Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

Nº 2010-16

**Sobre el Gasto Estratégico en Votaciones con Redes
Sociales**

Carlos Lever Guzmán
Banco de México

Diciembre 2010

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Sobre el Gasto Estratégico en Votaciones con Redes Sociales*

Carlos Lever Guzmán[†]
Banco de México

Resumen: Este documento propone un modelo de competencias electorales, que incluyen las campañas políticas y el cabildeo estratégico, donde los votantes están influenciados por la opinión de sus vecinos en una red social. En el único equilibrio de Nash en estrategias puras del modelo, los gastos de campaña se concentran en los votantes que tienen una posición influyente en la red. Esta predicción contrasta con lo encontrado por los modelos anteriores de gasto estratégico, donde se había encontrado que el gasto debía concentrarse en los votantes que tienen una probabilidad más alta de ser pivotaes para la elección. Después de resolver el modelo, el documento prueba las predicciones empíricamente, usando datos sobre contribuciones de campaña hechas por grupos de interés en la Cámara de Representantes de los Estados Unidos de América. Las estimaciones indican que ambas variables, la influencia de red y la probabilidad de ser pivotal, son predictores significativos de los gastos de cabildeo. **Palabras Clave:** Juegos en redes, gastos estratégicos de campaña, juegos del Coronel Blotto, cabildeo estratégico, centralidad de Bonacich.

Abstract: This paper proposes a model of voting competitions (political campaigns and strategic lobbying) where voters are influenced by the opinion of their neighbors on a social network. In the unique pure strategy Nash equilibrium, resources are targeted toward individuals with an influential position in the network. This finding contrasts with previous theories of strategic spending which predict that parties (or lobbies) should spend more on individuals who have a higher probability of being pivotal for the vote. The paper then tests the model using data on campaign contributions by interest groups in the US House of Representatives. The estimations show that both network influence and pivotality are significant predictors of campaign contributions.

Keywords: Network games, strategic spending, Colonel Blotto games, counteractive lobbying, Bonacich centrality.

JEL Classification: D85, D72.

---

* Agradezco el financiamiento proveído por la beca “William y Sonja Davidow” por el Stanford Institute for Economic Policy Research (SIEPR). Este trabajo tiene una deuda enorme con mis asesores del doctorado: Matt Jackson, Doug Bernheim y Manuel Amador, quienes fueron muy generosos con su tiempo. También agradezco los comentarios de Jon Levin, Andy Skrzypacz, Giacomo DeGiorgi, Bob Hall, Matthew Harding, Paul Milgrom, Monika Piazzesi, Martin Schneider, Michele Tertilt, Bob Wilson, Aaron Bodoh-Creed, Matt Elliot, Ben Golub, Alexander Hirsch, Marcello Miccoli, Juuso Toikka, de los miembros de seminario informal de microeconomía de Stanford, del seminario informal de macroeconomía, del grupo de lectura sobre redes y del “gradloquium” de alumnos. Este trabajo tampoco hubiera sido posible sin los datos que fueron libremente compartidos por James Fowler; Keith Poole y Howard Rosenthal; Charles Stewart; y el Center for Responsive Politics (www.opensecrets.org).

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: clever@banxico.org.mx.

1. Introducción

Cuando las personas deciden cómo votar o cuál producto comprar, discuten su decisión con la gente en su entorno social. Estudiar el patrón de relaciones sociales es importante para comprender cómo las opiniones políticas se difunden, directa o indirectamente, a través de la sociedad. Este documento estudia competencias políticas en situaciones donde los votantes se influyen los unos a los otros. Los modelos actuales de competencias políticas no toman en cuenta estos efectos.

Utilizando técnicas del análisis de redes sociales, propongo un modelo donde dos *competidores* asignan recursos de manera estratégica para convencer a los votantes que los elijan. Para ello, los competidores se basan en la información de la red social. Para resolver el modelo, calculo el único equilibrio de Nash en estrategias puras. Mi modelo permite una rica estructura de la influencia entre individuos. Por ejemplo, permito que la influencia sea asimétrica y no impongo restricción alguna en el número total de conexiones en la red.

Trabajos anteriores sobre gasto estratégico en competencias electorales han encontrado que los recursos son dirigidos hacia los votantes que tienen una mayor probabilidad de emitir un voto pivotal.¹ A diferencia de ellos, encuentro que, cuando la influencia de la red es fuerte, los competidores dirigen sus recursos hacia los votantes que tienen posiciones influyentes en la red y que la influencia es medida por una medida de centralidad de eigenvector. Esta medida es frecuentemente utilizada en la literatura de sociología² y es la base detrás del algoritmo que utiliza Google para clasificar sitios de Internet, *PageRank*. Cuando la red tiene una influencia débil, encuentro que los competidores deciden gastar sus de acuerdo a una combinación ponderada de pivotalidad y de la pivotalidad de los vecinos de los votantes.

Este cambio en la estrategia de gasto hacia los votantes influyentes es sorprendente. Con o sin la red, los votantes pivotaes tienen en valor esperado el beneficio marginal más alto, porque tienen el impacto marginal más alto sobre el resultado de la elección. Siempre que

---

¹Ver Shubik y Weber (1981); Snyder (1989); Lever (2010).

²Ver Wasserman y Faust (1994); Bonacich (1987); Bonacich y Lloyd (2001).

se pueda dirigir los recursos perfectamente hacia votantes individuales, es un desperdicio gastar recursos para cambiar un voto que no es pivotal. Sin embargo, la red impide que se pueda convencer a los votantes de manera individual. A medida que los efectos de la red se hacen más fuertes, es indispensable convencer a todos los vecinos sociales de un individuo para atraer su voto. Los competidores responden a esto retirando recursos de los votantes pivotaes y enfocándose en los votantes influyentes.

Después de resolver el modelo teórico, evalúo empíricamente sus implicaciones utilizando datos sobre contribuciones de campaña hechas por grupos de interés en la Cámara de Representantes de los Estados Unidos. Puesto que puedo observar a cada legislador repetidamente a lo largo de varios ciclos electorales, puedo controlar por las características no observables que pudieran sesgar mis estimaciones. El efecto de la red es entonces identificado por la variación inter-temporal del patrón de gastos relativo a la variación inter-temporal en influencia.

En mis estimaciones encuentro que tanto la pivotalidad como la influencia de red (para redes fuertes) son predictores significativos del patrón de contribuciones de los grupos de interés, inclusive cuando controlo por varias variables que podrían sesgar mis resultados. Mis estimaciones indican que incrementar la influencia de red en una desviación estándar aumenta las contribuciones de campaña recibidas por el legislador promedio en \$26,000 dólares, lo que representa 6 % de sus contribuciones ($p = 0.03$). Aumentar la pivotalidad en una desviación estándar aumenta las contribuciones de campaña en \$39,000 dólares, o 9 % del promedio ($p = 0.00$). En cambio, si mido la influencia de red asumiendo que la red es débil no encuentro un coeficiente significativo, ni estadísticamente ni sustancialmente, y tiene el signo equivocado.

Mi documento une dos líneas de investigación: una sobre competencias políticas y una sobre redes sociales. En la investigación anterior sobre competencias políticas existe una literatura sobre el cabildeo contrarrestante³ y sobre el gasto estratégico en elecciones presi-

---

³Austen-Smith y Wright (1994, 1996).

denciales⁴, pero estos trabajos no consideran que los votantes se influyen el uno al otro.

Por otra parte, en la literatura sobre redes sociales ha habido mucho trabajo sobre la identificación de los miembros influyentes de una red, pero se ha hecho muy poco trabajo sobre cómo se usaría esta información en una competencia electoral. Actualmente existen demasiadas medidas de influencia de red. Mi modelo predice que una, la centralidad por eigenvector, es la correcta.⁵ Esta medida está estrechamente relacionada con la medida de inter-centralidad encontrada en el modelo de Ballester, Calvó-Armengol y Zenou (2006) sobre influencia en redes criminales.

Los únicos trabajos de investigación existentes sobre competencias políticas con efectos de red son los trabajos de Galeotti y Mattozzi (de próxima publicación) y Gröenert (2009). Galeotti y Mattozzi construyen un modelo de divulgación de información donde los votantes adquieren información a través de una red social. Su trabajo se enfoca en la cantidad de información revelada en un contexto donde los partidos políticos tienen un incentivo para ocultar sus plataformas. También estudian cómo la red altera los incentivos a postular candidatos moderados o extremos. Su trabajo pone mucho menos énfasis en la estructura de la red. Gröenert estudia el problema de un grupo de interés que desea persuadir a un grupo de legisladores que votan de acuerdo a regla conductual simple: votan a favor de una propuesta de ley si la fracción de sus vecinos que apoya la propuesta sobrepasa un umbral idiosincrásico. Cuando la red pertenece a la clase de redes de umbral, Gröenert encuentra que la estrategia óptima es sucesivamente convencer a los legisladores con mayor número de conexiones. También demuestra que si la red no se encuentra en esta clase, no se puede garantizar que dicha estrategia sea óptima.

Debido al crecimiento exponencial de los sitios de redes sociales en los últimos años, el análisis de redes sociales promete ser cada vez más importante para las futuras campañas políticas. Los votantes más jóvenes están recibiendo una cantidad proporcionalmente ma-

---

⁴Merolla, Munger y Tofias (2005).

⁵Ver Jackson (2008); Wasserman y Faust (1994) para las definiciones de muchas medidas de influencia y de centralidad en redes.

yor de su información política a través de estos sitios. En una encuesta por *Pew Research Center* sobre las elecciones presidenciales de 2008, 27 % de las personas menores de 30 años reportaron recibir información sobre la campaña a través de tales sitios. El número incrementa hasta 37 % si se toman en cuenta solamente las personas entre 18 y 24 años. Esto difirió drásticamente del 4 % de personas entre 30 y 40 años y menos de 1 % de personas mayores de 40 años que reportaron obtener cualquier información de esta forma. A medida que los votantes más jóvenes crezcan, es probable que la influencia de estos sitios aumente. Ahora tenemos más datos que nunca antes a nivel micro sobre la estructura de redes sociales. Esto permitirá decidir el patrón de gasto de campaña de maneras que hubieran sido inconcebibles hace una década.

El resto del documento de investigación está estructurado de la siguiente manera: la Sección 2 plantea los supuestos del modelo; la Sección 3 resuelve el modelo; la Sección 4 evalúa el modelo usando datos sobre contribuciones de campaña en la Cámara de Representantes de los Estados Unidos; y la Sección 5 concluye. Presento dos extensiones en apéndices. En el modelo básico, asumo que los competidores tienen una cantidad fija de recursos, pero en el Apéndice C resuelvo el modelo cuando los competidores tienen que recaudar sus recursos a un costo. En el Apéndice D extiendo el modelo para competencias en sistemas de representación proporcional, donde los competidores maximizan la fracción de votos que reciben.

2. El Modelo

2.1. Los votantes.

Hay un número finito N de votantes que seleccionan entre dos opciones, A y B . Estas opciones pueden ser dos candidatos, en el caso de una elección general, o la opción de aprobar un proyecto de ley vs. mantener el statu quo, en el caso de una asamblea legislativa. Un subíndice i denota al votante i . Todos los votantes tienen que escoger entre A o B , la abstención no está considerada en el modelo.

Cada votante tendrá una opinión p_i del valor relativo de A vs. B . Una p_i más grande será más favorable para A . Estas opiniones son un estadístico suficiente de la información relevante requerida para escoger entre A y B . Por ejemplo, p_i podría capturar la diferencia en la capacidad de los candidatos de lidiar con una crisis financiera; la percepción de cuál candidato está más determinado a llevar a cabo reformas difíciles; o la diferencia en carisma entre los candidatos.

Es común que los juegos de gasto estratégico solamente tengan equilibrios en estrategias mixtas.⁶ Estos equilibrios son difíciles de resolver en sí mismos. Resolverlas junto con la influencia de la red sería demasiado difícil. Para evitarlos, asumo que los votantes escogen de manera probabilística. El incrementar la opinión p_i solamente aumentará la probabilidad de que el votante i escoja A por encima de B .

Asumiré que incrementar p_i aumenta de manera diferenciable la probabilidad de votar por A . La manera más fácil de modelar esto es reparametrizar las opiniones de modo que p_i represente la probabilidad de que i escoja A . Para ser concreto, asumo que los votos se emiten para maximizar la siguiente función de utilidad.

$$U(\text{votar por } A) - U(\text{votar por } B) = p_i - \eta_i$$

Donde $p_i \in (0, 1)$. Cada η_i está distribuida Uniforme $[0, 1]$ y su realización es independientemente. El votante i escoge A si p_i es más grande que η_i , lo cual ocurre con una probabilidad p_i . El votante i escoge B con probabilidad $(1 - p_i)$. Por razones técnicas, asumo que todos los votantes tienen una probabilidad positiva de escoger ambos candidatos, aunque la probabilidad de que un votante se desvíe de su intención de voto puede ser arbitrariamente pequeña.

