Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2011-02

**El Número de Equilibrios de Economías Infinitas
Suaves**

Enrique Covarrubias
Banco de México

Mayo 2011

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

El Número de Equilibrios de Economías Infinitas Suaves*

Enrique Covarrubias[†]
Banco de México

Resumen

Construimos un teorema de índice para economías infinitas suaves que demuestra que genéricamente el número de equilibrios es impar. Como corolario, este resultado nos da una nueva demostración de existencia y proporciona condiciones que garantizan unicidad global de equilibrios.

Palabras Clave: Unicidad; determinación; equilibrios; economía infinita; mapeos de Fredholm; variedad de equilibrio; teorema de índice; campo vectorial Z-Rothe.

Abstract

We construct an index theorem for smooth infinite economies that shows that generically the number of equilibria is odd. As a corollary, this gives a new proof of existence and gives conditions that guarantee global uniqueness of equilibria.

Keywords: Uniqueness; determinacy; equilibria; infinite economy; Fredholm map; equilibrium manifold; index theorem; Z-Rothe vector field.

JEL Classification: D50, D51, D80, D90.

*El autor agradece a Yves Balasko, Leo Butler, Andrés Carvajal, Santiago García-Verdú, Carlos Hervés-Beloso, Karen Kaiser, V. Filipe Martins-da-Rocha, Herakles Polemarchakis, Michael Singer, Mich Tvede y a los participantes de la Conferencia SAET sobre las Tendencias Actuales en la Economía (Ischia, Italia) y los seminarios en el Banco de México, la Universidad de Copenhague, la Universidad de Vigo y la Universidad de Warwick.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: ecovarrubias@banxico.org.mx.

1. Introducción

Los modelos de mercados competitivos pueden tener un espacio de consumo de dimensiones infinitas, que usualmente surgen a partir de modelos parametrizados por tiempo e incertidumbre. En este contexto, varios autores han abordado el problema de estudiar si los precios de equilibrio son localmente únicos, incluyendo a Kehoe et al. (1989a), Kehoe et al. (1989a, 1990), Balasko (1997a,c), Chichilnisky y Zhou (1998), Shannon (1999), y Shannon y Zame (2002). A través de estos resultados, ha quedado claro que para estudiar determinación siempre existe una disyuntiva entre la generalidad del espacio de consumo, la generalidad de las funciones de utilidad, y la existencia y la diferenciabilidad de las funciones de demanda individual. No obstante, Shannon y Zame (2002) han estudiado determinación con suficiente generalidad como para considerar esta cuestión casi cerrada, por lo menos para modelos de mercados donde se permite el enfoque de Negishi, es decir, donde el primer teorema de bienestar se cumple.

A pesar de los resultados generales de determinación, un área que sigue siendo en buena medida inexplorada es aquélla de contar el número de equilibrios. Cuando el espacio de consumo es de dimensión finita, Dierker (1972) dio la primera solución a este problema al construir un teorema de índice que mostró, entre otras cosas, que el número de equilibrios genéricamente es impar.¹ Esto se hace a través de interpretar la función de exceso de demanda como un campo vectorial en el espacio normalizado de precios, y notando que los equilibrios son los ceros de este campo vectorial. Se define el concepto de índice de un sistema de precios de equilibrio y, utilizando el Teorema de Poincaré-Hopf, muestra que la suma de estos índices es constante e igual a 1. Puesto que el número de equilibrios es impar, en particular no puede ser cero y, por lo tanto, el teorema de índice de Dierker proporciona una nueva prueba de la existencia de equilibrio. Adicionalmente, si el índice en cada precio de equilibrio es mayor a cero, entonces el teorema de índice también proporciona condiciones para la unicidad *global* de equilibrios, y no solamente local.

El utilizar teoremas de índice para estudiar cuestiones de existencia, estabilidad, número de equilibrios, y unicidad global, tiene una larga tradición en

¹Pero también ver Balasko (1975b, 1988), Dierker (1982) y Varian (1975).

la literatura económica, recayendo frecuentemente en argumentos propuestos por Dierker (1972) y Mas-Colell (1985). Por ejemplo, teoremas de índice han sido contruidos por Kehoe (1980, 1983) para economías de producción, Jouini (1992) para economías de producción no convexas, Giraud (2001) para economías de producción con retornos crecientes y Mandel (2008) para economías de producción con externalidades. Otra área donde este enfoque ha sido fructífero es en economías con mercados financieros incompletos (GEI), por ejemplo, a través de los teoremas de índice de Hens (1991) para modelos GEI con un solo bien, Kubler y Schmedders (1997) para economías financieras estocásticas, Schmedders (1999) para un conjunto abierto (pero no necesariamente genérico) de economías de dos periodos de tiempo utilizando un algoritmo homotópico, Momi (2003) y Predtetchinski (2006) para economías donde el grado de incompletitud es par, y Anderson y Raimondo (2007) para modelos GEI sin puntos de Hart.

El objetivo de este documento es construir un teorema de índice para economías infinitas suaves.² Esto mostrará que el número de equilibrios de economías infinitas suaves es impar y, por consiguiente, proporciona una prueba alternativa de existencia de equilibrio. Adicionalmente, proporciona condiciones que garantizan unicidad global de equilibrios.³ Para hacerlo, utilizaremos un análogo de dimensión infinita del Teorema de Poincaré-Hopf que fue propuesto por Tromba (1978). El resultado de Tromba es válido solamente para campos vectoriales que tienen una estructura muy particular — la de un campo vectorial Z-Rothe (ZR) — un concepto que introducimos en este documento a la literatura económica. Una parte importante de este documento se concentra en mostrar que las funciones de exceso de demanda agregada de las economías infinitas suaves realmente definen un campo vectorial Z-Rothe.

²En términos generales, las economías infinitas suaves son modelos de mercados competitivos donde las canastas de consumo, y las dotaciones, son funciones continuas a lo largo de los parámetros que los definen.

