidores cautivos. Segundo, disminuir el precio en el rango por debajo de p^M disminuye monotónicamente la ganancia obtenida de los consumidores cautivos.

Proposición 3. *Para cualquier empresa con $C_j > 0$ existe un único precio, p^M , que soluciona el problema de monopolista:*

$$\max_{p \in [0, \infty)} pQ(p)C_j$$

Este precio es independiente de C_j . Además, para cualquier par de precios p, p' tal que $p < p' \leq p^M$, p' genera una ganancia mayor que p .

Demostración. De la *condición de un solo cruce* se sabe que la derivada de la función objetivo cruza cero sólo una vez y desde arriba. Sea p^M el valor donde la función cruza cero. Esto es el único máximo y no depende de C_j , el cual es solamente un factor de escala. Además, para valores menores a p^M , la derivada es positiva, por lo que cualquier reducción en el precio disminuye la ganancia. Por lo tanto, la ganancia aumenta monotónicamente hasta llegar a su máximo. $\square$

Una implicación directa de la Proposición 3 es que cualquier precio mayor a p^M está estrictamente dominado: bajar el precio a p^M estrictamente aumentaría la ganancia

obtenida de los consumidores cautivos y débilmente incrementaría la probabilidad de convencer los consumidores móviles.

La Proposición 4 muestra que no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras, salvo en dos casos extremos. Uno es la competencia estándar de Bertrand que corresponde a $C_1 = C_2 = 0$; el otro caso es cuando cada empresa tiene un monopolio local, $C_{1,2} = 0$.

Proposición 4. *No existe un equilibrio en estrategias puras para el modelo con $C_1 > 0$ y $C_{1,2} > 0$.*

Demostración. Un equilibrio en estrategias puras con precio positivo se puede descartar mediante el argumento estándar de la competencia de Bertrand. Primero, asumamos que tenemos un perfil de estrategia (p_j, p_{-j}) tal que $p_{-j} < p_j \leq p^M$, entonces el jugador $-j$ querría cambiar su estrategia a fijar su precio arbitrariamente más cercano a p_j . A continuación, asumamos que $p_j = p_{-j} > 0$, entonces cualquier jugador podría cobrar un precio arbitrariamente menor y así obtener un aumento discreto en sus ganancias, ya que evita la probabilidad de un empate al cobrar esencialmente el mismo precio. Por último, asumamos que $(p_j, p_{-j}) = (0, 0)$, entonces, F_1 se podría desviar para extraer una ganancia positiva al fijar su precio en p^M y vender a sus consumidores cautivos. $\square$

Por lo tanto, se buscan *equilibrios de Nash en estrategias mixtas*. La Proposición 5 encuentra por el único equilibrio del juego.

Proposición 5. *Existe un equilibrio único para el juego. Sus ganancias asociadas son*

$$\pi_1^* = p^M Q(p^M) C_1 \quad \pi_2^* = \pi_1^* \frac{C_2 + C_{1,2}}{C_1 + C_{1,2}}$$

Para $p < p^M$, las empresas aleatorizan su estrategias de acuerdo con

$$\sigma_j(p) = 1 + \frac{C_{-j}}{C_{1,2}} - \frac{\pi_{-j}}{pQ(p)C_{1,2}}$$

La Empresa 1 cobra p^M con la probabilidad $\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_{1,2}}\right)$. La Empresa 2 cobra p^M con la probabilidad 0.

Demostración. Véase Apéndice (A). $\square$

2.3. Bienestar

Las función de ganancias en la Proposición 5 se pueden utilizar para realizar estadísticas comparativas sobre al bienestar al cambiar el número de consumidores. La ganancia de la Empresa 1 no depende del tamaño del mercado móvil, $C_{1,2}$, ni del tamaño del mercado cautivo de la Empresa 2, C_2 . F_1 obtiene una ganancia exactamente igual la misma ganancia como el excedente extraído de los consumidores cautivos bajo monopolio. F_1 vende a los consumidores móviles con probabilidad positiva, pero la condición de equilibrio para las estrategias mixtas implica que F_1 tiene que estar indiferente entre cotizar el precio del monopolio y un precio menor, por lo que cualquier incremento en sus ventas esperadas se tiene que compensar exactamente con la una reducción del precio.

La Empresa 2 tiene una ganancia estrictamente creciente en el número de consumidores cautivos y estrictamente creciente con el número de consumidores móviles, $C_{1,2}$. Sus ganancias también son estrictamente crecientes en el número de consumidores cautivos de la Empresa 1, dado que la Empresa 1 se vuelve menos agresiva al aumentar C_1 , lo que es favorable para la Empresa 2. Las ganancias de la Empresa 2 son menores que las de la Empresa 1, pero mayores que las rentas monopolísticas que podría obtener de sus consumidores cautivos.

$$\pi_1^* \geq \pi_2^* \geq C_2 p^M Q(p^M)$$

Con desigualdad estricta siempre y cuando $C_1 > C_2$ y $C_{1,2} > 0$, respectivamente.

Todos los consumidores se benefician si el número de consumidores móviles, $C_{1,2}$, aumenta, porque la distribución de los precios se desplaza hacia abajo. La distribución nueva es dominada estocásticamente en primer orden por la distribución anterior.

El bienestar total se maximiza al igualar la demanda y los costos marginales. Dado que se normalizó el costo marginal a cero, lo anterior es equivalente a producir hasta que se satisface la demanda total. Precios mayores generan un deterioro del bienestar. Por lo tanto, aumentar $C_{1,2}$ también aumenta el excedente total.