El elemento estocástico η_i representa la incertidumbre acerca de los elementos que deter-

---

⁶La referencia más conocida son los juegos del coronel Blotto. En los juegos más básicos, el coronel Blotto y su oponente deben asignar sus recursos limitados a N diferentes campos de batalla. Quien asigna más recursos a un campo gana la batalla, y quien gana la mayor parte de batallas gana la guerra. Ver Roberson (2006) para una referencia extraordinaria.

minan un voto. Esta variable no necesita ser aleatoria desde el punto de vista del votante, solamente es necesario que sea desconocida para los competidores. Puede haber todo tipo de elementos que hacen que los votantes cambien de opinión. Por ejemplo, un votante puede decidir cambiar su voto porque dio la causalidad de que había dado la mano al candidato en un mitin. Desde la perspectiva de los competidores, estos elementos son difíciles de predecir y controlar. Incluso ha sido reportado que en EEUU el mal clima puede cambiar el resultado de una elección influenciando de manera diferenciada la asistencia de los demócratas y de los republicanos a las urnas.⁷

2.2. Los competidores.

Asumiré que hay dos competidores, uno asociado con cada opción A y B . Los competidores tienen que decidir cómo gastar los recursos en los votantes. Los competidores pueden considerarse como partidos políticos o grupos de interés que compiten. Interpretar A y B como partidos políticos es sencillo: los partidos tienen que convencer a los votantes para que los escojan y quien obtiene la mayoría de votos gana.

Para interpretar a los competidores como grupos de interés, se asume que A y B están luchando por un proyecto de ley en el Congreso. Un grupo de presión quiere que el proyecto sea aprobado y otro grupo quiere que el proyecto no sea aprobado. Los grupos de interés dirigen sus recursos hacia diferentes legisladores para convencerlos de que voten hacia su dirección preferida. Sin pérdida, asumiré que A quiere que el proyecto sea aprobado mientras que B prefiere el statu quo.

Cada competidor tiene una cantidad fija de recursos para gastar, denotada por R_A, R_B . Estos recursos finitos podrían ser dinero para presupuestos de publicidad, dinero para gastos de cabildeo o tiempo. Establecemos (a_i, b_i) como, respectivamente, el porcentaje de recursos que el competidor A y el competidor B gastan en el votante i ; entonces $(a_i R_A, b_i R_B)$ son las cantidades en unidades de recursos. En el Apéndice C resuelvo el modelo cuando los

---

⁷Gómez, Hansford y Krause (2008).

competidores tienen que recaudar fondos a un costo.

Asumiré que A y B solamente se preocupan por ganar la elección. No es importante para ellos con cuántos votos. En el modelo habrá incertidumbre sobre los votos, entonces A y B intentarán maximizar su probabilidad de ganar. Ya que algunos proyectos de ley necesitan una mayoría calificada para ser aprobados, también resolveré el modelo con reglas de supermayoría. En estos casos, asumiré sin pérdida que A necesita una mayoría calificada y que B gana siempre que A no logre obtenerla. Establecemos $\bar{N}$ como la cantidad mínima de votos que A necesita para ganar.

Denoto por $\delta_i \in \{0, 1\}$ a la decisión final del votante i . El competidor A quiere maximizar $\pi(p_1, \dots, p_N) = \text{Prob}(\sum \delta_i \geq \bar{N})$. El competidor B quiere maximizar $1 - \pi$, que es lo mismo que minimizar π .

El Apéndice D resuelve un modelo donde A y B desean maximizar el porcentaje de votos que reciben. Esto es importante para sistemas políticos con representación proporcional donde el número de escaños en el congreso depende de la proporción del voto. Los resultados son similares a los reportados aquí.

2.3. La estructura del juego.

Para mantener el juego manejable, primero habrá una etapa del juego donde los competidores gastan sus recursos y después habrá una etapa donde los votantes cambian su opinión a través de la red social. Dentro de cada etapa hay periodos en los que se repiten acciones similares. La estructura del juego es la siguiente.

Sea p_i^t la opinión del votante i en el periodo t .

- **La etapa inicial:** (Periodo 0) Los votantes empiezan con una opinión p_i^0 . La red está fija y es de conocimiento común.
- **La etapa de persuasión:** (Periodo 1) Los competidores gastan recursos simultáneamente para influir en la decisión de los votantes. (Sección 2.4.)

- **La etapa de la red:** (Periodos 2 a T) Después de que los competidores gastan todo su presupuesto, los votantes actualizan p_i^t a través de su red social. (Sección 2.5.)
- **Etapa final.** Las η_i 's se realizan. Los votantes escogen A con una probabilidad p_i^T .

2.4. La etapa de persuasión.

Figura 1: La función de torneo depende de la proporción relativa de recursos gastados en el votante y tiene una figura de “S” cuando se grafica en unidades logs. La figura muestra dos funciones potenciales, cada una con un parámetro p_i^0 distinto. Se asume que $R_A = R_B$.

Figura 1: La función de torneo depende de la proporción de recursos y tiene la forma de “S” en unidades log. La imagen las funciones para dos posibles parámetros p_i^0 . La imagen asume que $R_A = R_B$.

Durante la etapa de persuasión, los competidores gastan sus recursos simultáneamente con el objetivo de influenciar a los votantes. Asumo que los competidores pueden cambiar las opiniones a través de la siguiente función de torneo (Ver Figura 1.)

$$p_i^1(0, 0) = p_i^0$$

$$p_i^1(a_i R_A, b_i R_B) = \frac{p_i^0 (a_i R_A)^\gamma}{p_i^0 (a_i R_A)^\gamma + (1 - p_i^0) (b_i R_B)^\gamma}; \quad \gamma > 0$$

Escojo esta forma funcional para mantener el modelo manejable. A continuación describo sus características principales.

- La función toma valores en $[0, 1]$ y varía suavemente con la cantidad de recursos que gasta cada competidor.
- Si $b_i > 0$, el competidor A solamente puede convencer a i gastando una cantidad infinita de recursos, y viceversa: p_i^1 tiende monótonamente a 1 cuando $a_i R_A \rightarrow \infty$ si $b_i > 0$; y p_i^1 tiende monótonamente a 0 cuando $b_i R_B \rightarrow \infty$ si $a_i > 0$.
- Si ambos competidores gastan la misma cantidad de recursos, $a_i R_A = b_i R_B$, la opinión del votante i no cambia: $p_i^1 = p_i^0$.
- Si ambos competidores cambian proporcionalmente la cantidad que gastan en el votante i , la opinión p_i^1 queda sin alterar.

$$p_i^1(\lambda a, \lambda b) = p_i^1(a, b); \forall \lambda > 0$$

Esto ocurre porque la función de torneo solamente depende de la cantidad elativa de recursos gastados en cada votante: $(a_i R_A)/(b_i R_B)$.

- La persuabilidad marginal baja cuando A y B aumentan sus recursos proporcionalmente. Esto es crucial para obtener equilibrios en estrategias puras.

$$\frac{\partial p_i^1}{\partial a}(\lambda a, \lambda b) < \frac{\partial p_i^1}{\partial a}(a, b); \forall \lambda > 1$$

Las funciones de torneo han sido utilizadas en la literatura económica para estudiar el gasto estratégico en torneos, carreras armamentísticas y competencias.⁸ Skaperdas proporciona axiomatizaciones para ésta y otras funciones de torneo.⁹

---

⁸Ver Hirshleifer (1991); Skaperdas (1992) y Siegel (2009, de próxima publicación).

⁹Skaperdas (1996).

Shubik y Weber utilizan esta función de torneo para resolver una versión suavizada del juego del coronel Blotto.¹⁰ Snyder utiliza una función ligeramente más general que no depende de la proporción de los recursos, pero que tiene todas las otras características mencionadas.¹¹ Sus resultados son cualitativamente similares, pero la formula aquí empleada da soluciones analíticas convenientes. Mi modelo es diferente de los dos anteriores porque permite la influencia a través de la red.

El parámetro γ determina el impacto de los recursos en las opiniones. Para un γ grande, una pequeña diferencia en el nivel de gastos entre A y B cambia drásticamente las opiniones en una dirección u otra. Cuando γ tiende al infinito, el juego se convierte en un juego estándar del coronel Blotto.

2.5. La etapa de la red.

Después de que los competidores han gastado todo su presupuesto, los votantes actualizan su opinión tomando un promedio ponderado de la opinión de sus vecinos en la red social. La red es exógena y de conocimiento común entre los competidores.

Cada votante tiene una unidad de atención que asigna entre las opiniones de sus vecinos y su propia opinión. Con cada ronda de actualización, la opinión p_i^t evoluciona de acuerdo a

$$p_i^{t+1} = \sum_{j=1}^N M_{ij} p_j^t; \text{ con } \sum_{j=1}^N M_{ij} = 1 \text{ y } M_{i,j} \geq 0$$

El parámetro M_{ij} representa el peso que el votante i atribuye a la opinión del votante j ; M_{ii} representa el peso que le atribuye a su opinión previa. Los pesos son no-negativos.

Estos pesos resumen toda la información de la red. Por lo tanto, una red es simplemente una matriz M que es estocástica por filas.

Los votantes pueden tener pesos asimétricos sobre la opinión de cada uno, es decir M_{ij} puede ser diferente de M_{ji} . Inclusive puede ser que el votante i influencie a j pero que j no

---

¹⁰Shubik y Weber (1981).

¹¹Snyder (1989).

influncie a i . Por ejemplo, los *bloggers* pueden influenciar la opinión de sus lectores sin tener que seguir los *twits* de sus lectores.

El desafío más grande de los modelos con influencia de redes es calcular la evolución de las opiniones cuando la estructura de la red es compleja. Esto es aún más complicado para un modelo de gasto estratégico en las competencias con votaciones de mayoría porque es difícil calcular cómo las opiniones cambian la probabilidad de ganar.

Asumiendo el proceso anteriormente mencionado, puedo reformular la evolución de opiniones como un sistema de transición lineal. Esto me permite estudiar el problema utilizando poderosas herramientas de álgebra lineal y de la teoría de las cadenas de Márkov.

Sea $\mathbf{p}^t$ el vector de opiniones en el periodo t . Este vector evoluciona de acuerdo a:

$$\mathbf{p}^{t+1} = M\mathbf{p}^t = M^t\mathbf{p}^1$$

Hay dos maneras de interpretar la influencia de la red. Puede ser interpretada como un modelo de procesamiento de información o como un modelo de preferencias sociales.

En la interpretación de información, hay un parámetro p que captura la diferencia real en el valor de A sobre B , pero los votantes no lo conocen, solamente tienen información desagregada, u opiniones, sobre p . Los votantes intentan actualizar su estimación de p a través de la opinión de sus vecinos. A medida que las personas van actualizando sus opiniones, la información se difunde en la sociedad a través de las redes sociales. Los votantes actualizan su opinión muchas veces para incorporar la nueva información que se propaga a través de la red.

Actualizar opiniones a través de un proceso lineal no es necesariamente la manera óptima bayesiana de procesar información, pero puede ser justificada como un heurístico simple que los votantes tienen que utilizar porque su racionalidad es acotada. En general, el procesamiento óptimo bayesiano puede ser bastante difícil de resolver, y la actualización lineal miope proporciona una estimación consistente de la p real para electorados con un gran número de

individuos, siempre y cuando la estructura de la red tenga algunos supuestos razonables.¹²

La actualización lineal sería óptima en un mundo con creencias a priori distribuidas Normal alrededor de la p real y con señales p_i que están también son Normal, pero los pesos M_{ij} podrían requerir de un ajuste entre periodos.¹³

Si interpretamos la red como un modelo de preferencias sociales, no hay un parámetro real p . Lo único que hay es la preferencia estocástica de los votantes para escoger A , y no B . Dicha preferencia es positivamente influenciada por las preferencias de sus vecinos sociales. El valor de p_i captura la intensidad de la preferencia y determina la probabilidad de la selección final. Puesto que los votantes tienen una preferencia para votar como lo hacen sus vecinos, incorporan la intensidad de las preferencias de sus vecinos en su propia decisión.¹⁴ La dinámica de actualizaciones surge porque diferentes votantes quieren imitar a diferentes personas, lo cual fuerza a los votantes a continuamente actualizar sus preferencias para ajustarse a las de sus vecinos. El proceso de actualización asume que los individuos son miopes al cambiar su opinión.

Por el momento, asumiré que la red puede cambiar completamente la opinión de cada votante. En la sección 3.5 ampliaré el modelo para que los votantes tengan una ideología privada que no pueda ser cambiada. La elección final del votante dependerá de la interacción entre su ideología privada y su preferencia social.