³En dimensiones infinitas, uno de los pocos resultados sobre unicidad global ha sido proporcionado por Dana (1993) tomando en cuenta un modelo de una economía de intercambio puro donde el espacio de consumo de los agentes es $L^p_+(\mu)$ y los agentes tienen utilidades aditivamente separables que cumplen con el supuesto (RA), es decir, que los coeficientes de aversión al riesgo relativo de los agentes son menores a uno. En este caso, Dana muestra que se puede trabajar con el espacio de pesos de utilidad para evitar el uso del enfoque de demanda que puede no estar bien definido. Dana finalmente muestra que si las utilidades cumplen el supuesto (RA), entonces el mapeo de exceso de utilidad es un sustituto bruto que, a su vez, implica existencia y unicidad global.

Este documento está estructurado de la siguiente manera. Para fijar ideas, comenzamos en la sección 2 revisando un ejemplo reciente de una economía infinita con mercados financieros completos estudiado por Crès et al. (2009) como un marco para comprender los saltos (o su ausencia) en los precios de activos. Después, definimos el mercado y definimos las funciones de exceso de demanda agregada en nuestro contexto; como siempre, las interpretaremos como campos vectoriales en el espacio de precios.

Las secciones 3 y 4 estudian en detalle la estructura de las funciones de exceso de demanda agregadas de economías infinitas suaves. Primero, la subsección 3.1 contiene una breve revisión de las definiciones básicas de la teoría de Fredholm, que son las herramientas matemáticas necesarias para generalizar la topología diferencial a dimensiones infinitas (otras definiciones matemáticas están incluidas en un apéndice). En la sección 3.2 revisamos los resultados de determinación obtenidos anteriormente en Covarrubias (2010), que muestran que la mayor parte de las funciones de exceso de demanda tienen ceros aislados; es decir, que los equilibrios son localmente únicos. Esto garantiza que en realidad tiene sentido contar el número de equilibrios. Como hemos mencionado antes, este resultado no es de ninguna manera el resultado de determinación más general disponible: ése sería Shannon y Zame (2002). No obstante, el hecho de que el resultado de determinación esté escrito en términos de funciones de exceso de demanda agregada hace más fluida la exposición de este documento de investigación.

En la sección 4, revisamos el concepto de campos vectoriales Z-Rothe como fueron desarrollados por Tromba (1978). Cuando una función de exceso de demanda agregada es Z-Rothe, podemos definir un índice adecuado de precios de equilibrio, es decir, un índice de ceros de un campo vectorial. Como ha sido mencionado anteriormente, el Teorema de Poincaré-Hopf en dimensiones infinitas se cumple para campos vectoriales Z-Rothe. Nuestro Teorema 3, más adelante, mostrará que efectivamente las economías infinitas suaves tienen una función de exceso de demanda agregada que es Z-Rothe. Finalmente, en la sección 5, demostramos el teorema principal donde construimos un teorema de índice para economías infinitas suaves. Mostramos que la suma de los índices de precios de equilibrio es constante e igual a 1. Proporcionamos también un corolario al teorema de índice, análogo a (Dierker, 1972), presentando una nueva demostración de existencia de equilibrio y

se analiza qué condición necesita cumplir una función de exceso de demanda para dar lugar a un equilibrio globalmente único.

2. El Mercado

Para fijar ideas, comenzamos explicando un ejemplo reciente estudiado por Crès et al. (2009) de una economía infinita suave con mercados financieros. Se pueden encontrar muchos ejemplos más de economías infinitas, por ejemplo, en Mas-Colell (1991), Mas-Colell y Zame (1991) y Chichilnisky y Zhou (1998).⁴ Utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{++}^n &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, \forall j = 1, \dots, n\}; \\ \mathbb{R}_+^n &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

2.1. Un ejemplo de una economía infinita suave

En este ejemplo de una economía de intercambio puro con mercados financieros completos, existen dos periodos de tiempo ($t = 0, 1$). La incertidumbre en $t = 1$ está representada por un conjunto de estados $M = [0, 1]$ y la densidad de dichos estados está dada por un mapeo C^1 , $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se tienen $i = 1, \dots, I$ agentes y n bienes en cada periodo de tiempo y en cada estado. Por lo tanto, una canasta de consumo es un par $x_i = (x_i^0, x_i^1)$ donde en $t = 0$ el consumo es un vector $x_i^0 \in \mathbb{R}_+^n$ y en $t = 1$ es un mapeo $x_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Cada uno de los I agentes está equipado con una dotación inicial en $t = 0$ de la forma $\omega_i^0 \in \mathbb{R}_{++}^n$, y una dotación C^1 en $t = 1$ de la forma $\omega_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$. Las preferencias de cada agente i están representadas por una utilidad de la forma

$$W^i(x_i) = \tilde{u}^i(x_i^0) + \int_M \tilde{u}^i(x_i^1(s)) \pi(s) ds.$$

Crès et al. (2009) (pero también ver Mas-Colell (1991) y Chichilnisky y Zhou (1998)) muestran que si

$$(p, x_1, \dots, x_I) = ((p^0, p^1), (x_1^0, x_1^1), \dots, (x_I^0, x_I^1))$$

⁴Otros ejemplos de economías continuas normalmente surgen a partir de las consideraciones de tiempo que varía en $[0, T]$ o cuando los bienes están parametrizados por sus características.

es un equilibrio, entonces p^1 y $\{x_i^1\}_{i=1}^I$ son todos mapeos continuos de $M = [0, 1]$ a $\mathbb{R}_{++}^n$. Es decir, las dotaciones iniciales, el consumo y los precios son todos elementos del mismo espacio de mapeos continuos de M a $\mathbb{R}_{++}^n$.⁵

2.2. Otros ejemplos de economías infinitas suaves

Otros ejemplos de economías infinitas suaves surgen a partir de consideraciones de tiempo continuo. Por ejemplo, supongamos que en una economía el consumo de n bienes se realiza de manera continua a través del tiempo $t \in [0, T]$. Entonces, una función continua $x^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ representa el consumo de n bienes por el agente i en el tiempo t . Alternativamente, $x(t)$ puede representar una tasa instantánea continua de consumo.

2.3. La economía

En esta sección establecemos el mercado. Definiremos los conjuntos de consumo y de precios, las preferencias y las funciones de demanda. Recordamos al lector que al final del documento de investigación se encuentra un apéndice con algunas definiciones matemáticas.