2.4. Discriminación de Precios

Las empresas prefieren no poder discriminar los precios entre consumidores móviles y cautivos. Si ambas empresas pudieran discriminar sus precios, la ganancia proveniente de los consumidores móviles se disiparía completamente. *Paraserprecisos*, F_1 está indiferente entre poder discriminar o no, pero F_2 estrictamente prefiere no poder discriminar.

Si existiera un costo arbitrariamente bajo para ejercer la discriminación, F_1 también preferiría que no fuera posible.

Cabe aclarar que cada empresa querría ser capaz de discriminar si la otra empresa no pudiera. Si la empresa fuera la única que pudiera discriminar, podría competir por los consumidores móviles sin sacrificar sus rentas provenientes de los consumidores cautivos. La empresa discriminante obtendría la misma ganancia de los consumidores móviles como la Empresa 2 en el modelo de duopolio, presentado anteriormente, con $C_2 = 0$. Esa ganancia más la renta monopolística recibida por los consumidores cautivos sería la ganancia total de la empresa. Siempre y cuando la otra empresa tenga algunos consumidores cautivos, la empresa discriminante podrá obtener ganancia positiva.

El cuadro siguiente resume lo anterior. (Todas las ganancias por $p^M Q(p^M)$.) El cuadro no es simétrico en el caso donde ambas empresas no pueden discriminar los precios, porque la Empresa 2 puede competir de manera más agresiva.

Ganancias de Equilibrio	F_2 puede discriminar	F_2 no puede discriminar
F_1 puede discriminar	C_1, C_2	$C_1 + C_2 \frac{C_{1,2}}{C_2 + C_{1,2}}, C_2$
F_1 no puede discriminar	$C_1, C_2 + C_1 \frac{C_{1,2}}{C_1 + C_{1,2}}$	$C_1, C_1 \frac{C_2 + C_{1,2}}{C_1 + C_{1,2}}$

El cuadro no necesariamente representa un juego que juegan las empresas. Si la discriminación en precios es posible o no, y a qué costo, depende de la aplicación respectiva. En el ejemplo de los puentes probablemente no sería eficiente, en términos de costos, identificar el origen geográfico de cada conductor si un gran número de ellos cruza en la hora pico.

3. ¿Cuáles redes tienen mayor probabilidad de formarse?

En el análisis precedente, la red se tomó como dada. Dado que la estructura de redes puede tener gran influencia en el bienestar, es importante saber cuáles redes tienen mayor probabilidad de formarse. Para investigar eso, se procede de dos maneras diferentes.

Primero ignoramos el protocolo exacto de cómo se forman conexiones y buscamos una solución a partir de la teoría de juegos cooperativos. Identificaremos a las redes que son “estables por pares” respecto a las ganancias inducidas por el juego de fijación de precios. Encontramos que las redes estables por pares son un caso intermedio entre dos casos extremos: redes con monopolios locales y redes con competencia perfecta.

Después de analizar las redes estables por pares procedemos a analizarán dos juegos de “entrada” donde se especifica precisamente cómo y cuándo las empresas pueden formar conexiones. Estos juegos contienen dos etapas, la etapa de entrada y la etapa de fijación de precios. La red se determina en la etapa de entrada y luego se mantiene fija durante la etapa de fijación de precios. La etapa de fijación de precios corresponderá exactamente al modelo de duopolio presentado previamente. Encontramos que los equilibrios de los juego de entrada son un subconjunto de las redes estables por pares.

Los juegos de entrada no son sólo un mecanismo para entender cuáles redes tienen una mayor probabilidad de formarse. Estos juegos son interesante en sí mismo y tienen una tradición larga en los modelos de teoría de juegos para organización industrial.⁵ Su objetivo es entender bajo cuáles circunstancias y bajo qué acciones, una empresa dominante puede **creíblemente** disuadir a sus competidores de entrar en su mercado.

Los juegos de entrada considerados en este documento difieren de los juegos de entrada tradicionales porque permitimos que la entrada sea parcial: se le permite a las empresas establecer conexiones con algunos consumidores sin dar acceso a todos los consumidores en el mercado dominante.

3.1. Redes estables por pares

Tomamos como dado el número total de consumidores,⁶ para una red inicialmente exógena se investiga si la empresa tiene un incentivo de agregar o quitar conexiones con los consumidores existentes. A través de agregar o quitar conexiones, las empresas modifican la red. Las ganancias para las empresas serían las ganancias esperadas del juego de fijación de precios que se llevaría a cabo bajo tal red. Al decir que las empresas tienen incentivos de agregar o cancelar conexiones, se está realizando un ejercicio de estática comparativa entre las ganancias obtenidas en redes distintas en el presente modelo de determinación de precios. Se asume que formar conexiones no genera costos. Las empresas y consumidores sin conexiones reciben cero ganancias. A continuación caracterizamos todas las redes que son estables por pares.

⁵Tirole (1988) es la referencia requerida.

⁶Ésta es una de las pocas partes del presente documento donde importa el hecho de que el número de consumidores sea un número entero importa. En el resto del documento, la multiplicación del número de todos los consumidores con una constante no cambia los incentivos estratégicos. Por lo tanto, permitir que el número de consumidores sea una variable continua se puede entender como aproximación a un número grande de consumidores bajo un reescalamiento adecuado.