2.6. Algunas definiciones de redes.

Me referiré a los votantes como los nodos de la red y diré que hay una conexión de i a j si $M_{ij} > 0$. Una red es *dirigida* si puede haber una conexión del nodo i al nodo j sin que haya una conexión de j a i . Una red dirigida es conexa si para cada par de nodos, i, j , hay una trayectoria dirigida de i a j y una trayectoria dirigida de regreso. Es decir, ó i está conectado

---

¹²Las condiciones requeridas garantizan que la influencia de cualquier individuo y de cualquier grupo finito de individuos no esté acotada por arriba de cero. Ver Golub y Jackson (2010b).

¹³Ver DeMarzo, Vayanos y Zwiebel (2003); Golub y Jackson (2010b); Acemoglu, Ozdaglar y Parandeh-Gheibi (2010) para más sobre estos problemas.

¹⁴A esto se le puede llamar altruismo en el sentido de que la utilidad de un votante es un promedio ponderado de su utilidad, p_i , y la utilidad esperada de sus vecinos.

a j ó hay una serie de nodos $\{k_1, \dots, k_n\}$ tales que $\{M_{i,k_1}, M_{k_1,k_2}, \dots, M_{k_{n-1},k_n}, M_{k_n,j}\} > 0$.

También asumo que la red es aperiódica. La aperiodicidad es una condición técnica que se cumple si por lo menos un votante pone un peso positivo en su opinión anterior.¹⁵

Esto termina el planteamiento del modelo. Ahora procedo a encontrar los equilibrios del juego.

3. Los equilibrios del juego.

Resolveré equilibrios del modelo en tres situaciones: (1) $T = 1$ y no hay influencia de la red; (2) $T = 2$, hay solamente una ronda de actualización de la red, llamo a esto una red con influencia débil; y (3) $T = \infty$, donde la influencia de la red es arbitrariamente grande, a lo que me referiré como una red con influencia fuerte.

En todos los casos citados, el competidor A resuelve el siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} \max_{(a_1, \dots, a_N)} \quad & \pi(p_1^T(a_1 R_A, b_1 R_B), \dots, p_N^T(a_N R_A, b_N R_B)) \\ \text{s.a.} \quad & \sum a_i = 1 \end{aligned}$$

Mientras que el competidor B resuelve

$$\begin{aligned} \min_{(b_1, \dots, b_N)} \quad & \pi(p_1^T(a_1 R_A, b_1 R_B), \dots, p_N^T(a_N R_A, b_N R_B)) \\ \text{s.a.} \quad & \sum b_i = 1 \end{aligned}$$

En la solución a ambos problemas, los competidores gastan en cada votante hasta igualar el beneficio marginal de cambiar p_i^1 al costo marginal de hacerlo. Este simple hecho, junto con la función de torneo escogida, me permite caracterizar todos los equilibrios de *nash* en estrategias puras. La Proposición 1 muestra que en cualquier equilibrio de estrategias

---

¹⁵Ver Jackson (2008) para más detalles sobre las definiciones.

puras, si existe uno, los competidores escogen a_i , b_i proporcionalmente al beneficio marginal multiplicado por el costo marginal. Esto implica que en el equilibrio, ambos competidores gastan el mismo porcentaje de recursos en cada votante ($a_i = b_i$), aunque el porcentaje puede ser diferente entre votantes distintos.

Si B tiene menos recursos que A , no podrá impedir que A incremente su probabilidad de ganar, pero esto no garantiza que A ganará, puesto que los votos son probabilísticos. El competidor B aún así se beneficia de gastar sus recursos, porque esto reduce la probabilidad de que A gane. Además, el competidor B prefiere estar en una elección con $R_A = 1 + \varepsilon + K$ y $R_B = 1 + \varepsilon$, que en una elección con $R_A = \varepsilon + K$ y $R_B = \varepsilon$, porque a través de gastar más recursos reduce el impacto marginal del exceso de recursos de A .

Si los competidores tienen la misma cantidad de recursos, en equilibrio el gasto no cambia la probabilidad de que cada ganará. Si los competidores tienen una preferencia por no gastar sus recursos, se beneficiarían firmando un contrato que los prohibiera los gastos de campaña. Por supuesto, las democracias funcionales tienen controles y contrapesos para impedir que los partidos políticos dividan las posiciones de poder sin realizar campañas abiertas. Por ejemplo, algunas democracias tienen un mandato legal sobre el número de debates a los cuales los candidatos tienen que asistir.

Desafortunadamente, el modelo no es el adecuado para evaluar el bienestar de los votantes, por lo que no podemos comparar el bienestar social para diferentes niveles de recursos de campañas. Aun si los recursos de campañas no cambian el resultado esperado de una elección, pueden incrementar el bienestar de los votantes reduciendo la incertidumbre acerca de los candidatos y proporcionándoles el valor de opción para votar en contra de su preferencia esperada cuando las características de los candidatos lo justifican. Personalmente, comparto el punto de vista de que una de las principales ventajas de una democracia es que ésta obliga a "gobernar a través de deliberación".

La Proposición 1 proporciona una condición necesaria pero no suficiente para encontrar un equilibrio *nash* de estrategias puras. Esto se complementa con la Proposición 2 que utiliza

una condición de concavidad (γ tiene que ser suficientemente pequeño) para mostrar que las estrategias postuladas en efecto son un equilibrio. Bajo esta condición puedo además mostrar que este es el único equilibrio del juego.

Para un γ más grande, las estrategias establecidas todavía podrían ser un equilibrio, pero podría no ser el único. Ya que este es un juego de suma cero, del teorema minimax sabemos que todos los equilibrios tendrían pagos equivalentes.¹⁶ Cuando $\gamma \rightarrow \infty$, las estrategias establecidas no pueden continuar siendo un equilibrio, porque el juego se acerca al juego estándar del coronel Blotto que no tiene equilibrios de estrategias puras. (Y la correspondencia de equilibrio es hemi-continua superior cuando $\gamma \rightarrow \infty$).

Proposición 1 (Sobre la estructura de los equilibrios). *Las estrategias presentadas abajo constituyen el único equilibrio nash de estrategias puras, si existe uno.*

$$a_i^* = b_i^* = \frac{(\partial\pi/\partial p_i^1)p_i^1(R_A, R_B)(1 - p_i^1(R_A, R_B))}{\sum (\partial\pi/\partial p_j^1)p_j^1(R_A, R_B)(1 - p_j^1(R_A, R_B))}$$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Proposición 2 (Existencia y unicidad). *Existe $\bar{\gamma} > 0$ tal que para todos $\gamma < \bar{\gamma}$, las estrategias descritas en la Proposición 1 son el único equilibrio del juego.*

Demostración. Ver Apéndice B. □

3.1. Resolviendo el modelo sin actualización de la red.

Sin la red, los competidores enfocan sus recursos sobre los votantes pivotaes. Un votantes es *pivotal* para una elección si, condicional a los votos de los demás, cambiar su voto cambia el resultado de la votación. Puesto que los votos son estocásticos, los competidores gastan más en los votantes que tienen una probabilidad más alta de ser pivotaes. Denotemos por

---

¹⁶Ver el teorema minimax en Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

que q_i a la *probabilidad del votante i de ser pivotal* bajo $\mathbf{p}^T$. Esta está dado por

$$q_i = \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{i\} \\ |S| = \bar{N} - 1}} \prod_{j \in S} p_j^T \prod_{\substack{j' \notin S \\ j' \neq i}} (1 - p_{j'}^T)$$

Los votantes pivotaes son importantes porque los competidores solamente se preocupan por ganar, lo que significa que el influenciar a votantes pivotaes tiene el beneficio marginal más alto, en valor esperado. En el margen, gastar dinero para cambiar un voto que no es pivotal es desperdiciar recursos.

En el equilibrio tenemos

$$a_i^* = b_i^* = \frac{q_i p_i^1 (1 - p_i^1)}{\sum_j q_j p_j^1 (1 - p_j^1)}$$

Donde q_i y p_i^1 son asumiendo que los competidores gastan (R_A, R_B) en cada votante.

3.2. Resolviendo el modelo con efectos débiles de la red.

Con una ronda de actualización de la red encuentro que en equilibrio, los competidores gastan en cada votante de acuerdo a un multiplicador de red que promedia la probabilidad de que el votante sea pivotal y la probabilidad de que sus vecinos lo sean. Puesto que la red cambia p_i^T , también cambia q_i . Medir la probabilidad de ser pitoval con la red es analíticamente difícil porque las probabilidades de ser pivotal son objetos complicados. Sin embargo, este cálculo es conceptualmente claro. La q_i es simplemente la probabilidad de que el votante i sea pivotal bajo $\mathbf{p}^2(R_A, R_B)$. Es decir, primero calculamos p_i^1 como si los competidores gastaran (R_A, R_B) en cada votante, hacemos una ronda de actualización en la red y calculamos las probabilidades de ser pivotal. Ya que los grupos de interés conocen la red, ellos tienen suficiente información para llevar a cabo el cálculo. De aquí obtenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_i^1} = \sum_k \frac{\partial \pi}{\partial p_k^2} \cdot \frac{\partial p_k^2}{\partial p_i^1} = M_{ii} q_i + \sum_{k \neq i} q_k M_{ki}$$

Recordemos que M_{ki} es cuánto el votante k escucha al votante i . En el equilibrio los competidores A y B gastan de acuerdo a

$$a_i^* = b_i^* = \frac{(M_{ii}q_i + \sum_{k \neq i} q_k M_{ki})p_i^1(1 - p_i^1)}{\sum_j (M_{jj}q_j + \sum_{k \neq j} q_k M_{kj})p_j^1(1 - p_j^1)}$$

3.3. Resolviendo el modelo con efectos de red fuertes y convergencia en opiniones.

Conceptualmente, podemos repetir el cálculo de la subsección anterior para cualquier T finito sin mayor problema. Cada vez ajustaría el cálculo de q_i . En la práctica, lo complicado sería calcular todas las influencias directas e indirectas después de $T - 1$ rondas de actualización. En vez de hacer eso, en esta sección me enfocaré en el límite cuando $T \rightarrow \infty$ para comprender qué ocurre cuando los efectos de la red son fuertes. En el límite obtengo un resultado sorprendente: la pivotalidad de un votante no tiene importancia para determinar el equilibrio, solo importa su influencia en la red. Dicha influencia sólo depende de la estructura de la red, y no de la distribución de opiniones.

El siguiente resultado de DeGroot (1974) es necesario para resolver el equilibrio. Bajo condiciones poco restrictivas sobre la estructura de la red, en el largo plazo todas las opiniones convergen en un consenso. Este consenso es un promedio ponderado de la opinión inicial de cada votante. La influencia de la opinión inicial de un votante sobre el consenso está dada por el peso de DeGroot del votante. Estos pesos están definidos a continuación.

Definición 3 (Los Pesos DeGroot). *Sea M una red ponderada y dirigida que es estocástica por filas. Supongamos que M es conexa y aperiódica. Definimos **los pesos de DeGroot de la influencia de red**, o simplemente **los pesos de DeGroot**, como el único eigenvector por la izquierda de la matriz M que corresponde al eigenvalor 1 y cuyas entradas han sido normalizadas a uno. Lo denoto por $\mathbf{w}$. En términos matemáticos, $\mathbf{w}$ es el único vector tal que*

$$\mathbf{w}M = \mathbf{w} \text{ con } \sum w_i = 1$$

Teorema 4 (DeGroot 1974). *Establecemos M como una red de trayectoria conexa, aperiódica, que es estocástica por filas. Para cualquier vector inicial de opiniones $\mathbf{p}^1 \in \mathbb{R}^N$ tenemos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M^t \mathbf{p} = p^* \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } p^* = \sum w_i p_i^1$$

De aquí obtengo que en el equilibrio:

$$a_i^* = b_i^* = \frac{w_i p_i^1 (1 - p_i^1)}{\sum_j w_j p_j^1 (1 - p_j^1)}$$

Es importante notar que el hecho que las opiniones converjan a un consenso en el largo plazo no es una característica del proceso de actualización miope. Los agentes racionales que comparten información tampoco pueden "ponerse de acuerdo en que no están de acuerdo", y necesariamente deben converger en una creencia posterior común en un número finito de pasos. DeMarzo, Vayanos y Zwiebels demuestran que individuos racionales en una red compartiendo sus posteriores que fueron derivados de unas creencias distribuidas a priori normalmente convergen en la creencia de consenso óptima bayesiana en N^2 pasos como máximo. Además, el trabajo de Acemoglu, Ozdaglar, y Ali Parandeh-Gheibi muestra que, incluso si la influencia de la red es estocástica, en el sentido de que depende de la probabilidad de que cada par de individuos hablen entre ellos y de la probabilidad de que se convengan el uno al otro, las opiniones a largo plazo convergen casi seguramente a un consenso, donde el valor esperado del consenso es la suma ponderada de las creencias iniciales calculadas utilizando los pesos de DeGroot del valor esperado de la red, aunque el valor realizado depende del patrón realizado de la influencia. En su modelo,¹⁷

---

¹⁷DeMarzo, Vayanos y Zwiebel (2003); Acemoglu, Ozdaglar y Parandeh-Gheibi (2010).

