Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

Nº 2010-10

**El Conjunto de Equilibrio de Economías con un
Espacio de Consumo Continuo**

Enrique Covarrubias
Banco de México

Julio 2010

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

El Conjunto de Equilibrio de Economías con un Espacio de Consumo Continuo^{*}

Enrique Covarrubias[†]
Banco de México

Resumen

Estudiamos propiedades globales del conjunto de equilibrio para economías con un espacio de consumo continuo. Este marco es importante en problemas de asignación intertemporal (tiempo continuo o infinito), mercados financieros con incertidumbre (estados de la naturaleza continuos) y diferenciación de productos. Demostramos que el conjunto de equilibrio es contraíble lo que implica que (i) existe una política económica continua uniendo dos estados de equilibrio cualesquiera, y (ii) cualesquiera dos de estas políticas económicas pueden ser deformadas continuamente una en la otra. Asimismo, proponemos tres formulaciones equivalentes del problema de unicidad global de equilibrios en términos de la proyección que va del conjunto de equilibrio al espacio de parámetros. Finalmente, estudiamos los efectos locales y globales que la existencia de economías críticas genera en el conjunto de equilibrio. **Palabras Clave:** Equilibrio general; economías infinitas; elección intertemporal; incertidumbre.

Abstract

We study global properties of the equilibrium set of economies with a continuous consumption space. This framework is important in intertemporal allocation problems (continuous or infinite time), financial markets with uncertainty (continuous states of nature) and commodity differentiation. We show that the equilibrium set is contractible which implies that (i) there is a continuous economic policy linking any two equilibrium states, and (ii) any two such economic policies can be continuously deformed one into the other. We also give three equivalent formulations of the problem of global uniqueness of equilibria in terms of the projection map from the equilibrium set to the space of parameters. We finally study the local and global effects that the existence of critical economies has on the equilibrium set.

Keywords: General equilibrium; infinite economies; intertemporal choice; uncertainty.

JEL Classification: D50, D51, D80, D90.

^{*}El autor agradece a Elvio Accinelli, Yves Balasko, Leo Butler, Daniel Chiquiar, Carlos Hervés-Beloso, Gonzalo Rangel, Daniel Sámano, Michael Singer, Mich Tvede y a los participantes del seminario de Banco de México, Vigo, Warwick, la conferencia de SAET Conference on Current Trends in Economics (Ischia) y el Taller de Teoría Económica (Copenhague).

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: ecovarrubias@banxico.org.mx.

1. Introducción

El estudio de economías con espacios de bienes de dimensiones infinitas es un principio básico de la teoría económica moderna. Es de interés genuino en la teoría microeconómica, pero también es un marco que se requiere para estudiar problemas provenientes de, por ejemplo, los mercados financieros, la teoría de crecimiento, el equilibrio general dinámico y la diferenciación de productos.

La teoría de equilibrio general en dimensiones finitas es un área que avanzó mucho en los últimos años, pero una extensión directa de la teoría a las economías infinitas ha presentado un reto y los resultados no se generalizan en muchos casos. Incluso, la selección del espacio de bienes correcto está lejos de ser trivial, por ejemplo, considerando que si una economía de intercambio puro tiene ℓ bienes, la elección de un espacio de bienes es una tarea simple dado que todos los espacios vectoriales ℓ -dimensionales son isomorfos a $\mathbb{R}^\ell$. En este caso, el espacio de consumo es un subconjunto del cono positivo de $\mathbb{R}^\ell$. Sin embargo, en el extremo opuesto, en dimensiones infinitas no existe un solo espacio vectorial al cual todos los demás espacios vectoriales sean isomorfos y por lo tanto, con un número infinito de bienes, la elección de un conjunto de bienes puede ocasionar marcos muy distintos.

La representación de preferencias también es problemática. El trabajo reciente de Hervés-Beloso y Monteiro [17] muestra que si se consideran las preferencias como primitivas, a menos que se considere el espacio de fun-

ciones continuas (o funciones integrables) como el espacio de bienes, no es posible representar preferencias estrictamente monótonas mediante una función de utilidad continua. Los resultados negativos también aparecen cuando se estudian funciones de demanda individuales. Un resultado de Araujo [3] mostró que, cuando el espacio de bienes es un espacio general de Banach¹, una función de demanda existirá si y sólo si el espacio de bienes es realmente un espacio de Hilbert.