Definición 6 (Redes estables por pares). *Una red es estable por pares si:*

1. *No existe un par empresa-consumidor desconectado que podría formar una conexión y aumentar las ganancias de ambos miembros.*
2. *Ninguna empresa o consumidor puede eliminar una de sus conexiones y aumentar su ganancia individual.*

La Red Competitiva del ejemplo de carreteras analizada en la Sección 2.1 no es estable por pares. Cualquier empresa podría aumentar sus ganancias al cancelar una conexión. Sin embargo, tanto la Red Monopolística y la Red Mixta son estables por pares, incluso a pesar que la Empresa 2 gana estrictamente menos en la Red Mixta. Esto sucede porque la Empresa 1 no tiene un incentivo estricto de agregar o remover una conexión que le conecta con el Consumidor B.

Solamente los incentivos de las empresas determinan si una red es estable por pares porque la ganancia esperada de todos los consumidores aumenta al agregar una conexión entre cualquier empresa y cualquier consumidor .

Las empresas jamás querrían cancelar una conexión con sus consumidores cautivos y siempre querrían agregar una conexión con los consumidores que no tienen una conexión con otra empresa.

La Empresa 1 siempre está indiferente entre agregar, o no, conexiones con los consumidores conectados con la Empresa 2. Eso aumentaría solamente $C_{1,2}$ y disminuiría C_2 por uno, pero no afectaría sus ganancias en equilibrio.

La Empresa 2 tendría un incentivo para agregar una conexión con un consumidor de tipo C_1 , si y sólo si:

$$C_2 + C_{1,2} + 1 < C_1$$

Es decir, sólo si los consumidores potenciales de F_2 no son mayores que el mercado cautivo de la Empresa 1 después de agregar las conexiones.

Ignorando la restricción que el número de conexiones tiene que ser un número enteros, la Empresa 2 querría aumentar sus conexiones en niveles bajos de $C_{1,2}$ (es decir, para estos con $C_2 < C_1$) pero querría disminuir las conexiones en niveles altos ($C_2 > C_1$). En este sentido, las redes estables por pares son un caso intermedio entre las redes con monopolios locales y las de competencia perfecta.

3.2. Juego de Entrada 1

Supongamos que la Empresa 1 es la empresa dominante en el mercado, y tiene conexiones con todos los consumidores potenciales. La Empresa 2 entra al mercado al formar conexiones con los consumidores, y puede decidir formar cualquier número de conexiones. Después que la Empresa 2 toma su decisión, la red queda fija y comienza el juego de fijación de precios.

¿Cuántas conexiones quiere formar la Empresa 2? ¿Cuál red se formará finalmente? La Empresa 2 resuelve:

$$\max_{0 \leq E \leq C_1} (C_1 - E)p^M Q(p^M) \frac{E}{(C_1 - E) + E}$$

Donde E es el nivel de la entrada medido por el número de conexiones formadas para entrar.

Utilizando los resultados de la Sección 3.1, sabemos que la Empresa 2 continuará agregando conexiones mientras la siguiente condición se cumpla:

$$E + 1 < C_1 - E \Rightarrow E^* = \frac{C_1 - 1}{2}$$

Por lo tanto, la Empresa 2 dejaría de formar conexiones mucho antes de despojar a la Empresa 1 de todos sus consumidores cautivos. Esto evita que la Empresa 1 tenga un comportamiento demasiado agresivo en la etapa de fijación de precios. A grandes razgos, la Empresa 2 solamente se conectaría a la mitad del mercado potencial.

Un efecto similar ha sido mostrado previamente en la literatura de juegos de entrada. Fudenberg y Tirole (1984) denominaron a este efecto el "*fat cat effect*". El "*fat cat effect*" refiere a una situación de sobre-inversión estratégica en capital por parte de la empresa dominante con el fin de comprometerse a responder de manera menos agresiva ante la entrada en de otra empresa a su mercado, a sabiendas que no puede impedir dicha entrada. El efecto también está presente en el modelo de competencia oligopolística en mercados múltiples de Bulow et al. (1985).

En el presente documento se utiliza un enfoque distinto respecto a la etapa de entrada en comparación con los modelos previos donde la empresa dominante escoge ser un "*fat-cat*" al sobre-invertir en capital. En nuestro modelo, es la empresa entrante quien decide mantener a la empresa dominante como un "*fat cat*" a través de entrar sólo parcialmente al mercado rival.

¿Podría ser que la Empresa 1 quisiera eliminar conexiones con sus consumidores iniciales con el fin de acomodar mejor la entrada de la Empresa 2? ¿O podría incluso

impedir la entrada al sostener la posición “*lean and hungry*”, descrita por Fudenberg y Tirole (1984)? La respuesta es no. Supongamos que la Empresa 1 preventivamente rompió conexiones C_2 , la Empresa 2 formaría conexiones con todos los consumidores no conectados y después, continuaría formando conexiones mientras se cumpla la siguiente condición.

$$C_2 + E + 1 < C_1 - C_2 - E \Rightarrow E^* = \frac{C_1 - 1}{2} - C_2$$

La Empresa 1 terminaría con el mismo número de consumidores cautivos independientemente del número de conexiones que canceló inicialmente.⁷ Dado que la ganancia de la Empresa 1 sólo depende de este número, jamás querría romper sus conexiones iniciales para acomodar la Empresa 2.