Cuando las probabilidades p_1 alcanzan un consenso, todos los votantes tienen la misma probabilidad de ser pivotaes, así que pudiera parecer que los votantes pivotaes no son importantes simplemente porque las opiniones convergen. Esto es una interpretación equivocada. Como muestro en la sección 3.5, la influencia de la red desplaza la probabilidad de ser pitoval incluso sin un consenso. El cambio en el objetivo del gasto de votantes pivotaes hacia votantes influyentes ocurre porque la red impide que los recursos sean dirigidos a votantes individuales. Cuando $T \rightarrow \infty$, los competidores no pueden cambiar independientemente la opinión de ningún votante sin cambiar la opinión de sus vecinos, porque sus opiniones se mezclan entre sí. Los competidores responden gastando para cambiar el consenso de DeGroot. La manera más efectiva de hacerlo es gastar en los votantes influyentes.

¿Existe una relación sistemática entre los votantes pivotaes y los votantes influyentes? Teóricamente estos dos conceptos son ortogonales. Uno siempre puede construir una red donde los votantes pivotaes y los votantes influyentes son los mismos, y uno puede construir una red donde los votantes influyentes y los votantes pivotaes son completamente diferentes. Esto es a consecuencia de la actualización lineal. Bajo la actualización lineal, la influencia de red es independiente de las opiniones, pero la probabilidad de ser pivotal depende de manera crucial de ellas. Esto es mostrado en el siguiente ejemplo.

3.4. Un ejemplo de un padre y su hijo.

Dos votantes, un padre y su hijo, tienen que escoger entre dos productos casi idénticos: A y B . La única diferencia entre los productos es que A es patrocinado por un personaje de caricatura. Inicialmente, el hijo está muy convencido de que A es mejor que B : $p_{hijo}^0 \approx 1$. El padre no comparte su opinión. Por simetría, asumimos $p_{padre}^0 = 1 - p_{hijo}^0 = 1 - p$.

Para decidir cuál producto van a escoger, el padre y el hijo van a realizar una votación. El producto B es el objeto de status quo. El producto A solamente es escogido si tanto el padre como el hijo votan por él. Supongamos que los competidores, las compañías A y B , tienen la misma cantidad de recursos para gastar en publicidad.

Debido a la regla de unanimidad, un votante es pivotal si y solo si el otro votante escoge A . Sin la influencia de la red, el padre será pivotal con probabilidad p y el hijo con probabilidad $1 - p$. Por lo tanto, es mucho más probable que el voto del padre sea decisivo para la elección. Las compañías reaccionan racionalmente dirigiendo muchos recursos al padre. En el equilibrio, ambas compañías gastan una fracción p de su presupuesto en persuadir al padre y una fracción $1 - p$ en persuadir al hijo.

En cambio, supongamos que antes de tomar la decisión, el padre y el hijo deliberan juntos. El padre, siendo democrático, siente que es importante darle el mismo peso a la opinión de su hijo que a la suya. El hijo, siendo infantil, presta muy poca atención a su padre. Él le asigna el peso $\xi/2 \approx 0$ a la opinión del padre y $1 - \xi/2$ a la propia.

La representación matricial de la red es

$$M = \begin{pmatrix} M_{padre,padre} & M_{padre,hijo} \\ M_{hijo,padre} & M_{hijo,hijo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\xi}{2} & 1 - \frac{\xi}{2} \end{pmatrix}$$

Los pesos de DeGroot correspondientes son

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_{padre} \\ w_{hijo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{1+\xi} \\ \frac{1}{1+\xi} \end{pmatrix}$$

Dado esto, si el padre y el hijo hablan durante suficiente tiempo, la opinión del hijo prevalecerá casi por completo. Sabiendo esto, las compañías gastarían una fracción mayor de sus recursos en el hijo: $1/(1+\xi) \approx 1$.

¿Cuál de los dos modelos es el correcto? Posiblemente los dos, ya que diferentes productos pueden tener diferentes niveles de comunicación. El padre puede no querer hablar con el hijo acerca de cuál es el tipo de ropa adecuado para jugar en la nieve. Por otro lado, la duración del viaje entre San Francisco y los Los Ángeles le dará suficiente tiempo al hijo para convencer al padre que deberían ir a Disneyland en vez del Museo de Arte Contemporáneo de Los Ángeles.

3.5. Resolviendo el modelo sin consenso: el modelo con ideología.

En esta sección agregaré ideología al modelo para mostrar que la convergencia en las probabilidades de votar no es crucial para hacer que la influencia de la red desplace el gasto hacia los votantes pivotaes. Establecemos $\theta_i \in [0, 1]$ como un parámetro de ideología para el votante i . Los votantes con un θ_i más cercano a 1 están más dispuestos a apoyar a A . Las ideologías son conocimiento común. Los votantes maximizan la siguiente función de utilidad.

$$U(\text{votar por } A) = u(p_i; \theta_i) - \eta_i$$

$$U(\text{votar por } B) = 0$$

Donde $u : [0, 1]^2 \rightarrow (0, 1)$ es una función continua que es estrictamente creciente en p_i y en θ_i . Con esta parametrización, la probabilidad de que el votante i escoja A es $u(p_i, \theta_i)$. Por ejemplo, u podría ser la siguiente función.

$$u(p_i; \theta_i) = \frac{p_i + \theta_i}{2}$$

Todo lo demás permanece sin cambios. Los competidores pueden gastar para cambiar p_i a través de la función de torneo y los votantes actualizan p_i a través de la red. La ideología es fija y no puede ser cambiada ni con gastos ni por las opiniones de otras personas.

En la interpretación de la información del modelo, θ_i representa preferencias mientras

p_i representa información. El supuesto implícito es que cuando los votantes interactúan a través de la red, son capaces de separar el contenido informativo de las opiniones del contenido ideológico.

En la interpretación de preferencias sociales del modelo, θ_i representa los aspectos privados de la elección, aquéllos que no pueden ser influenciados por otras personas, mientras que p_i representa las dimensiones sociales de la elección, aquellos aspectos que los votantes desean compartir con sus vecinos.

Con $T = \infty$, los equilibrios de estrategias puras con o sin ideología son idénticos. Esto ocurre porque los competidores no pueden cambiar la ideología de los votante, así que se enfocan en influenciar el consenso de DeGroot. Esto es explicado a detalle en el Comentario 1.

Comentario 1. En un equilibrio de estrategias puras con $T = \infty$, el competidor A maximiza $\sum w_i p_i^T$ mientras que el competidor B lo minimiza. *Para ver esto, noten que si todas probabilidades están entre cero y uno, la probabilidad de que el competidor A gane la elección es estrictamente creciente en p_i para todo i . Ahora tomemos p^* y p^{**} dos posibles valores para el consenso de DeGroot tales que $p^* > p^{**}$. Dado que la probabilidad de que el votante i escoja A aumenta estrictamente con p_i , la distribución de votos bajo un consenso de primer orden p^* domina estocásticamente la distribución bajo p^{**} . Por lo tanto, la probabilidad de que A gane es una transformación monótona del consenso de DeGroot y comparten maximizadores. De aquí se sigue que el único equilibrio en estrategias puras es el descrito en la Proposición 1.*¹⁸

---

¹⁸Este argumento solamente es verdadero para equilibrios en estrategias puras.

4. Probando el modelo con datos sobre contribuciones de grupos de presión en la Cámara de Representantes de los Estados Unidos.

Inclusive si la actualización lineal miope es un supuesto restrictivo, un proceso lineal puede ser una buena aproximación local a cualquier proceso de actualización suavizado. Para probar si el modelo es una aproximación suficientemente buena, lo aplico a los datos. Para hacerlo, usaré las contribuciones de campañas de los grupos de interés en la Cámara de Representantes de los Estados Unidos. Mi objetivo principal es probar la predicción más amplia del modelo: ¿es cierto que los grupos de interés gastan más en los legisladores que tienen más influencia en la red?

La estimación se realiza en tres pasos. Primero, construyo una medida de la influencia bilateral entre cada par de legisladores, el peso de los vínculos, y construyo una medida de la probabilidad de ser pivotal. Después mido la influencia fuerte de la red de cada legislador calculando su peso de DeGroot, y mido la influencia débil de la red calculando la suma ponderada de la probabilidad de sus vecinos de ser pivotaes. Finalmente, realizo una regresión de las contribuciones de campaña sobre la influencia de la red y sobre la probabilidad de ser pivotal para ver cuál es un mejor predictor. En la regresión incluiré controles para varias variables que pudieran sesgar mis resultados y utilizaré la estructura de panel de los datos para controlar por características no observables de los legisladores.

4.1. Los datos de contribuciones.

Como proxy del gasto en cabildeo, utilizo las contribuciones de campañas por Comités de Acción Política (*Political Action Committees*, PACs) reportados al Comité Federal de Elecciones de EEUU (*Federal Elections Committee*, FEC). Los datos abarcan desde 1990

hasta 2006 y están disponibles a través del *Center for Responsive Politics*.¹⁹ La unidad de observación en mis datos es las contribuciones totales de cada PAC a cada legislador durante un ciclo electoral dado.

Para realizar mi análisis, completé la base de datos de la FEC agregando un cero si un PAC no contribuyó a un legislador durante un año en el que el PAC estuvo activo.²⁰ Esto me permite observar soluciones de esquina en los datos, las cuales resultan ser un porcentaje significativo del total de contribuciones posibles. En promedio, cada PAC activo solamente hizo contribuciones a 8 por ciento de los legisladores en la cámara. Por lo tanto, las soluciones de esquina son una preocupación de primer orden que tengo que incluir en mi especificación.²¹

Por razones de computacionales, excluí los PACs que no contribuyeron a por lo menos 8 legisladores en por lo menos un año electoral. Esto corresponde a aproximadamente 50 % de los PACs en mi muestra, pero los PACs restantes dan alrededor de 95 por ciento de las contribuciones totales; por lo tanto, explicar su comportamiento explica la mayoría de las contribuciones en la Cámara. También decidí incluir solamente los PACs clasificados por la FEC como pertenecientes a empresas o sindicatos. Inicialmente había 7,171 PACs en mis datos, al final me quedé con 2,966 PACs, de los cuales 140 son PACs de sindicatos y 2,826 son PACs de empresas.

Generalmente se considera que los PACs hacen donaciones por dos razones: para influenciar la legislación y para ayudar a elegir y reeligir a legisladores específicos. Por consiguiente, las contribuciones de PAC no corresponden exactamente a los gastos en mi modelo. Esto no debería sesgar mis resultados porque es una fuente exógena de variación en la variable dependiente que no está correlacionada con las variables de gasto estratégico. En cambio, in-

---

¹⁹<http://www.opensecrets.org>

²⁰A veces también agregué ceros en un año cuando un PAC no contribuyó a ningún legislador. Esto lo hice cada vez que tuve tanto el año anterior, como el año posterior en los cuales el PAC fue activo. Esto me da una estructura de panel que no tiene espacios en blanco, aunque el panel permanece desbalanceado.

²¹El modelo excluyó soluciones de esquina asumiendo que el efecto marginal es muy grande cuando las contribuciones son pequeñas. Esto es conveniente para obtener soluciones analíticas, pero el modelo puede ser fácilmente modificado para permitir soluciones de esquina. Por ejemplo la función de torneo podría ser reemplazada por $p_i^1(a+1, b+1)$, entonces todavía tenemos una función aproximadamente libre de escala para gastos grandes, pero la opinión del legislador se vuelve indiferente a pequeños niveles de contribuciones.

crementaré los errores estándar en mi regresión, lo que hará más difícil probar si la influencia de la red es un predictor significativo.

Las contribuciones de PAC tienen otro problema: no son la única manera en la cual los grupos de interés gastan recursos. Los grupos de interés también pueden contratar a cabilderos de tiempo completo. Por ley, las empresas y sindicatos deben hacer pública la información de cuánto gastan en cabilderos profesionales, pero no tienen que revelar sobre cuáles proyectos de ley o hacia cuáles legisladores enfocan sus esfuerzos. Por lo tanto, no puedo usar estos datos para medir a dónde se dirigen sus esfuerzos.

Esto es importante porque las predicciones del modelo se refieren al total de recursos que se gasta en convencer a un legislador, tanto contribuciones a través de PAC, como a través de cabilderos. Sin embargo, siempre y cuando estos gastos estén positivamente correlacionados, las contribuciones de PAC funcionan como un *proxy* del total de gastos.