2.3.1. Los conjuntos de bienes, consumo y precios

Sea M un subconjunto compacto (i.e. cerrado y acotado) de $\mathbb{R}^m$ para algún m . El ejemplo que hay que tener presente es $M = [0, 1]$ o $M = [0, 1]^T$, si permitimos varios periodos de tiempo. **El espacio de bienes** es el conjunto $C(M, \mathbb{R}^n)$ de todas las funciones continuas de M a $\mathbb{R}^n$ equipadas con la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in M} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

con la norma estándar $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Abusando en la notación, omitiremos la mención explícita de $\mathbb{R}^n$.

El conjunto de consumo es entonces $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$, el cono positivo de $C(M, \mathbb{R}^n)$. Este conjunto consiste de todas las funciones continuas de

⁵Otra manera de interpretar este resultado es que, cuando los mercados son completos, no existen “saltos” en los precios de equilibrio, cuando se interpretan como funciones del espacio M de parámetros. No obstante, asumiendo mercados incompletos, Crès et al. (2009) proporcionan un ejemplo robusto de una economía con discontinuidades.

M a $\mathbb{R}^n$ de la forma $f = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ tal que $f_j(t) > 0$ para todos los $j = 1, \dots, n$ y para todos los $t \in M$.

Estrictamente hablando, los precios deberían estar en el cono positivo del espacio dual del espacio de bienes $C(M, \mathbb{R}^n)$. Sin embargo, se muestra en Mas-Colell (1991), Chichilnisky y Zhou (1998) y Crès et al. (2009) que, con utilidades separables, solamente un pequeño subconjunto de este espacio puede soportar equilibrios por lo que podemos considerar **el espacio de precios** como simplemente

$$S = \{P \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n) : \|P\| = 1\}$$

donde

$$\|P\| = \sup_{t \in M} \|P(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

con la métrica estándar $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ sobre $\mathbb{R}^n$. También denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno de $C(M, \mathbb{R}^n)$ de modo que, si $f, g \in C(M, \mathbb{R}^n)$, entonces

$$\langle f, g \rangle = \int_M \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt$$

con el producto interno estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ en $\mathbb{R}^n$. De nuevo, abusando en la notación, omitiremos la mención explícita de $\mathbb{R}^n$ en el producto interno.

2.3.2. Preferencias y funciones de demanda individual

Consideremos un número finito I de agentes. Cada agente está equipado con **preferencias representadas por una función de utilidad** de la forma

$$U^i(x) = \int_M u^i(x(t), t) dt$$

donde $u^i(x(t), t) : \mathbb{R}_{++}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 , cóncava, y estrictamente monótona, donde $\{y \in \mathbb{R}_{++}^n : u^i(y, t) \geq u^i(x, t)\}$ es cerrado. Hervés-Beloso y Monteiro (2009) muestran que tal representación es posible y Chichilnisky y Zhou (1998) muestran que estos supuestos sobre $u^i(x(t), t)$ implican que $U^i(x)$ es estrictamente monótona, cóncava y dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet.

Las funciones de demanda individual $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$ de cada agente i son soluciones al problema de optimización

$$f_i(P, y) = \arg \left[\max_{\langle P(t), x \rangle = y} U^i(x) \right].$$

Puesto que fijaremos preferencias, **una economía de intercambio** estará parametrizada por las dotaciones iniciales $\omega_i \in X$ de cada agente $i = 1, \dots, I$. Finalmente, denotaremos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_I) \in \Omega = X^I$.

2.3.3. Función de exceso de demanda agregada

Para una economía fija $\omega \in \Omega$, la **función de exceso de demanda agregada** es un mapeo $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ definido por

$$Z_\omega(P) = \sum_{i=1}^I (f_i(P, \langle P, \omega_i \rangle) - \omega_i).$$

También definimos $Z : \Omega \times S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ por la evaluación

$$Z(\omega, P) = Z_\omega(P).$$

Se muestra en Covarrubias (2010) que satisface $\langle P, Z_\omega(P) \rangle = 0$ para todos los $P \in S$, lo que a su vez implica que Z_ω puede ser interpretado como un campo vectorial sobre el conjunto de precios S . Cuando se considera como un campo vectorial, escribiremos $Z_\omega : S \rightarrow TS$ donde TS es el fibrado tangente de S .

Definición 1. Decimos que $P \in S$ es un **equilibrio** de la economía $\omega \in \Omega$ si $Z_\omega(P) = 0$. Denotamos el **conjunto de equilibrio** por

$$\Gamma = \{(\omega, P) \in \Omega \times S : Z(\omega, P) = 0\}.$$

3. Determinación de Equilibrios

Deseamos explorar la estructura de las funciones de exceso de demanda agregada y puesto que estaremos utilizando herramientas de topología diferencial en dimensiones infinitas, nos gustaría que nuestros mapeos fueran de Fredholm como fue introducido por Smale (1965). Brevemente recordamos al lector estas definiciones.⁶

⁶Como una motivación para los mapeos de Fredholm, supongamos que consideramos un mapeo lineal T entre dos espacios vectoriales cualquiera V y W . Podemos preguntarnos,

3.1. Teoría de índice de Fredholm

Un **operador de Fredholm** lineal es un mapeo lineal continuo $L : E_1 \rightarrow E_2$ de un espacio de Banach a otro con las propiedades:

1. $\dim \ker L < \infty$;
2. el rango L es cerrado;
3. $\text{coker } L := E_2 / \text{rango } L$ tiene dimensión finita.

Si L es un operador de Fredholm, entonces su **índice** es $\dim \ker L - \dim \text{coker } L$, de modo que el índice de L es un número entero.

Un **mapeo de Fredholm** es un mapeo $C', f : M \rightarrow V$ entre variedades diferenciables localmente como espacios de Banach, tal que, para cada $x \in M$ la derivada $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$ es un operador de Fredholm. El **índice** de f se define como el índice de $Df(x)$ para alguna x . Si M es conexo, esta definición no depende de x .

¿cuáles condiciones tendría que satisfacer T para ser una función biyectiva, es decir, un mapeo que es al mismo tiempo inyectivo y suprayectivo? En caso de que T fuera biyectivo, esto también significaría que T es invertible.