3.3. Juego de Entrada 2

En esta sección asumimos que la Empresa 1 y la Empresa 2 tienen inicialmente dos monopolios separados. Es decir, en la etapa inicial existen solamente consumidores cautivos. Mantenemos la convención de que la Empresa 1 empieza como empresa dominante: $C_1 > C_2$. El juego empieza con una etapa de entrada donde las empresas pueden simultáneamente formar conexiones con los consumidores cautivos en el mercado de la otra empresa. Una vez que todas las conexiones estén formadas, la red se queda fija y comienza el juego de fijación de precios.

Este juego podría ser una describir el caso de dos monopolios regionales, geográficamente separados, que inicialmente estaban impedidos de competir entre ellos debido a la restricción de no vender más allá de sus fronteras. La etapa de entrada ocurriría entonces después de que un tratado de libre comercio elimine las restricciones de comercio, aunque las empresas todavía tendrían que decidir en cuáles localizaciones de la otra región quieren abrir un punto de venta. El juego también podría representar el caso de dos productos similares, los cuales no pudieron venderse a los mismos consumidores debido a regulaciones o restricciones tecnológicas en la etapa de pre-entrada. Lo anterior pasó en los mercados de servicios de telefonía y cable donde los avances tecnológicos permitieron a proveedores de cable el suministro de servicios de telefonía y vice versa, aunque las empresas todavía tuvieron la capacidad de decidir en cuáles regiones operarían.

En la etapa de entrada, las empresas anuncian simultáneamente el número de conexiones que formarán con los consumidores cautivos de la otra empresa. Es decir, anuncian

⁷A menos que la Empresa 1 rompiera las conexiones con más que la mitad de sus consumidores cautivos, en tal caso tendría una ganancia menor.

su nivel de entrada. A continuación analizamos cuántas conexiones formaría cada empresa en un equilibrio de Nash.

Proposición 7. *El conjunto de equilibrios Nash del Juego de Entrada 2 es:*

$$E_1^* \in \text{Entero}([0, C_2]); \quad E_2^* = \text{Entero}\left(\left(\frac{C_1 - C_2}{2} - 1, \frac{C_1 - C_2}{2}\right]\right)$$

Donde la función *Entero* selecciona el conjunto de números enteros dentro de cada intervalo.

Demostración. Las ganancias de un perfil de estrategias (E_1, E_2) son $\pi_1(E_1, E_2)$ como se describe por debajo.

$$\pi_1(E_1, E_2) = \begin{cases} (C_1 - E_2)p^M Q(p^M); & \text{if } C_2 - E_1 \leq C_1 - E_2 \\ (C_2 - E_1)\frac{C_1 + E_1}{C_2 + E_2}p^M Q(p^M); & \text{if } C_2 - E_1 > C_1 - E_2 \end{cases}$$

$$\pi_2(E_1, E_2) = \begin{cases} (C_1 - E_2)\frac{C_2 + E_2}{C_1 + E_1}p^M Q(p^M); & \text{if } C_2 - E_1 \leq C_1 - E_2 \\ (C_2 - E_1)p^M Q(p^M) & \text{if } C_2 - E_1 > C_1 - E_2 \end{cases}$$

Primero, descartamos cualquier perfil de estrategias que harían que la Empresa 2 fuese la empresa dominante después de la entrada. Para ello supongamos que existe un equilibrio tal que:

$$C_2 - E_1 > C_1 - E_2$$

Esto puede ser un equilibrio solamente si la Empresa 1 fija $E_1 = 0$. Para esta estrategia, la mejor respuesta de la Empresa 2 es $\text{Entero}[\frac{C_1 - C_2}{2}]$, que no es suficiente para que la Empresa 2 fuese la empresa dominante después de la etapa de entrada. Eso es una contradicción. Concluimos que no existe un equilibrio donde pasa lo anterior.

Dado que la Empresa 1 tiene que seguir siendo la empresa dominante, la única mejor-respuesta de la Empresa 2 es

$$E_2^* = \text{Entero}\left(\left(\frac{C_1 - C_2}{2} - 1, \frac{C_1 - C_2}{2}\right]\right)$$

Para este perfil, el conjunto de mejores-respuestas de la Empresa 1 es

$$E_1^* \in \text{Entero}([0, C_2])$$

□

La Empresa 2 entra parcialmente en cualquier equilibrio. El nivel de entrada es

siempre lo suficientemente bajo para que la Empresa 1 mantenga su posición de empresa dominante. La Empresa 1 tiene múltiples mejores respuestas pero no tiene un incentivo estricto para entrar al mercado cautivo de la Empresa 2, ya que no cambia su ganancia ni los incentivos estratégicos de la Empresa 2. Si agregamos un costo arbitrariamente pequeño para formar conexiones se reduciría el conjunto de equilibrios a un perfil único de estrategias donde solamente la Empresa 2 entra, como se describió antes.

El excedente del consumidor y el bienestar total incrementa estrictamente con la entrada parcial. Según la definición, en un equilibrio de entrada las empresas no tienen más incentivos para cambiar sus conexiones. Dado que solamente los incentivos de empresas son relevantes para determinar cuáles redes son estables por pares, un equilibrio del juego de entrada necesariamente tiene que ser estable-en-pares.

3.4. Regulación de la Red

Si la crear conexiones es costoso, como es el caso para las redes de infraestructura, no es eficiente crear conexiones que cambien el conjunto factible de asignaciones. Si un regulador tuviera información perfecta sobre $Q(p)$ y sobre los costos, debería entonces ordenar que la red estuviera compuesta de monopolios desconectados y después fijar el precio igual al costo marginal.