Cabe mencionar que representantes también reciben contribuciones de votantes individuales y que el total de estas contribuciones es mucho más grande que el total donado por los PACs. Las contribuciones de PAC representan aproximadamente 30 % del total de contribuciones, mientras que las contribuciones de individuos representan el otro 70 %. Puesto que las contribuciones de cada individuo representan una fracción mucho más pequeña del total de contribuciones, asumo que sus gastos no son estratégicos y que por tanto son ortogonales al gasto de los PACs.

En cada ciclo electoral, se votan muchos proyectos de ley. Para la estimación interpreto que cada proyecto de ley corresponde a una realización independiente de mi modelo, con un par de PACs que gasta de acuerdo las predicciones del modelo.

Inclusive si hay muchos PACs cabildeando sobre el mismo proyecto de ley, una vez que se fija el contenido de la iniciativa, solamente hay dos posiciones: o se vota a favor o se está en contra de la iniciativa. Por lo tanto, las PACs que gastan de una manera descentralizada deberían gastar como en mi modelo.

Pero, ¿es verdad que los PACs opuestos dan contribuciones a los mismos legisladores? ¿Es

verdad que incluso dan contribuciones a legisladores que tienen puntos de vista opuestos? Desafortunadamente, no puedo observar esto directamente en los datos, porque la base no registra qué proyectos de ley afectaban a los PACs. Hay evidencia indirecta de que algunos PACs gastan de manera muy amplia dentro del espectro político. En el ciclo electoral del año 2006, el PAC que más contribuyó fue la Asociación Nacional de Agentes de Bienes Raíces (*National Association of Realtors*) que dio 49 % de sus contribuciones a los candidatos demócratas y 51 % a los candidatos republicanos. La investigación sobre cabildeo contrarrestante también ha encontrado evidencia que cabildos con intereses opuestos dedican más tiempo sobre los mismos los legisladores.²²

4.2. Estimación de la influencia de red.

Para construir la red utilizo los datos sobre el copatrocinio de proyectos de ley en el Congreso de los Estados Unidos.²³ Los datos contienen todos los proyectos, resoluciones y enmiendas votadas entre 1972 y 2006, del Congreso 93 al Congreso 109.

Cada vez que un proyecto es presentado en el Congreso, debe tener un legislador que la patrocina, pero los demás legisladores pueden suscribirse como copatrocinadores. Utilizaré la frecuencia de copatrocinio como un *proxy* de influencia bilateral. Es decir, cada vez que el legislador j copatrocina uno de los proyectos del legislador i , interpreto que i tiene algo de influencia sobre j . Estos datos son muy convenientes porque tienen una dirección de influencia (del copatrocinador al patrocinador) y porque los legisladores copatrocinan entre ellos muchas veces durante la misma legislatura y en legislaturas distintas. Esto me permite construir un peso para cada vínculo.

Para construir la red para el año electoral t , tomo cada par de legisladores i, j que trabajaron en el año t y mido el peso que j pone en la opinión de i contando el número de veces que j copatrocinó un proyecto patrocinado por i en cualquier congreso donde los dos trabajaron juntos antes de, e incluyendo, el año t . Hago lo correspondiente para medir el

---

²²Austen-Smith y Wright (1996, 1994).

²³Los datos fueron recolectados y hechos públicos por Fowler (2006*a,b*).

peso que i pone sobre j .

Después de contar todos los copatrocinios, divido los copatrocinios de j a i entre el número total de las veces que j copatrocinó con alguien más. Esto garantiza que la matriz sea estocástica por filas. La influencia de i sobre j es entonces la frecuencia con la cual j copatrocina los proyectos de i relativo a qué tan frecuentemente j copatrocina con alguien más. Los legisladores se hacen más influyentes a medida que obtienen más copatrocinadores de sus proyectos, excepto si esos legisladores también copatrocinan muchos otros proyectos.

Los vínculos en la red se acumulan a lo largo del tiempo para los legisladores que permanecen en el Congreso. Esto sesga fuertemente los pesos de DeGroot a favor de legisladores que llevan más tiempo en el Congreso, pero lo soluciono en la regresión incluyendo una variable de antigüedad.

Un problema con los datos es que algunos proyectos son copatrocinados por casi todos los miembros la Cámara. (Otros son copatrocinados por un número cercano a la mitad más uno.) Esto probablemente tiene que ver con el contenido de la ley y no con la influencia del legislador patrocinador. Además, estos proyectos son atípicos. La gran mayoría de los proyectos de ley tienen menos de dos copatrocinadores. Cuando se analiza la distribución de proyectos de ley por número de coautores, ésta parece tener una caída exponencial con un pico en la mitad más uno de la cámara. Estos proyectos de ley probablemente son pronunciamientos públicos hechas por el partido dominante.

Para corregir esto hago dos cosas: en primer lugar excluyo los proyectos que fueron copatrocinados por más de la mitad de la Cámara. Esto excluye aproximadamente 10% de los proyectos. En segundo lugar, reduzco el peso de los vínculos entre copatrocinadores y patrocinadores por el número de copatrocinadores de cada proyecto. Si j copatrocinó el proyecto de i junto con otros 9 legisladores, asigno un peso de $1/10$ de j a i . Correr la regresión sin estos ajustes arroja coeficientes similares pero errores estándar más altos.

Puesto que no observo cuánto peso los legisladores le ponen a su propia opinión, necesito hacer algunos supuestos para identificar los pesos de DeGroot. Para ello asumo que todos

legisladores ponen el mismo peso a su opinión. Una vez que asumo esto, no importa cuál valor escojo, porque los pesos de DeGroot serán los mismos.²⁴

4.3. La estimación de la probabilidad de ser pivotal.

Para poder comparar mi modelo con los modelos anteriores de gasto estratégico, incluyo una medida de pivotalidad en las regresión. Esto me permite comparar qué modelo tiene más poder predictivo. Para medir la probabilidad de ser pivotal, para cada legislador necesito estimar la probabilidad que hubiera sido pivotal en cada proyecto votado en la legislatura. Ya que no puedo sé cuál proyecto de ley afectaba a los PACs que estuvieron activos, promedio estas probabilidades de pivotalidad entre todos los proyectos de la misma legislatura para medir al *pivotalidad promedio* del legislador. Este proceso generará un sesgo de atenuación en el coeficiente de pivotalidad de mi regresión, así que mis resultados tendrán que ser interpretados como una cota inferior del poder predictivo de los modelos anteriores. Desafortunadamente no hay una solución obvia para este problema.

Como solamente se puede observar una realización de los votos sobre cada proyecto de ley, es imposible estimar la probabilidad de ser pivotal sin algunos supuestos. En principio podríamos utilizar los votos realizados sobre todas las leyes para estimar la probabilidad *promedio* de un legislador. Desafortunadamente, las leyes casi nunca son aprobados por s'olo voto único, así así que la estimación dependería de un número absurdamente bajo de observaciones. Dado el número de legisladores en el Congreso de los Estados Unidos, la probabilidad de observar un voto pivotal es necesariamente baja.²⁵

Para solucionar este problema corro una simulación de los votos sobre cada proyecto

---

²⁴Para ver esto, tomemos $\alpha > 0$ como el peso que cada legislador pone en sí mismo y sea M , la matriz asociada a la red cuya diagonal principal es cero y cuyas filas suman a uno. La red verdadera sería $\alpha I + (1 - \alpha)M$. Entonces, eigenvector izquierdo más grande de $\alpha I + (1 - \alpha)M$ también es el eigenvector izquierdo más grande de M .

²⁵En la simulación que describo más abajo, aproximadamente 75 % de los proyectos no tuvieron ni un voto pivotal después de 5,000 votos simulados. Otro 12 % de proyectos tuvieron una probabilidad más pequeña de 0.001 de tener un voto pivotal, lo que no sirve para diferenciar la pivotalidad entre legisladores. Solamente 13 % de los proyectos en la muestra tuvieron una probabilidad significativa de ser aprobados o no aprobados por un voto pivotal. Para estos proyectos la probabilidad promedio de un voto pivotal fue 0.057.

de ley usando las puntuaciones *dw-nominate*, un modelo canónico en ciencia política. Dicho modelo proporciona una teoría parsimoniosa para racionalizar los votos de los legisladores en el Congreso.²⁶ Los supuestos estructurales en la teoría me permiten calcular la probabilidad *ex-ante* de que cada legislador hubiese votado a favor o en contra de cada proyecto de ley. Con estas probabilidades de voto simulo una votación sobre cada propuesta miles de veces utilizando realizaciones independientes.²⁷ Así puedo estimar qué tan frecuentemente un legislador hubiera sido pivotal. Después de esto promedíé las probabilidades de ser pivotal entre todos los proyectos para medir la probabilidad promedio de ser pivotal para cada legislador en cada año electoral.

Para calcular el *pivotalidad del vecino* en la regresión, para cada legislador hice un promedio ponderado de la probabilidad de sus vecinos de ser pivotaes en un año electoral. Consistente con el modelo, los pesos son dados por la fuerza del vínculo entre el copatrocinador y los legisladores patrocinadores.

Como se señaló antes, la teoría no hace ninguna predicción sobre la relación entre las probabilidades de ser pivotal y los pesos DeGroot. Empíricamente, la probabilidad de ser pivotal no está correlacionada con los pesos de DeGroot. La correlación es 0.04. La correlación entre la probabilidad de ser pivotal de un legislador y la probabilidad de sus vecinos de ser pivotaes tampoco es muy fuerte: 0.1.

4.4. La especificación.

Las soluciones de esquina son una preocupación de primer orden para describir los datos. El PAC promedio solamente dio contribuciones a 8 por ciento de los legisladores en la Cámara. Los PACs gastan en los votantes influyentes cuando su estrategia de optimización los lleva a igualar el beneficio marginal con el costo marginal de gastar en cada legislador. Esto no aplica para las soluciones de esquina. Supongamos que para una estrategia de gasto

---

²⁶Ver ‘www.voteview.com’ para más información.

²⁷Primero corrí una simulación de 5,000 votos y eliminé 87 por ciento de los proyectos de ley que no mostraron una probabilidad significativa de tener un voto pivotal. Después corrí 100,000 simulaciones con los proyectos de ley restantes.

dada, el legislador i tiene una influencia más grande que el legislador j relativo a sus costos marginales. En una situación así, los grupos de presión desearían reasignar los recursos en el margen, disminuyendo las contribuciones del legislador j para incrementar las contribuciones al legislador i . Pero, si los PACs están gastando cero en j , no hay nada para reasignar y la diferencia en el beneficio marginal no se traduce en una reasignación en las contribuciones.

Por lo tanto, la teoría predice una relación muy diferente entre la influencia de la red y las contribuciones de campañas dependiendo de si los PACs donan una cantidad positiva o no. Lo mismo aplica para probabilidad de ser pivotal. Correr una especificación lineal no capturaría esto.²⁸ Para corregir este problema, correré un modelo de regresión censurada a través de una especificación tobit.

Una segunda preocupación importante es que las características no observadas de los legisladores podrían sesgar mis estimaciones de la influencia de la red y la probabilidad de ser pivotal. Por ejemplo, asumamos que cada legislador tiene una habilidad no observada de recaudar recursos que está correlacionada con su habilidad de obtener copatrocinadores. Los pesos de DeGroot serían un *proxy* para *persuasividad* de un legislador, en vez de medir el efecto de la posición del legislador en la red.

Para controlar por esto, me enfocaré en una regresión con efectos aleatorios para cada legislador. Esta especificación explota el hecho que en los datos observo al mismo legislador múltiples veces durante distintos años electorales. Asumiendo que la persuasividad es una característica intrínseca de cada legislador y por tanto es constante de un año electoral al otro, los efectos aleatorios controlan por dicho sesgo. La identificación del efecto de la influencia de la red proviene de comparar los cambios en la influencia de un año al otro, con los cambios en las contribuciones de campañas.²⁹

Es importante notar que las características no observadas solamente sesgarán mis resulta-

---

²⁸Los datos también tienen una segunda fuente de censura, porque por ley los PACs no pueden dar más de 10,000 dólares a un legislador durante un año electoral dado. Esta fuente de censura es mucho menos importante que la primera. Solamente afecta 0.3 por ciento de las contribuciones en mi muestra.

²⁹La regresión también incluye antigüedad y antigüedad al cuadrado, que permite controlar por tendencias cuadráticas en el tiempo.

dos si están correlacionadas con mis variables de interés. Para controlar por ellas, utilizaré un estimador de efectos aleatorios estilo Chamberlain. Establecemos α_i como un intercepto para cada legislador. Para poder permanecer dentro del marco tobit, asumo que los interceptos están distribuidos Normal, pero les permito estar correlacionados con la media de las variables explicativas.

$$\alpha_i = \gamma_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{X}}_i + \nu_i$$

Donde $\bar{X}$ es el promedio por legislador de las variables explicativas y ν_i es i.i.d. $Normal(0, \sigma_\alpha)$.