Existen dos resultados básicos de álgebra lineal que contestarían esta pregunta. Primero, recordemos que el kernel de T , o $\ker T$, consiste de aquellos puntos de V que están mapeados al cero en W bajo T . Para que T sea inyectiva, requeriríamos que $\ker T = \{0\}$. De manera similar, recordemos que el rango de T , o $\text{rango } T$, consiste de todos aquellos puntos que aparecen en la imagen bajo T en W . Para que T sea suprayectiva, requeriríamos que $\text{rango } T = W$.

En realidad, estas dos condiciones son bastante restrictivas. Los operadores de Fredholm fueron introducidos ya que, en términos generales, son “casi invertibles”: son “casi inyectivos” y “casi suprayectivos”. Esto quiere decir que $\ker T$ es un subespacio de dimensión finita de V (no únicamente el punto $\{0\}$ pero tampoco es un conjunto de dimensión infinita) y el rango de T “falla” el conjunto entero W solamente por un subespacio de dimensión finita.

Al expandir más estas nociones, dos mapeos lineales $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow V$ son “pseudoinversos” uno en relación con el otro, si $ST = I + G_1$ y $TS = I + G_2$, donde I es la identidad y G_1 y G_2 son dos mapeos con rango de dimensión finita. En otras palabras, aunque ST y TS no son la identidad, ellos no logran serlo solamente por una “perturbación compacta” de la identidad. Puede ser demostrado que $T : V \rightarrow W$ tendrá una pseudoinversa si y sólo si T es un operador de Fredholm. Los mapeos de Fredholm representan la noción no lineal de un operador de Fredholm.

3.2. Determinación de equilibrios

En nuestro trabajo anterior (2010) hemos demostrado que la función de exceso de demanda $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ de la economía $\omega \in \Omega$ es un mapeo de Fredholm de índice cero. Puesto que nos gustaría contar el número de precios de equilibrio de una economía, el primer resultado que necesitamos establecer es que genéricamente los equilibrios estarán aislados. Más adelante recordaremos al lector el concepto de una economía regular y de un sistema regular de precios.

Definición 2. *Decimos que una economía es **regular** (resp. **crítica**) si y sólo si ω es un valor regular (resp. crítico) de la proyección $\pi : \Omega \times S|_\Gamma \rightarrow \Omega$.*

Definición 3. *Sea Z_ω la demanda de exceso de la economía ω . Un sistema de precios $P \in S$ es un sistema de **precios de equilibrio regular** si y sólo si $Z_\omega(P) = 0$ y la derivada de $Z_\omega(P)$, denotada $DZ_\omega(P)$, es suprayectiva.*

En nuestro trabajo anterior (2010) mostramos la relación entre las economías regulares y los precios regulares de equilibrio.

Teorema 1. *(Covarrubias, 2010) La economía $\omega \in \Omega$ es regular si y sólo si todos los precios de equilibrio de Z_ω son regulares.*

El Teorema 2 mostró que, para la mayoría de las economías, su función de exceso de demanda agregada tendrá ceros aislados. Por consiguiente, tiene sentido intentar contarlos.

Teorema 2. *(Covarrubias, 2010) Casi todas las economías son regulares. Es decir, el conjunto de economías $\omega \in \Omega$ que da lugar a una función de exceso de demanda agregada Z_ω , con únicamente precios de equilibrio regulares, son residuales en Ω .*

Una vez mostrado que *la mayoría* de las funciones de exceso de demanda Z_ω tendrán ceros aislados, omitiremos la dependencia explícita de una economía genérica ω y simplemente escribiremos Z . De nuevo, recordamos al lector que el Teorema 2 no es el resultado de determinación más general disponible (cf. Shannon y Zame (2002)).

4. Campos Vectoriales Z-Rothe

Sabiendo que la función de exceso de demanda agregada es un campo vectorial en el espacio de precios, además de ser un mapeo de Fredholm para el cual conocemos su índice, nos gustaría saber si tiene la estructura de un campo vectorial Z-Rothe como fue desarrollado por Tromba(1978).⁷

Para definir esto, sea E un espacio de Banach cualquiera y $\mathcal{L}(E)$ el conjunto de mapeos continuos lineales de E a sí mismo. Denotemos por $GL(E)$ el grupo lineal general de E ; es decir, el conjunto de mapeos lineales invertibles en $\mathcal{L}(E)$. Sea $C(E)$ el espacio lineal de mapeos lineales compactos de E a sí mismo. Escribimos

$$\mathcal{L}_C(E) = \{T : T = I + C, I \text{ la identidad}, C \in C(E)\}.$$

Escribimos $\mathcal{S}(E) \subset GL(E)$ para denotar la vecindad estrellada máxima de la identidad en $GL(E)$. Formalmente,

$$\mathcal{S}(E) = \{T \in GL(E) : (\alpha T + (1 - \alpha)I) \in GL(E), \forall \alpha \in [0, 1]\}.$$

El conjunto de Rothe de E está definido como

$$\mathcal{R}(E) = \{A : A = T + C, T \in \mathcal{S}(E), C \in C(E)\}$$

y sus miembros invertibles por $GR(E) = \mathcal{R}(E) \cap GL(E)$.

Definición 4. *Un campo vectorial v de clase C^1 sobre una variedad diferencial de Banach N es un **campo vectorial Z-Rothe** si, siempre que $v(P) = 0$, la derivada de Fréchet $Dv(P) \in \mathcal{R}(T_P N)$.*

Teorema 3. *La función de exceso de demanda, Z es un campo vectorial Z-Rothe.*

Demostración. Para demostrar que $Z : S \rightarrow TS$ es Z-Rothe, donde TS denota el fibrado tangente a S , necesitamos mostrar que, siempre que $Z(P) = 0$, entonces su derivada de Fréchet DZ puede ser escrita de la forma $T+C$ donde T es un mapeo invertible y en la vecindad estrellada máxima de la identidad

⁷Recordamos al lector que al final del documento de investigación se encuentra un apéndice con algunos conceptos matemáticos relevantes.

en $G\mathcal{L}(T_P S)$ y donde C es un mapeo compacto. A pesar de que el cálculo explícito de Z ha sido realizado en un trabajo anterior (2010), de todos modos utilizamos parte de estos cálculos en esta demostración por completez.