Por otro lado, si es más fácil para el regulador controlar la conectividad de la red en lugar del precio, debería exigir una conectividad mayor entre las empresas de lo que éstas decidirían realizar por su cuenta. Aunque las empresas con un bajo número de consumidores cautivos sí tienen un incentivo para construir la infraestructura para competir parcialmente con otras empresas, en equilibrio no se generan suficientes conexiones. Por lo tanto, el regulador debería obligar a las empresas a que estén más interconectadas.

4. Extensión para la competencia oligopolística

Para el trabajo aplicado sería útil extender el modelo para permitir un número arbitrario de empresas. Desafortunadamente, el modelo rápidamente se vuelve demasiado complicado porque el número potencial de tipos de consumidores es igual al número de subconjuntos del total de empresas, el cual crece exponencialmente.

En este documento se resuelve un caso especial de competencia oligopolística donde hay dos tipos de consumidores: los consumidores cautivos que sólo pueden comprar a una empresa y los consumidores perfectamente móviles que pueden comprar a todas las empresas. Se encuentra que los equilibrios son muy similares al equilibrio de fijación de

precios en un duopolio.

Existen varias aplicaciones que coinciden con este entorno. Por ejemplo, una situación donde algunas personas ya usan una tecnología específica, mientras que otras personas todavía están esperando que determina el precio antes de tomar su decisión respecto a la tecnología que van a adoptar. En esta situación el modelo podría fácilmente extenderse para incluir un costo fijo bajo de adoptar la tecnología. Otro ambiente pertinente es uno donde los consumidores compran en línea y pueden ver toda la información de precios, mientras que otros solamente acuden a las tiendas locales y no pueden responder a precios de otras empresas. Una tercera aplicación considera la red como modelo de lealtad a la marca. Las empresas enfrentan un dilema entre vender a consumidores completamente leales o competir por los consumidores que intensivamente buscan precios bajos. El modelo presentado en este documento es muy similar al modelo de ventas de Varian, salvo que las empresas pueden tener cantidades diferentes de consumidores cautivos. Esto obligará a los equilibrios a ser asimétricos, mientras que Varian se enfoca resultados simétricos.

En nuestro modelo con competencia oligopolística encontramos que la competencia se lleva a cabo solamente entre las dos empresas más agresivas, es decir, aquellas que tienen menores costos de oportunidad cuando bajan sus precios. Todas las demás empresas desisten de tratar de competir por el mercado móvil y mantienen al margen del mercado para extraer sus rentas monopolísticas.

4.1. Un número arbitrario de empresas compitiendo en un mercado único

El modelo que consideramos tiene un número finito J de empresas, cada una con algunos consumidores cautivos. Etiquetamos a las empresas de manera tal que:

$$C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_J > 0$$

En adición a sus consumidores cautivos, todas las empresas pueden competir para vender en un mercado global grande que tiene un número C_G de consumidores. Los valores de consumidores y el juego de fijación de precios e mantienen igual como antes.

Al resolver el modelo, encontramos que siempre existe un equilibrio donde las Empresas J y $J - 1$ fijan precios como se describió en el modelo de duopolio, mientras que todas las demás empresas fijan su precio en p^M . Llamaremos a este comportamiento *mantenerse al margen* (staying out) porque en equilibrio la probabilidad que éstas empresas vendan en el mercado global es cero. La Proposición 8 demuestra que esto efectivamente

es un equilibrio.

La intuición detrás de la demostración es que las empresas enfrentan un dilema entre extraer todo el excedente de sus consumidores cautivos o bajar su precio para intentar capturar el mercado global. Existen dos efectos que hacen que las empresas con más consumidores cautivos decidan mantenerse al margen: enfrentan un mayor costo de oportunidad de bajar su precio, y que para desviarse del equilibrio prescrito tienen que anunciar un menor precio que todas las demás empresas que están compitiendo por el mercado global. Estas dos fuerzas van en la dirección correcta para sostener el equilibrio.

Resulta que estas estrategias además son el único equilibrio cuando se asume que solamente dos empresas tienen el menor número de consumidores. Es decir, cuando $C_{J-2} > C_{J-1}$. Eso se demuestra en la Proposición 9. Que el equilibrio sea único se deriva de que existe un intervalo de precios donde las empresas J y $J-1$ *necesariamente* tienen que utilizar las mismas estrategias mixtas que en el modelo de duopolio. Debido a eso, las empresas mayores siempre estrictamente prefieren anunciar el precio de monopolio en lugar de un precio menor.

Proposición 8. *Las siguientes estrategias siempre constituyen un equilibrio del modelo de oligopolio: Las Empresas $J-1$ y J actúan como en el modelo de duopolio, todas las demás empresas escogen solamente $p_j = p^M$ con la probabilidad uno.*

Demostración. Véase Apéndice (B). □

Proposición 9. *Si $C_{J-2} > C_{J-1} > C_J$, las estrategias en la Proposición 8 constituyen el único equilibrio en el juego.*

Demostración. Véase Apéndice (C). □

Asumir que $C_{J-2} > C_{J-1}$ es absolutamente necesario para la que el equilibrio sea único. Si no se cumple, siempre se pueden construir equilibrios simétricos donde todas las empresas que tienen los dos valores más bajos para C_j compiten por el mercado global con probabilidad positiva. Sin embargo, todos estos equilibrios generan los mismos pagos. Asumir que $C_{J-1} > C_J$ simplifica la demostración.