La especificación es la siguiente. Para un PAC k , un legislador i y un año electoral t , hay una variable latente para las contribuciones denotada por $y_{k,i,t}^*$ con la siguiente especificación:

$$\begin{aligned} y_{k,i,t}^* &= \alpha_i + \beta_1 DeGroot_{i,t} + \beta_2 Pivotalidad_{i,t} + \beta_3 PivotVecino_{i,t} + \beta_{\tilde{\mathbf{X}}} \tilde{\mathbf{X}}_{i,t} + e_{k,i,t}. \\ &= \beta_1 DeGroot_{i,t} + \beta_2 Pivotalidad_{i,t} + \beta_3 PivotVecino_{i,t} + \beta_{\tilde{\mathbf{X}}} \tilde{\mathbf{X}}_{i,t} + \gamma_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{X}}_i + \nu_i + e_{k,i,t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Asumo que los errores $e_{i,t,l}$ tienen media igual a cero y son i.i.d. Normales entre legisladores, pero permitiré una correlación de los errores para de las observaciones del mismo legislador utilizando errores estándar aglomerados. La matriz $\tilde{X}_{i,t}$ es un grupo de controles que incluye las siguientes variables:

1. **Antigüedad y antigüedad al cuadrado.** Medidas a partir de la primera vez que un legislador entró a la Cámara.³⁰ Es particularmente importante controlar por antigüedad porque la medida de la influencia de la red se acumula en el tiempo, así que la influencia de la red está fuertemente correlacionada con la antigüedad.
2. **Dummies de liderazgo.** Incluyo *dummies* para el Presidente de la Cámara, los coordinadores y vice-coordinadores de bancada para el partido en la mayoría y el partido en la minoría.

---

³⁰Esto es casi idéntico al número de años que un legislador ha trabajado. En general, los legisladores dejan el Congreso solamente una vez.

3. **Dummies de comités.** Incluyo *dummies* para los miembros de comités influyentes: el Comité de Egresos (Appropriations); el Comité de Ingresos (Ways and Means); el Comité de Energia y Comercio; y, el Comité de Banca y Finanzas.
4. **Dummy de mayoría.** El trabajo previo de Cox y Magar encontr'o que estar en el partido mayoritario es un predictor significativo de las contribuciones de campañas. Como también está significativamente correlacionado con la probabilidad de ser pivotal, necesario incluir este control en la regresión.³¹
5. **Partido.** Cuando los PACs gastan para que los legisladores sean reelectos, los Republicanos y los Demócratas reciben financiamiento de diferentes fuentes. Agrego este *dummy* para reducir el ruido en los datos.
6. **Distancia ideológica al centro.** Medida por el valor absoluto de la primera dimensión de la puntuación *dw-nominate*. Puesto que los legisladores con ideologías más extremas son más difíciles de convencer, esta medida podría ser un buen *proxy* para la heterogeneidad en el costo marginal de un legislador. También la incluyo para evitar la posibilidad de que la probabilidad de ser pivotal o la influencia de la red influyan actúe como un *proxy* para la moderación ideológica.
7. **Dummies de año electoral.** Mi modelo no predice la cantidad total que los PACs gastarían, solamente la cantidad relativa destinada a cada legislador. En los datos observo mucha variación en las contribuciones entre un año y otro. La desviación estándar promedio entre años para cada legislador es 35 por ciento de las contribuciones promedio. Agregar los *dummies* ayuda a reducir el ruido ocasionado por estas variaciones.

Como investigador externo, no observo y^* , sólo observo las contribuciones censuradas y . Es decir, observo

$$y_{k,i,t} = \max\{0, \min\{y_{k,i,t}^*, \bar{y}_t\}\}$$

---

³¹Ver Cox y Magar (1999).

Donde $\bar{y}_t$ es el límite de contribución por PAC para el año electoral t expresado en dólares reales.

Los pesos de DeGroot de un legislador cambian en el tiempo por dos razones: los legisladores patrocinan y copatrocinan nuevos proyectos, y los copatrocinadores previos de un legislador dado pueden ser removidos de la Cámara. Ya que los legisladores obtienen un peso de DeGroot más alto si sus copatrocinadores tienen un peso de DeGroot alto, la influencia de un legislador se reduce significativamente cuando un copatrocinador influyente se va. Por ejemplo, durante el año 1994, cuando los Republicanos se apoderaron del Congreso, el Demócrata Richard Gephardt perdió 28 % de su influencia DeGroot, cayendo 16 puestos en la clasificación de legisladores con más influencia de DeGroot. (también dejó de ser el coordinador de la bancada de la mayoría.)

Las probabilidades de ser pivotal también cambian de un año al otro. Esto ocurre porque la composición de la cámara cambia y porque diferentes proyectos son incluidos en la agenda. Durante el arrebato Republicano de 1994, los Demócratas disminuyeron drásticamente su probabilidad de ser pivotaes.

4.5. Los resultados de la regresión.

El Cuadro 1 presenta los resultados. Después de controlar por posibles fuentes de sesgo, tanto los pesos de DeGroot, como las probabilidades de ser pivotal son predictores estadísticamente significativos de las contribuciones de campañas. (Respectivamente, $p = 0.03$ y $p = 0.00$.) La probabilidad de los vecinos de ser pivotaes no es un predictor estadísticamente significativo. También tiene el signo equivocado, pero la magnitud no es sustancialmente significativa: 1 % de las contribuciones de campañas promedio vs. 17 % debido a pivotalidad.

Como se puede observar al comparar las columnas (2) y (4), el canal más importante por el cual los pesos de DeGroot influyen en las contribuciones de campañas es a través de incrementar el número de los PACs que contribuyen, en vez de incrementar las contribuciones de los PACs que ya están donando. Puesto que $E(y|\mathbf{X}) = Prob(y > 0|\mathbf{X}) \cdot E(y|y > 0, \mathbf{X})$, el

incremento porcentual en las contribuciones de campañas equivale al incremento porcentual de las contribuciones de campañas de aquellos PACs que ya están donando más el incremento porcentual en el número de PACs que donan. El incrementar los pesos DeGroot en una unidad incrementa las contribuciones de campañas del legislador promedio en 27 % pero solamente incrementa las contribuciones de PACs que ya estaban donando en 4.3 %. Incorporar las soluciones de esquina en la regresión es crucial para distinguir entre estos efectos.

Puesto que las unidades de los pesos de DeGroot son difíciles de comparar con otras variables, calculo el efecto de incrementar cada variable en una desviación estándar (Cuadro 2.) Esto da una noción del poder predictivo de cada variable. Mi especificación predice que tal incremento en el peso de DeGroot de un legislador está asociado con un incremento de aproximadamente 26,000 dólares, o 6 % de las contribuciones de campañas promedio en mi muestra.

En unidades de desviación estándar, el coeficiente de los pesos DeGroot no es estadísticamente diferente del efecto de convertirse en el Presidente de la Cámara (11 %). El efecto directo de convertirse en el Presidente es enorme (¡921,000 dólares!) pero como esto necesariamente le ocurre a muy pocos legisladores, no sirve para explicar mucha de la variación en los datos. Incrementar los pesos de DeGroot también tiene un efecto más grande que convertirse en el coordinador de la bancada mayoritaria (3 %) o que ingresar al poderoso Comité de Ingresos (3 %), aunque no puedo rechazar estadísticamente que estas magnitudes sean iguales.

La probabilidad de ser pivotal tiene un efecto más grande por unidad de desviación estándar (9 % vs 6 %) pero la diferencia no es estadísticamente significativa. Ambas variables pueden ser significativas porque diferentes proyectos pueden tener diferentes niveles de consulta entre los legisladores. Cuando los legisladores se influyen mucho el uno al otro, la influencia de la red tiene más importancia. Cuando los legisladores votan independientemente, los legisladores pivotaes son los más importantes.

Los resultados son sugestivos acerca del papel de las redes informales para conceder

influencia en el congreso. La influencia de la red parece traducirse en contribuciones de campañas más grandes. Desafortunadamente, la causalidad inversa no puede ser descartada, puesto que los legisladores que son mejores recaudadores de fondos podrían utilizar sus conexiones con los PACs para desarrollar relaciones con otros legisladores. Se necesita de más trabajo para desentrañar estos efectos.

5. Conclusión

Propuse un modelo de gasto estratégica a través de redes sociales. Este es uno de los primeros modelos que analizan el papel de las redes sociales sobre las competencias electorales. Mi modelo es manejable y me permite calcular los gastos de equilibrio.

Encuentro que, en equilibrio, el gasto sobre cada votante es proporcional a su influencia en la red. Esto contrasta con la investigación anterior de gasto estratégico que había encontrado que los gastos de equilibrio se dirigen a los votantes que tienen una probabilidad más alta de ser pivotaes para el resultado de una elección.

La influencia de red desplaza la probabilidad de ser pivotal porque los efectos de la red impiden que se pueda convencer a los votantes por separado. Cuando los efectos de red son muy fuertes, se vuelve imposible convencer a un votante sin también cambiar convencer a sus vecinos. Los competidores reaccionan gastando en votantes con posiciones influyentes en la red.

El modelo predice que para medir la influencia de red es necesario usar una medida de eigenvector: los pesos de DeGroot. Las medidas basadas en eigenvectores son autorreferentes: los individuos son influyentes si tienen influencia sobre individuos influyentes. Por lo tanto, esta medida destaca la calidad, y no la cantidad, de las conexiones.

Para campañas políticas, el modelo propone una manera de procesar la información altamente detallada que se está generando sobre las redes sociales. En vez de gastar como tradicionalmente se ha venido haciendo, el modelo sugiere que las campañas políticas de-

berían prestar atención a la estructura de las redes sociales para identificar quién tiene un peso de DeGroot alto.

Para probar empíricamente las implicaciones de mi modelo, utilicé datos sobre contribuciones de campaña hechas por Comités de Acción Política (PACs) en la Cámara de Representantes de EEUU. Después de controlar por varias variables que podrían sesgar mis resultados, encuentro que los PACs gastan más en legisladores que tienen más influencia de red.

Mi regresión predice que si aumentamos la influencia de red del legislador promedio en una desviación estándar, sus contribuciones aumentarían en 26,000 dólares ($p = 0.03$). Esta cantidad corresponde a 6 % del promedio de contribuciones de campañas. La regresión predice que un incremento similar la pivotalidad del mismo legislador incrementaría sus contribuciones en 39,000 dólares (9 % del promedio, $p = 0.00$). La diferencia no es estadísticamente significativa.

Referencias

- Acemoglu, Daron, Asuman Ozdaglar y Ali Parandeh-Gheibi.** 2010. "Spread of (mis)information in social networks." *Games and Economic Behavior*.
- Austen-Smith, David y John R. Wright.** 1994. "The counteracting lobbying." *American Journal of Political Science*, 25-44.
- Austen-Smith, David y John R. Wright.** 1996. "Theory and evidence for counteractive lobbying." *American Journal of Political Science*, 543-564.
- Ballester, Coralio, Toni Calvó-Armengol, y Yves Zenou.** 2006. "Who's who in networks: wanted: the key player." *Econometrica*, 74: 1403-1417.
- Bonacich, Phillip.** 1987. "Power and Centrality: A Family of Measures." *The American Journal of Sociology*, 92(5): 1170-1182.
- Bonacich, Phillip, y Paulette Lloyd.** 2001. "Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations." *Social Networks*, 23(3): 191-201.
- Bramoullé, Yann, Rachel Kranton, y Martin D'Amours.** 2010. "Strategic Interactions and Networks." <http://econ.duke.edu/rek8/strategicinteractionandnetworksfinal.pdf>.
- Cox, Gary W., y Eric Magar.** 1999. "How Much is Majority Status in the US Congress Worth?" *The American Political Science Review*, 93(2): 299-309.
- DeGroot, Morris H.** 1974. "Reaching a Consensus." *Journal of the American Statistical Association*, 69(345): 118-121.
- DeMarzo, Peter M., Dmitri Vayanos, y Jeffrey Zwiebel.** 2003. "Persuasion Bias, Social Influence, and Unidimensional Opinions." *The Quarterly Journal of Economics*, 118(3): 909-968.
- Fowler, James H.** 2006a. "Connecting the Congress: A Study of Cosponsorship Networks." *Political Analysis*, 456-487.
- Fowler, James H.** 2006b. "Legislative Cosponsorship Networks in the U.S. House and Senate." *Social Networks*, 28(4): 454-465.
- French, John R.P.** 1956. "A formal theory of social power." *Psychological Review*,

63(3): 181-194.