Recordemos que el problema de los consumidores está dado por

$$\max_{x_i \in X} U^i(x_i) \quad \text{s.a.} \quad \langle P, x_i \rangle = y_i$$

donde

- $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$;
- $U^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por $U^i(x_i) = \int_M u^i(x_i(t), t) dt$;
- $u^i : \mathbb{R}_{++}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$ con los supuestos habituales de suavidad, concavidad estricta y monotonicidad;
- En principio, P es un elemento en el cono positivo del dual de $C(M, \mathbb{R}^n)$. Sin embargo, hemos explicado que con utilidades separables, en realidad P es un elemento de $C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$;
- Además, normalizamos de modo que

$$P \in S = \{P \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n) : \|P\| = 1\};$$

- $y_i \in (0, \infty)$.

Notemos que $P \in S$ es una variable independiente (exógena) del problema del consumidor. También, eventualmente, haremos $y_i = \langle P, \omega_i \rangle$.

Ahora, basándonos en los supuestos que hemos impuesto en las funciones de utilidad u^i (suavidad, concavidad y monotonicidad), esto implica que para cada $P \in S$, y para cada $y_i \in (0, \infty)$, el problema de optimización tiene una solución única que denotaremos por $f_i(P, y_i)$ donde $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$.

Entonces, las condiciones de optimalidad de primer orden pueden ser escritas como:

$$y_i = \langle P, f_i(P, y_i) \rangle \tag{1}$$

$$DU^i(f_i(P, y_i)) = \lambda_i(P, y_i) \cdot P \tag{2}$$

donde DU^i denota la derivada de Fréchet de $U^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda_i : S \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es un multiplicador de Lagrange.

La estrategia consiste en calcular las derivadas totales de las ecuaciones (1) y (2) y resolver para $Df_i(P, y_i)$. Explotaremos la simplicidad de $U^i(x)$ escrita en términos de u^i . Por consiguiente, primero escribimos las ecuaciones (1) y (2) como

$$y_i = \langle P, f_i(P, y_i) \rangle \quad (3)$$

$$u_x^i(f_i(P, y_i), t) = \lambda_i(P, y_i) \cdot P \quad (4)$$

donde u_x^i denota la derivada parcial de u^i con respecto a x . Tomando derivadas totales en ambos lados de las ecuaciones (3) y (4) obtenemos que

$$\begin{aligned} Dy_i &= f_i(P, y_i) + \langle P, Df_i(P, y_i) \rangle \\ u_{xx}^i(f_i(P, y_i), t) \cdot Df_i(P, y_i) &= \lambda_i(P, y_i) + P \cdot D\lambda_i(P, y_i) \end{aligned}$$

donde escribimos $\langle P, Df_i(P, w)_i \rangle$ para denotar la transformación lineal Df_i compuesta con la transformación lineal P .

Simplificando, y recordando que, puesto que $u^i(x)$ es cóncava, la transformación lineal (u_{xx}^i) es definida negativa y por lo tanto (u_{xx}^i) es invertible para cada t , por lo que tenemos

$$Dy_i = f_i(P, y_i) + \langle P, Df_i(P, y_i) \rangle \quad (5)$$

$$Df_i(P, y_i) = \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + (u_{xx}^i)^{-1} P \cdot D\lambda_i(P, y_i). \quad (6)$$

Al hacer la sustitución de la expresión de Df_i encontrada en (6) en Dy_i de la ecuación (5), y recordando que P es lineal, obtenemos

$$\begin{aligned} Dy_i &= f_i(P, y_i) + \langle P, Df_i(P, y_i) \rangle \\ &= f_i(P, y_i) + \langle P, \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + D\lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle \\ &= f_i(P, y_i) + \langle P, \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} \rangle + \langle P, D\lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle \\ &= f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P + D\lambda_i(P, y_i) \langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D\lambda_i(P, y_i) = \frac{1}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [Dy_i - f_i(P, y_i) - \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P] \quad (7)$$

donde el denominador $\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle$ no desaparece puesto que P y $(u_{xx}^i)^{-1}$ son operadores positivos.

Sustituimos la expresión de $D\lambda_i$, encontrada en (7), en (6) para obtener,

$$\begin{aligned} Df_i(P, y_i) &= \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + D\lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P \\ &= \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \\ &\quad + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [Dy_i - f_i(P, y_i) - \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P]. \end{aligned}$$

Lo que hemos mostrado es que $Df_i(P, w)$ puede ser escrita como la suma del operador invertible

$$\lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} Dy_i$$

y el operador de rango finito

$$-\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P].$$

Ahora, sea $y_i = \langle P, \omega_i \rangle$ y recordando que $Z : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ está dado por

$$Z(P) = \sum_{i=1}^I (f_i(P, \langle P, \omega_i \rangle) - \omega_i)$$

entonces la derivada de Fréchet $DZ : TS \rightarrow TC(M, \mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\begin{aligned} DZ(P) &= \sum_{i=1}^I Df_i(P, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} Dy_i \right\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P] \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, notando de nuevo que, el que $u^i(x)$ sea cóncava, implica que la transformación lineal (u_{xx}^i) es definida negativa y, por lo tanto, (u_{xx}^i) es invertible. Adicionalmente, la suma de transformaciones lineales definidas negativas de nuevo es definitiva negativa. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i)(u_{xx}^i)^{-1} P] \right\}$$

tiene rango finito, y

$$\sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} Dy_i \right\}$$

es invertible. Por lo tanto, DZ está escrito como la suma de un operador invertible y un operador de rango finito. Entonces, todo lo que necesitamos demostrar es que

$$\alpha \left[\sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} Dy_i \right\} \right] + (1 - \alpha)I$$

es invertible para todos los $\alpha \in [0, 1]$. Pero esta suma es solamente una homotopía de operadores definidos positivos. $\square$

5. El Teorema de Índice de Economías Infinitas Suaves

Sabiendo ahora que la mayoría de las economías son regulares, necesitamos encontrar una manera correcta de contar el número de equilibrios. Con una función de exceso de demanda que es un campo vectorial Z-Rothe, podemos usar herramientas de la topología diferencial de dimensión infinita que es parecida al caso de dimensión finita. En particular, revisaremos el concepto de la característica de Euler propuesta por Tromba (1978) y, con su ayuda, construiremos un teorema de índice para economías infinitas suaves.