5. Las medidas estándar de centralidad en redes son inadecuadas

Las medidas estándar de centralidad en redes clasifican a las posiciones con mayores conexiones como mejores, pero eso es inadecuado en el presente modelo. El problema es que las medidas estándar de centralidad solamente utilizan información sobre la topología de la red, pero no proporcionan un modelo explícito sobre cómo agentes aprovecharían sus posiciones para su beneficio.

Por ejemplo, la medida de intermediación (*in-betweenness*) cuenta todos los caminos más cortos que cruzan un nodo dado para medir la centralidad de cada posición.⁸ El supuesto implícito es que los caminos más cortos son los más baratos y que los nodos en el camino pueden extraer ganancias de los agentes que quieren cruzar su posición.

Como se muestra en el presente modelo, eso es claramente inadecuado, porque en equilibrio los agentes tratan de extraer el excedente máximo de su posición, lo que endógenamente determina cuáles caminos son los más baratos. Consideraciones de arbitraje llevan a los costos de los caminos más cortos hacia algo que debería ser similar a los costos de las alternativas. Por lo tanto, se requiere un modelo explícito de competencia para determinar la capacidad de los agentes de extraer el excedente de su posición.

En el presente modelo, el número de conexiones es una medida engañosa de ganancias. Por ejemplo, al comparar la Empresa 2 en las Figuras 3 y 4, la Empresa 2 tiene una mayor medida de intermediación (*in-betweenness*) en la red competitiva, porque tiene acceso a más consumidores, pero el aumento en su conectividad está más que compensado por el aumento en la competencia que lleva a las ganancias hacia cero.

La intuición atrás de la medida de intermediación (*in-betweenness*) no es completamente falsa, dado que a veces es beneficioso estar en más que un camino. El problema es que la competencia de Bertrand es muy agresiva, por lo tanto, en el presente modelo existe un dilema muy real entre la conectividad y las ganancias. Por lo tanto, se requieren más modelos con fundamentos económicos para evaluar cuándo las medidas de centralidad solamente basadas en la topología de la red son adecuadas.

⁸Véase Jackson (2008) para una definición de esta y otras medidas de centralidad.

Referencias

- [1] BLUME, L., D. EASLEY, J. KLEINBERG, Y. TARDOS (2007): “Trading Networks with Price-Setting Agents,” *Proc. 8th ACM Conference on Electronic Commerce*.
- [2] BULOW, J. I., J. D. GEANAKOPOLOS, Y. P. D. KLEMPERER (1985): “Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements,” *The Journal of Political Economy*, 93, 488-511.
- [3] BYFORD, M. C. (2007): “The Constrained Coalitional Price Setting Game: Theory and Applications”, Ph.D. thesis, University of Melbourne.
- [4] COROMINAS-BOSCH, M. (2004): “Bargaining in a network of buyers and sellers,” *Journal of Economic Theory*, 115, 35-77.
- [5] ELLIOT, M. (2010): “Inefficiencies in networked markets.” *Working Paper*.
- [6] FUDENBERG, D. Y. J. TIROLE (1984): “The Fat-Cat Effect, the Puppy-Dog Ploy, and the Lean and Hungry Look,” *The American Economic Review*, 74, 361-366.
- [7] JACKSON, M. O. (2008): *Social and Economic Networks*, Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- [8] KRANTON, R. E. Y. D. F. Minehart (2001): “A Theory of Buyer-Seller Networks,” *The American Economic Review*, 91, 485-508.
- [9] NAVA, F. (2010): “Quantity Competition in Networked Markets,” *Working Paper*.
- [10] TIROLE, J. (1988): *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press.
- [11] VARIAN, H. R. (1981): “A Model of Sales,” *The American Economic Review*, 71, 517.

A. Demostración para encontrar el único equilibrio del modelo duopolio. Proposición 5.

Demostración. La condición de indiferencia en estrategias mixtas declara que en equilibrio se tiene que tener

$$pQ(p)\left(C_j + C_{1,2}(1 - \sigma_{-j}^*(p))\right) = \pi_j^*, \forall p \in \text{soporte}(\sigma_j^*) \quad (1)$$

$$pQ(p)\left(C_j + C_{1,2}(1 - \sigma_{-j}^*(p))\right) \leq \pi_j^*, \forall p \notin \text{soporte}(\sigma_j^*) \quad (2)$$

La estrategia general de la demostración es primero encontrar el soporte de equilibrio, después encontrar las ganancias en equilibrio y finalmente utilizar la *condición de indiferencia en estrategias mixtas* para identificar las estrategias.

Sea $p^{\min}$ el precio mínimo que la Empresa 1 cobraría si está garantizado que puede vender a todos los consumidores. Este precio soluciona la siguiente ecuación.

$$p^{\min}Q(p^{\min})(C_1 + C_{1,2}) = p^M Q(p^M)C_1$$

La condición de un solo cruce asegura que $p^{\min}$ es único. Las siguientes propiedades son útiles para el resto de la demostración.