Galeotti, Andrea, y Andrea Mattozzi. De Próxima Publicación. "Personal Influence: Social Context and Political Competition." *American Economic Journal: Microeconomics*.

Golub, Benjamin, y Matthew O. Jackson. 2010a. "How Homophily Affects the Speed of Contagion, Best Response and Learning Dynamics." <http://www.stanford.edu/jacksonm/homophily.pdf>.

Golub, Benjamin, y Matthew O. Jackson. 2010b. "Naïve learning in social networks: Convergence, influence, and the wisdom of crowds." *American Economic Journal: Microeconomics*.

Gomez, Brad T., Thomas G. Hansford, y George A. Krause. 2008. "The Republicans Should Pray for Rain: Weather, Turnout, and Voting in US Presidential Elections." *The Journal of Politics*, 69(03): 649-663.

Gröenert, Valeska. 2009. "Lobbying in a Network." http://pareto.uab.es/vgroenert/files/LIN_October%202009.pdf.

Harary, Frank. 1959. "Status and contrastatus." *Sociometry*, 22: 23-43.

Hirshleifer, Jack. 1991. "The technology of conflict as an economic activity." *The American Economic Review*, 81(2): 130-134.

Jackson, Matthew O. 2008. *Social and Economic Networks*. Princeton, N.J.:Princeton University Press.

Lever, Carlos R. 2010. "Evidence of Strategic Lobbying in the US. House of Representatives." *Documento no publicado*.

Mas-Colell, Andreu, Michael Whinston, y Jerry Green. 1995. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.

Merolla, Jennifer, Michael C.Munger, y Michael Tofias. 2005. "Lotto, Blotto or Fortrunner: US presidential elections and the nature of Mistakes." *Public Choice*, 123: 19-37.

Porter, Mason A., Peter J. Mucha, Mark E.J. Newman, y A.J. Friend. 2007.

"Community structure in the United States House of Representatives." *Physica: Statistical Mechanics and its Applications*, 386(1): 414-438.

Roberson, Brian. 2006. "The colonel blotto game." *Economic Theory*, 29(1): 1-24.

Shubik, Martin, y Robert J. Weber. 1981. "Systems Defense Games: Colonel Blotto, Command and Control." *Naval Research Logistics Quarterly*, 28, 2: 281-287.

Siegel, Ron. 2009. "All-pay contests." *Econometrica*, 77(1): 71-92.

Siegel, Ron. De próxima publicación. "Assymetric Contests with Conditional Investments." *American Economic Review*.

Skaperdas, Stergios. 1992. "Cooperation, conflict, and power in the absence of property rights." *The American Economic Review*, 82(4): 720-739.

Skaperdas, Stergios. 1996. "Contest Success Functions." *Economic Theory*, 7(2): 283-290.

Snyder, James M. 1989. "Election goals and the allocation of campaign resources." *Econometrica*, 637-660.

Voteview website, UCSD. 2009. *www.voteview.com*, (accesado en agosto 2009).

Wasserman, Stanley, y Katherine Faust. 1994. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press.

Estimación tobit de efectos aleatorios sobre las contribuciones de los PACs.

Efectos marginales en la media.

VARIABLES	(1) MFX on $E(y)$	(2) As % of $E(y)$	(3) MFX on $E(y y > 0)$	(4) Como % de $E(y y > 0)$
Probabilidad de ser pivotal (Multiplicado por 100)	71 000*** (19 000)	17 % (4,6 %)	135 000*** (35 000)	2,7 % (0,7 %)
Pivotalidad de los vecinos (Multiplicado por 100)	-1 500 (1 600)	-0,4 % (0,4 %)	-3 000 (3 000)	-0,07 % (0,07 %)
Pesos de DeGroot (Multiplicado por 100)	112 000** (52 000)	27 % (12,7 %)	211 000** (98 000)	4,3 % (2,0 %)
Distancia DW- <i>Nominate1</i> (Valor abs)	-474 000*** (139 000)	-115 % (33,8 %)	-899 000*** (262 000)	-18,3 % (5,3 %)
<i>Dummy</i> de Mayoría	38 000*** (11 000)	9 % (2,7 %)	71 000*** (22 000)	1,4 % (0,4 %)
<i>Dummy</i> de Partido (Republicano=1)	-26 000 (75 000)	-6 % (18,3 %)	-49 000 (142 000)	-1,0 % (2,9 %)
Antigüedad (Incluyendo antigüedad al cuadrado)	-7 000* (4 000)	-2 % (1 %)	-13 000* (7 000)	-0,3 % (0,1 %)
Presidente de la Cámara	921 000*** (139 000)	224 % (33,8 %)	1 210 000*** (142 000)	24,6 % (2,9 %)
Coordinador de la Mayoría	291 000*** (113 000)	70,1 % (27,5 %)	468 000*** (159 000)	9,5 % (3,2 %)
Coordinador de la Minoría	384 000*** (67 000)	93,5 % (16,3 %)	595 000*** (88 000)	12,1 % (1,8 %)
Vice-coordinador de la Mayoría	280 000*** (68 000)	68,2 % (16,6 %)	453 000*** (96 000)	9,2 % (2,0 %)
Vice-coordinador de la Minoría	275 000*** (55 000)	70 % (13,4 %)	446 000*** (78 000)	9,1 % (1,6 %)
Comité de Egresos (Appropriations)	30 000 (21 000)	7 % (5,1 %)	56 000 (38 000)	1,1 % (0,8 %)
Comité de Ingresos (Ways and Means)	183 000*** (36 000)	45 % (8,8 %)	315 000*** (56 000)	6,4 % (1,1 %)
Comité de Energia y Comercio	71 000*** (24 000)	17 % (5,8 %)	129 000*** (42 000)	2,6 % (0,9 %)
Comité de Banca y Finanzas	47 000** (23 000)	11 % (5,6 %)	87 000** (41 000)	1,8 % (0,8 %)
Observaciones	7,166,690	7,166,690	7,166,690	7,166,690

Errores estándar aglomerados entre paréntesis.

*** p<0.01 ** p<0.05 * p<0.1

Efectos marginales por unidad de desviación estándar.

VARIABLES	(1) MFX por desv.est. sobre $E(y)$	(2) Como % de $E(y)$	(3) MFX por desv. est sobre $E(y y > 0)$	(4) Como % de $E(y y > 0)$
Pesos de DeGroot (Veces 100)	26 000 (12 000)	6 % (2,9 %)	50 000 (23 000)	1,0 % (0,5 %)
Probabilidad de ser pivotal (Veces 100)	39 000 (10 000)	9 % (2,4 %)	74 000 (19 000)	1,5 % (0,4 %)
DW- <i>Nominate1</i> (Valor abs)	-81 000 (24 000)	-20 % (5,8 %)	-153 000 (45 000)	-3,1 % (0,9 %)
<i>Dummy</i> de Mayoría	19 000 (5 000)	5 % (1,2 %)	35 000 (11 000)	0,7 % (0,2 %)
Presidente de la Cámara	45 000 (7 000)	11 % (1,7 %)	59 000 (7 000)	1,2 % (0,1 %)
Coordinador de la Mayoría	14 000 (6 000)	3 % (1,5 %)	23 000 (8 000)	0,5 % (0,2 %)
Comité de Ingresos	13 000 (2 000)	3 % (0,6 %)	23 000 (4 000)	0,5 % (0,1 %)
Observaciones	7,166,690	7,166,690	7,166,690	7,166,690

Errores estándar aglomerados entre paréntesis.

Apéndice A. Demostración para la Proposición 1.

Demostración. Esta demostración es una adaptación de la demostración de Shubik y Weber.

Primero demuestro que un equilibrio en estrategias puras debe estar en el interior. Lo hago por la contrapositiva. Supongamos que $b_i = 0$. Entonces A puede gastar una cantidad arbitrariamente pequeña en i para obtener $p_i^1 = 1$. Puesto que $p_j^1(\cdot, b_j)$ es continuo para $a_j > 0$ y A debe estar gastando en algún lugar, A puede reducir p_j^1 para alguna j en una cantidad arbitrariamente pequeña para hacer $p_i^1 = 1$. Esto incrementa π en una cantidad discreta. Ya que esto es verdadero para un cambio arbitrariamente pequeño en a_j , el competidor A no tiene una mejor-respuesta y las estrategias no pueden constituir un equilibrio.

Ahora muestro que los competidores gastan el mismo porcentaje en cada votante. De las Condiciones de Primer Orden (CPOs) para A , obtengo

$$\frac{\partial p_i^1 / \partial a_i}{\partial p_j^1 / \partial a_j} = \frac{\partial \pi / \partial p_j^1}{\partial \pi / \partial p_i^1}$$

El hecho de que p_j^T esté estrictamente entre 0 y 1 para todos los j y que $\partial p_j^T / \partial p_j^1$ sea estrictamente positivo, garantiza que $\partial \pi / \partial p_i^1$ es positivo y que la expresión anterior tiene sentido.

De las CPOs para B obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^1 / \partial b_i}{\partial p_j^1 / \partial b_j} &= \frac{\partial \pi / \partial p_j^1}{\partial \pi / \partial p_i^1} \\ \Rightarrow \frac{\partial p_i^1 / \partial a_i}{\partial p_i^1 / \partial b_i} &= \frac{\partial p_j^1 / \partial a_j}{\partial p_j^1 / \partial b_j}; \forall i, j \end{aligned}$$

Por otro lado, por la homogeneidad de p^1 aplico la ley de Euler para obtener

$$\begin{aligned} a_i \frac{\partial p_i^1}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial p_i^1}{\partial b_i} &= 0 \\ -\frac{\partial p_i^1 / \partial a_i}{\partial p_i^1 / \partial b_i} &= \frac{b_i}{a_i} \end{aligned}$$

De las CPOs sabemos que el lado izquierdo debe ser constante entre i . Por lo tanto a_i/b_i debe ser constante para todos votantes. Esto significa que tanto A como B deben estar gastando la misma fracción de sus recursos en cada votante: $a_i^* = b_i^*$.

Ahora necesitamos calcular cuál es este porcentaje. Para encontrarlo primero hago algunas manipulaciones en $(\partial p_i^1 / \partial a_i)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^1}{\partial a_i}(a_i^* R_A, b_i^* R_B) &= \frac{\partial p_i^1}{\partial a_i}(b_i^* R_A, b_i^* R_B) && \text{(Insertando en } b^*) \\ &= \frac{1}{b_i^*} \frac{\partial p_i^1}{\partial a_i}(R_A, R_B) \Big|_{a_i=1} && \text{(Por homogeneidad de grado -1)} \\ &= \frac{\gamma}{b_i^*} p_i^1(R_A, R_B) (1 - p_i^1(R_A, R_B)) \end{aligned}$$

Ahora sustituyo esto en la condición de primer orden para A .

$$\frac{b_j^*}{b_i^*} = \frac{(\partial \pi / \partial p_j^1) p_j^1(R_A, R_B) (1 - p_j^1(R_A, R_B))}{(\partial \pi / \partial p_i^1) p_i^1(R_A, R_B) (1 - p_i^1(R_A, R_B))}$$

Puesto que esto es verdadero para cualquiera dos votantes y $\sum a_i = \sum b_i = 1$, concluyo que

$$a_i^* = b_i^* = \frac{(\partial \pi / \partial p_i^1) p_i^1(R_A, R_B) (1 - p_i^1(R_A, R_B))}{\sum (\partial \pi / \partial p_j^1) p_j^1(R_A, R_B) (1 - p_j^1(R_A, R_B))}$$

□

Apéndice B. Demostración para la Proposición 2.

Demostración. Esta demostración es una generalización de la demostración de Shubik y Weber, quienes solamente pudieron demostrar que las estrategias establecidas son un equilibrio local. La demostración funciona mostrando que para un γ suficientemente pequeño la función objetivo $\pi(\cdot, b^*)$ es estrictamente cóncava en el espacio de parámetro relevante. De aquí las CPOs caracterizan la mejor-respuesta única a b^* .