5.1. La característica de Euler de campos vectoriales

Si P es un cero de un campo vectorial v , decimos que P es **no degenerado**, si $Dv(P) : T_P N \rightarrow T_P N$ es un isomorfismo. Ahora, supongamos

que un campo vectorial Z-Rothe v tiene únicamente ceros no degenerados, y sea P uno de ellos. Entonces, $Dv(P) \in G\mathcal{R}(T_P N)$. Tromba (1978) muestra que $G\mathcal{R}(T_P N)$ tiene dos componentes; $G\mathcal{R}^+(E)$ denota el componente de la identidad. Definimos

$$\text{sgn } Dv(P) = \begin{cases} +1, & \text{si } Dv(P) \in G\mathcal{R}^+(T_P N) \\ -1, & \text{si } Dv(P) \in G\mathcal{R}^-(T_P N) \end{cases}.$$

Entonces, **la característica de Euler** está dada por la formula

$$\chi(v) = \sum_{P \in \text{Ceros}(v)} \text{sgn } Dv(P).$$

Tromba también muestra que la característica de Euler es invariante bajo homotopía de campos vectoriales. Lo único que tenemos que hacer es construir un campo vectorial sobre S que tenga solamente una singularidad y que es homotópico al exceso de demanda agregada Z .

5.2. El teorema de índice de economías infinitas suaves

Finalmente estamos listos para construir un teorema de índice para economías infinitas suaves. Dado que los mapeos de Fredholm podrían ser descritos simplemente como los mapeos entre espacios de dimensión infinita que más se parecen al caso de dimensión finita, no es de sorprender que la demostración del teorema de índice en nuestro entorno sea muy similar al de Dierker (1972) o Mas-Colell (1985).

Supongamos que la función de exceso de demanda satisface el supuesto de deseabilidad de Dierker (1972)⁸, es decir que, si $P_n \in S$ y $P_n \rightarrow P \in \partial S$ (la frontera de S), entonces

$$\|Z(P_n)\| \rightarrow \infty.$$

Supongamos también que Z está acotado por abajo y que existe un número finito de ceros. El ingrediente final antes de demostrar el teorema de índice es verificar que la función de exceso de demanda es un campo vectorial que está apuntando hacia afuera a lo largo de la frontera de S . Para ver esto,

⁸Este supuesto expresa la idea de que cada bien es deseado por lo menos por un agente.

consideremos una secuencia de precios $P_n \rightarrow P \in \partial S$. Debido a que hemos asumido que Z está acotado por abajo y que $\|Z(P_n)\| \rightarrow \infty$, entonces el límite de $[1/\|Z(P_n)\|] Z(P_n)$ debe converger a un punto $z \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, Z está apuntando hacia dentro y por lo tanto $-Z$ está apuntando hacia fuera a lo largo de ∂S .

Teorema 4. *Supongamos que una función de exceso de demanda agregada Z está acotada por abajo y que satisface el supuesto en la frontera. Supongamos también que Z tiene sólo un número finito de singularidades y que todas ellas son no degeneradas. Entonces,*

$$\sum_{P \in \text{Ceros } Z} \text{sgn}[-DZ(P)] = 1.$$

Demostración. La demostración sigue estrechamente la demostración del teorema de índice en dimensiones finitas (ver Dierker (1982) y Mas-Colell (1985)): consiste de dos etapas. La primera, consiste en construir un campo vectorial específico en S , al que llamamos Z^Q , que tiene solamente un cero, apunta hacia adentro a lo largo de la frontera de S , y para el cual es fácil calcular el índice. La segunda etapa consiste en mostrar que la función de exceso de demanda Z es propiamente homotópica al campo vectorial Z^Q y que esta homotopía propia es a través de campos vectoriales Z -Rothe.

Sea $\bar{S}$ la clausura topológica de S . Para cualquier $Q \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$ fijo, definimos el campo vectorial $Z^Q : \bar{S} \rightarrow TS$ por

$$Z^Q(P) = \left[\frac{Q}{\langle P, Q \rangle} \right] - P.$$

Por construcción, $Z^Q(P)$ tiene únicamente un cero y apunta hacia adentro en la frontera. Su derivada $DZ_{(P)}^Q : T\bar{S} \rightarrow T(TS)$ está dada por

$$DZ_{(P)}^Q(h) = -\frac{Q\langle h, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2} - h$$

donde

$$h \mapsto -\frac{Q\langle h, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2}$$

es compacto y

$$h \mapsto -h$$

es invertible, entonces $DZ^Q \in \mathcal{R}(T_P S)$.

Ahora, sea

$$-\frac{Q\langle h, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2} - h = h'. \quad (8)$$

Necesitamos resolver para h . Entonces,

$$Q\langle h, Q \rangle + h\langle P, Q \rangle^2 = -h'\langle P, Q \rangle^2.$$

Aplicando Q en ambos lados obtenemos,

$$\langle Q, Q \rangle \langle h, Q \rangle + \langle h, Q \rangle \langle P, Q \rangle^2 = -\langle h', Q \rangle \langle P, Q \rangle^2.$$

Resolviendo para $\langle h, Q \rangle$ obtenemos

$$\langle h, Q \rangle = \frac{-\langle h', Q \rangle \langle P, Q \rangle^2}{\langle Q, Q \rangle + \langle P, Q \rangle^2}$$

donde el denominador nunca desaparece puesto que $Q \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$. Sustituyendo $\langle h, Q \rangle$ en (8) obtenemos entonces

$$h = h' + \frac{Q}{\langle P, Q \rangle^2} \left[\frac{\langle h', Q \rangle \langle P, Q \rangle^2}{\langle Q, Q \rangle + \langle P, Q \rangle^2} \right].$$

Esto muestra que DZ^Q es invertible y por lo tanto $DZ^Q \in G\mathcal{R}(T_P S)$. Además, puesto que no está en el mismo componente de la identidad, tiene que estar en $G\mathcal{R}^-(T_P S)$ y su único cero tiene un índice -1. El campo vectorial Z^Q apunta hacia adentro, de modo que al revertir la orientación hará que apunte hacia afuera con un índice de +1.