- **No hay estrategias mixtas por arriba de p^M :** *Las empresas no pueden cobrar un precio mayor a p^M con una probabilidad positiva.* Lo anterior es cierto porque por arriba de este precio, la ganancia marginal obtenida de los consumidores cautivos es negativa y las empresas débilmente pueden aumentar la probabilidad de vender a los consumidores móviles al reducir su precio.
- **La propiedad del soporte común:** *El soporte de las estrategias de cada empresa tiene que ser el mismo.* Supongamos por el contrario que (p', p'') está en el soporte de la Empresa j pero no en el de la Empresa $-j$, entonces la Empresa j no está maximizando porque σ_{-j} es constante para este intervalo pero $pQ(p)$ es estrictamente creciente (dada la *condición de un solo cruce*). Por lo tanto, la Empresa j podría rentablemente transferir algo de probabilidad a p'' .
- **La propiedad de no brechas debajo de la cota superior:** *En equilibrio no puede existir un intervalo $(p', p'']$ con $p'' \leq p^M$ tal que p' soporta las estrategias en equilibrio pero $(p', p'']$ no.* Suponiendo que exista tal intervalo, entonces $\sigma_j(p') = \sigma_j(p'')$ así que $\pi_{-j}(p', \sigma_j^*) < \pi_{-j}(p'', \sigma_j^*)$ dada la *condición de un solo cruce*. Esto contradice el hecho de que p' soporte las estrategias en equilibrio.

- **La propiedad de no empates:** *No pueden ocurrir empates con probabilidad positiva.* Empates en un precio p solamente ocurren si ambas empresas tienen un átomo en p . Eso no puede pasar en equilibrio porque cada una de las empresas podría desviar de su estrategia y cobrar arbitrariamente por debajo de p , así obteniendo un incremento discreto en la probabilidad de ganar los consumidores móviles.

A continuación se presenta el resto de la demostración.

Paso 1: La Empresa 2 recibe ganancias por arriba de las rentas monopolísticas de sus consumidores cautivos.

Dado que la Empresa 1 jamás cobraría por debajo de p^{min} con probabilidad positiva, la Empresa 2 puede cobrar un precio arbitrariamente cercano (desde abajo) a p^{min} y vender a todos los consumidores móviles. De aquí se concluye que en equilibrio la Empresa 2 tiene una ganancia estrictamente mayor que la ganancia de vender solamente a sus consumidores cautivos.

$$\begin{aligned}
\pi_2^* &\geq \lim_{p \uparrow p^{min}} \pi_2(p, \sigma_1^*) = (C_2 + C_{1,2}) \frac{p^M Q(p^M) C_1}{C_1 + C_{1,2}} \\
&= \left(\frac{C_1}{C_1 + C_{1,2}} \right) \left(\frac{C_2}{C_2 + C_{1,2}} \right)^{-1} p^M Q(p^M) C_2 \\
&> p^M Q(p^M) C_2
\end{aligned}$$

Paso 2: En equilibrio, la Empresa 1 tiene un átomo en p^M .

Según la *propiedad de no empates* y la *propiedad de no estrategias mixtas por debajo de p^M* , se sabe que $\lim_{p \uparrow p^M} \sigma_j(p) = 1$ se cumple para al menos una empresa. Por lo tanto, de acuerdo con la *propiedad de no brechas* y la *propiedad de soporte común*, se sabe que ambas empresas mezclan sus estrategias activamente en un intervalo por debajo de p^M . En particular, para la Empresa 2 se obtiene

$$\pi_2^* = \lim_{p \uparrow p^M} \pi_2(p, \sigma_1^*) = p^M Q(p^M) \left(C_2 + C_{1,2} \lim_{p \uparrow p^M} (1 - \sigma_1^*(p)) \right)$$

Ya que $\pi_2^* > p^M Q(p^M) C_2$, tiene que ser que $\lim_{p \uparrow p^M} \sigma_1(p) < 1$. Se concluye que F_1 tiene que tener un átomo en p^M .

Paso 3: El soporte de las estrategias en equilibrio es $[p^{min}, p^M]$.

Se sabe que p^M es el límite superior del soporte por la propiedad *no brechas por debajo de la cota superior* y la propiedad de *no estrategias mixtas por debajo de p^M* . También es conocido que la Empresa 1 jamás fijaría un precio por debajo de p^{min} . Debido a que

Empresa 1 tiene un átomo en p^M y no existen empates, su ganancia en equilibrio es $C_1 Q(p^M) p^M$. Si las estrategias de equilibrio no se mezclan en un intervalo por arriba de p^{min} , la Empresa 1 podría cobrar un precio arbitrariamente cercano (desde arriba) a p^{min} y obtener una ganancia mayor. Se concluye que p^{min} es la cota inferior del soporte para estrategias en equilibrio.

Paso 4: Encontrar el equilibrio.

Ya que $[p^{min}, p^M]$ es el soporte de las estrategias en equilibrio, se sabe que la *condición de indiferencia en estrategias mixtas* tiene que mantenerse en este rango, por lo tanto, sólo tenemos que encontrar las ganancias de equilibrio para obtener las estrategias de equilibrio. Dado que F_1 tiene un átomo en p^M pero F_2 no lo tiene, se sabe que $\pi_1^* = C_1 p^M Q(p^M)$. Como se explicó antes, se sabe $\pi_2^* \geq p^{min} Q(p^{min})(C_2 + C_{1,2})$. Al agregar la *condición de indiferencia en estrategias mixtas*, se obtiene lo siguiente.

$$p^{min} Q(p^{min}) (C_2 + C_{1,2} (1 - \sigma_1^*(p^{min}))) = \pi_2^* \geq p^{min} Q(p^{min}) (C_2 + C_{1,2})$$