Sea $\mathbf{a}$ una estrategia de gasto candidata para ser la óptima. Como se ve en la demostración para la Proposición 1, podemos asumir que $a_i > 0$ para todos los i . Para simplificar las cosas, en lo que sigue p_i^1 representa $p_i^1(a_i R_A, b_i^* R_B)$. Denotamos por H a la matriz Hessiana en $\mathbf{a}$. Las entradas de H son las siguientes:

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \pi}{\partial p_i^1} \cdot \frac{\partial p_i^1}{\partial a_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 p_i^1} \cdot \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial a_i} \right)^2 + \frac{\partial \pi}{\partial p_i^1} \cdot \frac{\partial^2 p_i^1}{\partial^2 a_i} \\ &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 p_i^1} \cdot \left(\frac{\gamma}{a_i} \right)^2 \left(p_i^1 (1 - p_i^1) \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial \pi}{\partial p_i^1} \cdot \left(\frac{\gamma}{a_i} \right)^2 p_i^1 (1 - p_i^1) \left(1 - 2p_i^1 - \frac{1}{\gamma} \right) \\ \\ H_{ij} &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} \cdot \frac{\partial p_i^1}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial p_j^1}{\partial a_j} \\ &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} \cdot \left(\frac{\gamma}{a_i} \right) p_i^1 (1 - p_i^1) \left(\frac{\gamma}{a_j} \right) p_j^1 (1 - p_j^1) \end{aligned}$$

Para verificar si H es definida negativa podemos eliminar los elementos comunes de cada fila y cada columna. Las entradas simplificadas de H son

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 p_i^1} + \frac{\partial \pi}{\partial p_i^1} \cdot \frac{1 - 2p_i^1 - \frac{1}{\gamma}}{p_i^1 (1 - p_i^1)} \\ H_{ij} &= \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} \end{aligned}$$

Según el teorema de Gershgorin, los eigenvalores de H están en la unión de los discos con centro en H_{ii} y diámetro $\sum_{j \neq i} |H_{ij}|$. El resto de la demostración trabaja para mostrar que $\partial^2 \pi / \partial^2 p_i^1$ y $\partial^2 \pi / \partial p_i^1 \partial p_j^1$ son finitos, mientras que $\partial \pi / \partial p_i^1$ está acotado por arriba de cero. Esto implica que los elementos de la diagonal principal de H tienden a $-\infty$ cuando γ tiende a 0. Por lo tanto, todos los eigenvalores de H deben ser negativos y la matriz es definida negativa.

Continúo caso por caso:

Caso I: $T = 1$. (Sin rondas de actualización de la red). En este caso $\partial \pi / \partial p_i^1$ es q_i . Desde aquí, $\partial^2 \pi / \partial^2 p_i^1$ es 0 y $\partial^2 \pi / \partial p_i^1 \partial p_j^1$ es $Prob(\sum \delta_k = \bar{N} - 2) - Prob(\sum \delta_k = \bar{N} - 1)$ para $k \notin \{i, j\}$, que está acotado entre -1 y 1 .

Demostrar que q_i está acotado por arriba de cero es más desafiante. De hecho, no es verdadero para todo el dominio de $\mathbf{a}$. En cambio, tendré que limitar el dominio eliminando algunas $\mathbf{a}$'s que sabemos arrojan un π más pequeño que $\pi(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$. A tal fin definamos lo siguiente:

$$p_{max} = \max\{p_i^1(R_A, b_i^* R_B)\}_{i \in N}$$

$$p_{min} = 1 - (1 - \pi^*)^{(N - \bar{N} + 1)^{-1}}$$

Donde π^* es $\pi(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$. La interpretación de p_{max} es muy simple. Es la máxima probabilidad que puede ser alcanzada gastando todos los recursos de A en un único votante. Puesto que $b_i^* > 0$ tenemos que $p_{max} < 1$.

Ahora mostraré que podemos limitarnos para considerar solamente las estrategias tales que por lo menos $\bar{N}$ votantes tengan una probabilidad mayor o igual a p_{min} . Tomemos cualquier $\mathbf{a}$ donde esto no es verdadero y reetiquetemos a los votantes de forma que $p_1^1 \leq p_2^1 \leq \dots \leq p_N^1$. Sabemos que $p_{N-\bar{N}+1}^1 < p_{min}$. De aquí

$$\begin{aligned} \pi(p_1^1, \dots, p_{N-\bar{N}+1}^1, p_{N-\bar{N}+2}^1, \dots, p_N^1) &< \pi(p_{min}, \dots, p_{min}, 1, \dots, 1) \\ &= 1 - (1 - p_{min})^{N-\bar{N}+1} \\ &= \pi^* \end{aligned}$$

Ahora, para mostrar que q_i está acotado por arriba de cero, notemos que

$$q_i = Prob\left(\sum_{k \neq i} \delta_k = \bar{N} - 1\right) \geq (p_{min})^{\bar{N}-1} (1 - p_{max})^{N-\bar{N}+1} > 0$$

Caso II: $T = 2$. (Una ronda de actualización de la red). Aquí $\partial\pi/\partial p_i^1$ es $q_i + \sum_{j \neq i} M_{ji} q_j$. La demostración es análoga al Caso I.

Caso III: $T = \infty$. Aquí π es una transformación monótona de $\pi = \sum w_i p_i^1$. La derivada de $\partial\tilde{\pi}/\partial p_i^1$ es w_i , lo que solamente depende de la red. Todas las segundas derivadas y las derivadas cruzadas son cero. Por lo tanto π es estrictamente cuasi-cóncava siempre que $\gamma < 1$. Después de resolver los tres casos, concluimos que a^* es la única mejor-respuesta a b^* . Mutato mutandis, b^* es la única mejor-respuesta a a^* . Esto muestra que las estrategias en efecto son un equilibrio.

La unicidad sigue porque los equilibrios para los juegos de suma cero son intercambiables. Para mostrar esto tomemos cualquier equilibrio del juego: (σ_a, σ_b) . Estas estrategias son potencialmente mixtas. Debe ser que (σ_a, b^*) y (a^*, σ_b) también son equilibrios. Puesto que a^* es la única mejor-respuesta a b^* , y viceversa, concluimos que $(\sigma_a, \sigma_b) = (a^*, b^*)$. $\square$

Apéndice C. Competencias con recaudación de fondos.

Hasta ahora he asumido que la cantidad de recursos para las campañas políticas era exógena. En esta sección analizo la posibilidad de que los competidores tengan que recaudar recursos a un costo.

Encuentro que, en equilibrio, la proporción relativa de recursos recaudados por los competidores solamente depende de los costos relativos de recaudar recursos. La proporción no depende de la influencia de la red, la probabilidad de ser pivotal, las reglas específicas de campañas, ni siquiera de la distribución inicial de las opiniones. El nivel absoluto de los recursos sí depende de estas cosas, pero de maneras que son difíciles de caracterizar.

Pare ser precisos, asumo que el competidor j tiene que pagar un costo $c_j \cdot (R_j)^k$ para recaudar recursos R_j . El parámetro k es mayor que uno y el parámetro c_j es mayor a cero.

En la primera etapa del juego, los competidores deciden simultáneamente cuántos recursos van a recaudar. Las cantidades que recaudan se convierten en conocimiento común. En la segunda etapa, los competidores deciden dónde gastarlo. Por inducción hacia atrás, los patrones de gasto en la segunda etapa tienen que ser los mismos que en la Proposición (1).

Los pagos de la segunda etapa solamente dependen de la proporción de recursos recolectados. Denotamos por $r = R_A/R_B$ como dicha proporción y denotamos con $\pi(r)$ al pago de la segunda etapa para el competidor A . Para calcular el equilibrio r^* , reescribo el problema de maximización del competidor A para que solamente dependa de r .

$$\max_{R_A} \pi(r) - c_A R_A^k = \max_r \pi(r) - c_A r^k R_B^k$$

De la misma manera, reescribo el problema del competidor B de la siguiente manera:

$$\max_{R_B} (1 - \pi(r)) - c_B R_B^k = \max_r (1 - \pi(r)) - c_B \left(\frac{R_A}{r} \right)^k$$

Las CPOs para el problema son

$$\begin{aligned}\frac{d\pi}{dr} - kc_A r^{k-1} R_B^k &= 0 \\ -\frac{d\pi}{dr} + kc_B r^{-k-1} R_A^k &= 0\end{aligned}$$

Resolver esto arroja una solución que es independiente de π .

$$r^* = \left(\frac{c_B}{c_A} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Si $c_A = c_B$ ambos competidores recaudarán la misma cantidad de recursos y su probabilidad de ganar no cambiará en comparación con aquella determinada por la opinión inicial de los votantes más la actualización de la red.

Puesto que el beneficio marginal solamente depende de r^* podemos encontrar el nivel absoluto de recursos equiparando el costo marginal con el beneficio marginal en las CPOs anteriormente mencionadas. A partir de esto puedo derivar dos estáticas sencillas comparativas.

- Todo lo demás siendo constante, si los votantes son menos persuadibles (γ decrece) la cantidad total de los recursos recaudados por cada competidor baja.
- Supongamos que los parámetros del costo marginal incrementan proporcionalmente. Es decir, (c_A, c_B) cambia a $(\lambda c_A, \lambda c_B)$ con $\lambda > 1$. Entonces la cantidad total de los recursos recaudados por cada competidor decrece.

Para las elecciones mayoritarias el beneficio marginal de los recursos incrementa con la probabilidad de que la elección sea decidida por un voto pivotal. Los competidores gastan más dinero en las elecciones que tienen una probabilidad mayor de ser cerradas.

La red tiene un efecto ambiguo sobre el gasto de campañas porque puede hacer que la elección sea más o menos cerrada. Por ejemplo, si inicialmente casi todos tienen una

probabilidad alta de escoger a A excepto por un votante muy influyente, la competencia con la red será más cerrada que sin ella. Al contrario, un votante muy influyente puede inclinar a un gran número de votantes indecisos, lo que haría la competencia fuese menos cerrada.

Apéndice D. Competencias en sistemas de representación proporcional.

En esta sección calculo los equilibrios cuando los competidores quieren maximizar la proporción de votantes que los eligen. Este modelo es especialmente relevante para los sistemas electorales con representación proporcional, porque los partidos obtienen escaños en el parlamento en proporción a la cantidad de votos que obtienen en la elección.

El resultado principal es cualitativamente similar al anterior: los competidores gastan en los votantes en proporción a una medida basada en eigenvectores de la influencia de la red: la centralidad de Bonacich. Los votantes pivotaes no tienen importancia porque los competidores no tienen un umbral de votos que desean alcanzar.

Asumiré que T sigue una distribución geométrica. Esto me permite encontrar una relación entre el equilibrio en el gasto y la centralidad de Bonacich, que es una importante medida de redes usada en la sociología.³²

Fijemos $\rho \in (0, 1)$. La variable aleatoria T sigue una distribución geométrica si la probabilidad que el juego termine en $T > t$ condicional a alcanzar la ronda t es una constante ρ para toda t .

$$Prob(T > t | T \geq t) = \rho; \forall t$$

Condicionado a la estrategia de B , el competidor A resuelve

$$\max_{(a_1, \dots, a_N)} E_T \left[\sum p_i^T \right] = \max_{(a_1, \dots, a_N)} (1 - \rho) \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} \sum_i p_i^t$$

Definición 5. Sea $\rho \in (0, 1)$. El vector $\hat{\mathbf{w}}$ de **pesos de influencia de Bonacich** para una matriz M es

$$\hat{\mathbf{w}} = (1 - \rho)(1/N, \dots, 1/N)[I - \rho M]^{-1}$$

---

³²Ver Ballester, Calvó-Armengol y Zenou (2006); Bramoullé, Kranton y D'Amours (2010) para la relación entre la influencia de Bonacich y los equilibrios de Nash en juegos con mejores-respuestas lineales.

Proposición 6. *Supongamos que cada competidor quiere maximizar el porcentaje de votantes que lo eligen. Entonces el único equilibrio de nash en estrategias puras, si existe, es:*

$$a_i^* = b_i^* = \frac{\hat{w}_i p_i^1(R_A, R_B)(1 - p_i^1(R_A, R_B))}{\sum \hat{w}_j p_j^1(R_A, R_B)(1 - p_j^1(R_A, R_B))}$$

Si $\gamma < 1$, este es el único equilibrio del juego.

Demostración. Tomemos $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (0, 1)^n$. Simplemente mostro que la función objetivo de cada competidor es igual a $\sum \hat{w}_i p_i^1$. El resto de la demostración sigue la lógica de la Proposición (1) y la Proposición (2). Tomando el problema de maximización del competidor A tenemos

$$\begin{aligned} \max_{a_1, \dots, a_N} (1 - \rho) \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} \sum_i p_i^t &= \max_{a_1, \dots, a_N} (1 - \rho) \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (1, \dots, 1) M^{t-1} \mathbf{p}^1 \\ &= \max_{a_1, \dots, a_N} (1 - \rho) (1, \dots, 1) [I - \rho M]^{-1} \mathbf{p}^1 \\ &\sim \max_{a_1, \dots, a_N} \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{p}^1 \end{aligned}$$

□

Finalmente, me gustaría señalar un resultado bien conocido de las cadenas de Markov. En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, los pesos de Bonacich convergen en los pesos de DeGroot. Así, en el límite cuando $\rho \rightarrow 1$, el gasto estratégico en los sistemas de representación proporcional converge en el equilibrio para los sistemas de elección por mayoría.