Hasta esta etapa, hemos construido un campo vectorial específico en S , que llamamos Z^Q , que solamente tiene un cero, apunta hacia adentro a lo largo de la frontera de S , y cuyo índice hemos mostrado es +1. Todo lo que necesitamos hacer ahora es mostrar que la función de exceso de demanda Z es propiamente homotópica al campo vectorial Z^Q y que esta homotopía propia es a través de campos vectoriales Z -Rothe.

Consideremos entonces la homotopía $F : S \times [0, 1] \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ dada por

$$F(P, \alpha) = \alpha Z(P) + (1 - \alpha) Z^Q(P).$$

Hemos visto que

$$DZ(P) = \sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} D y_i \right\} + \\ + \sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P] \right\}$$

y

$$DZ^Q(P) = -\frac{Q\langle \cdot, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2} - I.$$

Por consiguiente,

$$DF(P, \alpha) = \alpha DZ(P) + (1 - \alpha) DZ^Q(P) \\ = \alpha \sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} D y_i \right\} + (1 - \alpha) \{-I\} \\ + \alpha \sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P] \right\} \\ + (1 - \alpha) \left\{ -\frac{Q\langle \cdot, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2} \right\}.$$

Finalmente, notemos que, puesto que $\alpha > 0$ y $1 - \alpha > 0$, entonces

$$\alpha \sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} D y_i \right\} + (1 - \alpha) \{-I\}$$

es invertible, y

$$\alpha \sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} P}{\langle P, (u_{xx}^i)^{-1} P \rangle} [f_i(P, y_i) + \lambda_i(P, y_i) (u_{xx}^i)^{-1} P] \right\} + (1 - \alpha) \left\{ -\frac{Q\langle \cdot, Q \rangle}{\langle P, Q \rangle^2} \right\}$$

tiene rango finito.

Por consiguiente, Z es propiamente homotópico al campo vectorial Z^Q y esta homotopía propia es a través de campos vectoriales Z -Rothe. $\square$

6. Observaciones Finales

Concluimos del Teorema 4 que el número de equilibrios de economías infinitas suaves es genéricamente impar. En particular, no puede ser cero, así que esto da una nueva prueba de existencia.

Asimismo, como un corolario al Teorema 4, podemos proporcionar un análogo de dimensión infinita de Dierker (1972); Dierker muestra lo siguiente.

Teorema 5. *(Dierker, 1972) Si el jacobiano de la función de exceso de oferta es positivo en todos los equilibrios walrasianos, entonces existe exactamente un equilibrio.*

Hemos mostrado que:

Corolario 1. *Si el signo de la derivada de la función de exceso de oferta es positiva en todos los equilibrios walrasianos, i.e., si $-DZ(P) \in GR^+(T_P S)$, entonces existe exactamente un equilibrio.*

La logica detrás de este corolario es simple. El signo de la derivada de la función de exceso de oferta es $+1$ o -1 . Si el signo es positivo en todos los equilibrios walrasianos, y la suma de estas necesita ser igual a $+1$, solamente puede haber uno.

Referencias

- Abraham, R. y J. Robbin (1967): *Transversal mappings and flows*, Nueva York, Nueva York: W.A. Benjamin, Inc.
- Anderson, R. M. y R. C. Raimondo (2007): "Incomplete markets with no Hart points," *Theoretical Economics*, 2, 115-133.
- Balasko, Y. (1975b): "Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory," *Journal of Mathematical Economics*, 2, 95-118.
- Balasko, Y. (1988): *Foundations of the theory of general equilibrium*, Orlando, Florida: Academic Press, Inc.
- Balasko, Y. (1997a): "The natural projection approach to the infinite-horizon model," *Journal of Mathematical Economics*, 27, 251-265.
- Balasko, Y. (1997c): "Equilibrium analysis of the infinite horizon model with smooth discounted utilities," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 783-829.
- Chichilnisky, G. y Y. Zhou (1998): "Smooth infinite economies," *Journal of Mathematical Economics*, 29, 27-42.
- Covarrubias, E. (2010): "Regular infinite economies," *The B.E. Journal of Theoretical Economics (Contributions)*, 10, 1-19.
- Crès, H., T. Markeprand, y M. Tvede (2009): "Incomplete financial markets and jumps in asset prices," Documento de Debate 09-12, Departamento de Economía, Universidad de Copenhague, Øster Farimagsgade 5, No. 26, DK-1353 Copenhague K., Dinamarca.
- Dana, R. A. (1993): "Existence and uniqueness of equilibria when preferences are additively separable," *Econometrica*, 61, 953-957.
- Dierker, E. (1972): "Two remarks on the number of equilibria of an economy," *Econometrica*, 40, 951-953.

- Dierker, E. (1982): "Regular economies," en K. Arrow y M. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, volumen II, North-Holland Publishing Company, volumen II.
- Giraud, G. (2001): "An algebraic index theorem for non-smooth economies," *Journal of Mathematical Economics*, 36, 255-269.
- Hens, T. (1991): Structure of general equilibrium models with incomplete markets, tesis doctoral, Rheinische-Friedrich-Wilhelms Universität, Bonn.
- Hervés-Beloso, C. y P. Monteiro (2009): "Strictly monotonic preferences on continuum of goods commodity spaces," *Journal of Mathematical Economics*, doi:10.1016/j.jmateco.2009.10.003
- Jouini, E. (1992): "An index theorem for nonconvex production economies," *Journal of Economic Theory*, 57, 176-196.
- Kehoe, T.J. (1980): "An index theorem for general equilibrium models with production," *Econometrica*, 48, 1211-1232.
- Kehoe, T.J. (1983): "Regularity and index theory for economies with smooth production technologies," *Econometrica*, 51, 895-917.
- Kehoe, T.J., D.K. Levine, A. Mas-Colell, y W.R. Zame (1989a): "Determinacy of equilibrium in large-scale economies," *Journal of Mathematical Economics*, 18, 231-262.
- Kehoe, T.J., D.K. Levine, y P. Romer (1989b): "Steady states and determinacy of equilibria in economies with infinitely lived agents," en G. Feiwel, ed., *Joan Robinson and Modern Economic theory*, Nueva York, Nueva York. Macmillan, 21-44.
- Kehoe, T.J., D.K. Levine, y P. Romer (1990): "Determinacy of equilibria in dynamic models with finitely many consumers," *Journal of Economic Theory*, 50, 1- 21.
- Kubbler, F. y K. Schmedders (1997): "Computing equilibria in stochastic finance economies: Theory and applications," *Computational Economics*, 15, 145-172.