Lo cual implica que $\sigma_1^*(p^{min}) = 0$ y $\pi_2^* = p^{min} Q(p^{min}) (C_2 + C_{1,2})$. Al sustituir lo anterior en la *condición de indiferencia en estrategias mixtas*, se obtiene (σ_1^*, σ_2^*) .

$$\sigma_1^*(p) = \begin{cases} 1 + \frac{C_2}{C_{1,2}} - \left(\frac{p^M Q(p^M) C_1}{p Q(p) C_{1,2}} \right) \left(\frac{C_2 + C_{1,2}}{C_1 + C_{1,2}} \right) & \text{if } p < p^M \\ 1 & \text{if } p = p^M \end{cases}$$

$$\sigma_2^*(p) = 1 + \frac{C_1}{C_{1,2}} - \frac{p^M Q(p^M) C_1}{p Q(p) C_{1,2}}$$

□

B. Demostración que el equilibrio del modelo duopolio también es un equilibrio del modelo oligopolio.

Proposición 8.

Demostración. Tomemos cualquier $p \in [0, p^M]$. Para cada empresa se mostrará que la ganancia esperada de cotizar p es menor o igual que la ganancia en equilibrio. Según el modelo de duopolio, Sección 2.2, se sabe que $\pi_j(p) \leq \pi_j^*$ para empresas J y $J-1$ y para cualquier precio p . Se mostrará lo mismo para cualquier otra empresa j .

$$\begin{aligned}
\pi_J(p; \sigma_{-J}) &\leq \pi_J^* \\
pQ(p^M) [C_J + C_G(1 - \sigma_{J-1}(p))] &\leq p^M Q(p^M) C_J \\
pC_G(1 - \sigma_{J-1}(p)) &\leq (p^M - p)C_J \\
\Rightarrow pC_G(1 - \sigma_{J-1}(p)) &\leq (p^M - p)C_j \\
\Rightarrow pC_G(1 - \sigma_{J-1}(p))(1 - \sigma_J(p)) &\leq (p^M - p)C_j \\
pQ(p^M) [C_j + C_G(1 - \sigma_{J-1}(p))(1 - \sigma_J(p))] &\leq p^M Q(p^M) C_j \\
\pi_j(p; \sigma_{-j}) &\leq \pi_j^*
\end{aligned}$$

Si $C_j > C_{J-1}$, la última desigualdad es estricta.

□

C. Demostración que el equilibrio del modelo duopolio es el único equilibrio del modelo oligopolio.

Proposición 9.

Demostración. Para comprobar la unicidad del equilibrio se tienen que utilizar algunas de las propiedades de las estrategias en equilibrio encontradas para el modelo de duopolio. A continuación, se describen las propiedades con ajustes para que apliquen al modelo de oligopolio. Las demostraciones son las mismas que antes.

- **Soporte común:** Para cualquier rango de precio donde una empresa está mezclando sus estrategias, al menos otra empresa también tiene que mezclar sus estrategias.
- **No brechas por debajo de la cota superior:** Para cualquier $p' < p'' \leq p^M$ con p' en soporte de al menos una estrategia de una empresa, tiene que ser que al menos dos empresas mezclan activamente en $(p', p'']$.

- **No empates con probabilidad positiva:** Las empresas no pueden tener átomos por debajo de p^M y al menos una empresa tiene que tener $\lim_{p \uparrow p^M} \sigma_j(p) = 1$. Eso asegura que si varias empresas tienen un átomo en p^M , no empatarían por los consumidores móviles con probabilidad positiva.

Para continuar con la demostración, primero se muestra que para un intervalo suficientemente largo, solamente las Empresas J y $J - 1$ pueden mezclar activamente y lo hacen de acuerdo con las estrategias de duopolio. p_j^{min} se define como el precio único que hace la Empresa j sea indiferente entre capturar el mercado móvil y extraer la renta monopolística de sus consumidores cautivos. Resulta

$$p_J^{min} < p_{J-1}^{min} < p_{J-2}^{min} \leq \dots \leq p_1^{min}$$

Dado que no puede haber empates en la cota superior, existe al menos una empresa que no tiene un átomo en p^M . Todas las demás empresas deben tener una utilidad esperada igual a $p^M Q(p^M) C_j$, por la propiedad *no brechas por debajo de la cota superior*. Dado que solamente la Empresa J estaría dispuesta de fijar su precio en $[p_J^{min}, p_{J-1}^{min})$ siempre puede asegurarse una ganancia mayor que la renta monopolística. Por lo tanto, no puede tener un átomo en el precio de monopolio. Las Empresas J y $J - 1$ son las únicas que pueden mezclar en $[p_{J-1}^{min}, p_{J-2}^{min})$ y eso tienen que hacer de acuerdo con las estrategias en duopolio.

Después, se muestra que todas las demás empresas estrictamente prefieren no participar en el juego. $p < p^M$ sea un precio tal que por debajo de p solamente las Empresas J y $J - 1$ mezclan activamente. Ya se mencionó que tienen que mezclar con las estrategias de duopolio. Las Empresas J y $J - 1$ son indiferentes entre cobrar p y p^M . Dado que $C_{J-2} > C_{J-1}$, a partir de la demostración en la Proposición 8, se verifica que todas las demás empresas prefieren **estrictamente** cobrar p^M . Por lo tanto, las demás empresas no pueden ser indiferentes entre p^M y cualquier precio menor. Se concluye que todas esas empresas quedarán afuera del juego con probabilidad uno y las estrategias en la Proposición 8 son el único equilibrio. $\square$