- Mandel, A. (2008): “An index formula for production economies with externalities,” *Journal of Mathematical Economics*, 44, 1385-1397.
- Mas-Colell, A. (1985): *The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach*, *Econometric Society Monographs*, volumen 9, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Mas-Colell, A. (1991): “Indeterminacy in incomplete market economies,” *Economic Theory*, 1, 45-61.
- Mas-Colell, A. y W.R. Zame (1991): “Equilibrium theory in infinite dimensional spaces,” en W. Hildenbrand y H. Sonnenschein, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, volumen IV, Elsevier Science Publishers, volumen IV.
- Momi, T. (2003): “The index theorem for a GEI economy when the degree of incompleteness is even,” *Journal of Mathematical Economics*, 39, 273-297.
- Predtetchinski, A. (2006): “A new proof of the index formula for incomplete markets,” *Journal of Mathematical Economics*, 42, 626-635.
- Schmedders, K. (1999): “A homotopy algorithm and an index theorem for the general equilibrium model with incomplete asset markets,” *Journal of Mathematical Economics*, 32, 225-241.
- Shannon, C. (1999): “Determinacy of competitive equilibria in economies with many commodities,” *Economic Theory*, 14, 29-87.
- Shannon, C. y W.R. Zame (2002): “Quadratic concavity and determinacy of equilibrium,” *Econometrica*, 70, 631-662.
- Smale, S. (1965): “An infinite dimensional version of Sard’s theorem,” *American Journal of Mathematics*, 87, 861-868.
- Tromba, A. (1978): “The Euler characteristic of vector fields on Banach manifolds and a globalization of Leray-Schauder degree,” *Advances in Mathematics*, 28, 148-173.
- Varian, H.R. (1975): “A third remark on the number of equilibria of an economy,” *Econometrica*, 43, 985-986.

Apéndice: Definiciones Matemáticas.

Definición 5. Una **homotopía** es cualquier familia de mapeos $f_t : X \rightarrow Y$, entre espacios topológicos, $t \in I = [0, 1]$, tal que el mapeo asociado $F : X \times I \rightarrow Y$ dado por $F(x, t) = f_t(x)$ es continuo. Se dice que dos mapeos $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ son **homotópicos** si existe una homotopía f_t que los conecta.

Definición 6. Un espacio topológico es **contraíble** si el mapeo identidad $i_X : X \rightarrow X$ es homotópico a un mapeo constante.

Definición 7. Un **espacio de Banach** $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado (sobre los números reales) que es completo con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definición 8. Un **espacio de Hilbert** H es un espacio vectorial con un producto interno definido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que define un espacio de Banach al fijar $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para $x \in H$.

Definición 9. Un **funcional lineal acotado** $h(x)$, definido sobre un espacio de Banach X , es un mapeo lineal $X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|h(x)| \leq K\|x\|_X$ para alguna constante K independiente de $x \in X$. El conjunto de todos los funcionales lineales acotados en X , denotado X^* , se llama **espacio conjugado** de X . Es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|h\| = \sup|h(x)|$ sobre la esfera $\|x\|_X = 1$. Si $(X^*)^* = X$, entonces el espacio X se llama **reflexivo**.

Definición 10. Se dice que un conjunto M de un espacio de Banach X es un **conjunto compacto** si M es cerrado (en la topología de la norma) y tal que cada secuencia en M contiene una subsecuencia fuertemente convergente.

Definición 11. Un operador lineal L con dominio X y rango contenido en Y , (X, Y espacios de Banach) es un **operador lineal acotado** si existe una constante K independiente de $x \in X$ tal que $\|Lx\|_Y \leq K\|x\|_X$ para todas las $x \in X$. El conjunto de tales mapeos para X, Y fijos es otra vez un espacio de Banach, denotado $L(X, Y)$ con respecto a la norma $\|L\| = \sup\|Lx\|_Y$ para $\|x\|_X = 1$.

Definición 12. Un operador lineal $C \in L(X, Y)$ se llama un **operador compacto** si para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, $C(B)$ es condicionalmente compacto en Y . Los mapeos lineales acotados con rangos de dimensiones finitas son automáticamente compactos; y, por el contrario, si X y Y

son espacios de Hilbert, entonces un mapeo lineal compacto C es el límite uniforme de tales mapeos.

Propiedades relevantes de los operadores lineales compactos. Sea $C \in L(X, X)$ compacto, y sea $L = I + C$. Entonces

1. L tiene rango cerrado;
2. $\dim \ker L = \dim \operatorname{coker} L < \infty$;
3. existe un número entero finito β tal que $X = \ker(L^\beta) \oplus \operatorname{rango}(L^\beta)$ y L es un homeomorfismo lineal de $\operatorname{rango}(L^\beta)$ sobre sí mismo.

Definición 13. Sea $f \in C^1(U, Y)$, $U \subset X$, X, Y espacios de Banach. Entonces, $x \in U$ es un **punto regular** para f si $f'(x)$ es un mapeo lineal suprayectivo en $L(X, Y)$. Si $x \in U$ no es regular, x se llama **punto singular**. De manera similar, los **valores singulares** y **valores regulares** z de f se definen considerando los conjuntos $f^{-1}(z)$. Si $f^{-1}(z)$ tiene un punto singular, z se llama valor singular, si no, z es un valor regular.

Definición 14. Se dice que un operador $f \in C^0(X, Y)$ es un **operador propio** si la imagen inversa de cualquier conjunto compacto C en Y , $f^{-1}(C)$ es compacto en X . La importancia de dicho concepto reside en el hecho de que si el operador f es propio, éste restringe el tamaño del conjunto de solución $S_p = \{x : x \in X, f(x) = p\}$ para cualquier $p \in Y$ fijo.

Definición 15. Se dice que un mapeo f entre espacios topológicos X, Y es un **mapeo propio** si la imagen inversa de cada subconjunto compacto de Y es un subconjunto compacto de X .