Dadas estas disyuntivas, en trabajos anteriores ([10], [11]), nos propusimos a estudiar modelos de economías de intercambio puro con un espacio de bienes continuo. Como se ejemplificará más adelante, este modelo es un buen marco para estudiar problemas en finanzas, modelos de horizonte infinito y diferenciaciones de productos. Se utilizó este modelo en [10] para estudiar el conjunto de equilibrio, estudiar economías regulares y críticas (y precios regulares y críticos) y como corolario se presentó una nueva demostración de genericidad de economías regulares. También se estudió la estructura de las funciones de exceso de demanda y se construyó un teorema de índice en [11], el cual, entre otros resultados, proporcionó condiciones genéricamente necesarias y suficientes para la unicidad global de equilibrios.

El presente documento tiene como objetivo caracterizar el conjunto de equilibrio y derivar propiedades en varias direcciones. Se inicia en la sección 2 mediante la definición del modelo y en la sección 3 se investigarán algunas propiedades globales del conjunto de equilibrio análogas al progra-

¹Un Apéndice con definiciones matemáticas está incluido al final del documento.

ma de Balasko (véase [5]) para un número finito de bienes. Se muestra que el conjunto de equilibrio tiene la estructura de una variedad diferencial de Banach y que es un conjunto contraíble, así que en particular es arco-conexo y simplemente-conexo.

La trivialidad topológica del conjunto de equilibrio proporciona resultados análogos al caso de dimensión finita: supongamos que p es un precio, ω el parámetro que define una economía, que (p, ω) describe un estado actual de equilibrio y que (p', ω') es un equilibrio determinado exógenamente a lograr en el futuro. Cada camino conectando dichos dos equilibrios es entonces la expresión matemática de alguna política económica². Entonces, el que el conjunto de equilibrio sea conexo comprueba que existe una política económica continua que conecta el equilibrio (p, ω) y (p', ω') mientras que la arco-conexión expresa la idea de que cualesquiera dos de estas políticas económicas pueden ser deformadas continuamente una en la otra.

Como aplicación de la simplicidad del conjunto de equilibrio, en la sección 4 se proporciona una caracterización puramente topológica del problema de unicidad global de equilibrios en términos de la proyección y su relación con equilibrios críticos. En la sección 5 se presenta una revisión breve de las definiciones y resultados principales de la teoría de índice de Fredholm y se muestra que la proyección es Fredholm de índice cero. Finalmente, en la sección 6 se proponen tres formulaciones analíticas equivalentes del problema de

²Es decir, formalmente una *política económica* es un mapeo continuo $\mathcal{P}(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ tal que $\mathcal{P}(0) = (p, \omega)$, $\mathcal{P}(1) = (p', \omega')$ y tal que en cada $\tau \in (0, 1)$, $\mathcal{P}(\tau)$ es un equilibrio.

unicidad global de equilibrios y se estudian los efectos locales y globales que el conjunto de economías críticas tiene sobre la forma del conjunto de equilibrio. Para una mejor comprensión, se anexa un apéndice con definiciones matemáticas.

2. El Mercado

Se proponen tres ejemplos de economías con un espacio de consumo continuo. Referencias adicionales se encuentran en [20].

2.1. Ejemplos de economías continuas

Ejemplo 1. Mercados financieros. El siguiente ejemplo es un caso particular de [12] y [19] donde se considera una economía de dos periodos $t = 0, 1$ con mercados financieros completos e incertidumbre en el segundo periodo. El conjunto de estados es $M = [0, 1]$ y el mapeo C^1 , $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la densidad del conjunto de estados M . Se supone que existe un número finito de consumidores $i = 1, \dots, I$. Una canasta de consumo es un par $x_i = (x_i^0, x_i^1)$ en donde para $t = 0$ el consumo está dado por un vector $x_i^0 \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ y en $t = 1$ es un mapeo C^1 , $x_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_+^\ell$. Similarmente, un precio es un par $p = (p_0, p_1)$, donde $p_0 \in \mathbb{R}_+^\ell$ y en $t = 1$, es un mapeo $p_1 : M \rightarrow \mathbb{R}_+^\ell$.

Se supone que en $t = 0$ los agentes están equipados con una dotación inicial $\omega_i^0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ y una dotación inicial C^1 en $t = 1$ de la forma $\omega_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^\ell$. Las preferencias se representan por una utilidad estado-dependiente de

la forma

$$U^i(x_i) = u_i(x_i^0) + \int_M u^i(x_i^1(s)) \pi(s) ds.$$

Se muestra en [12] y [19] que si $(p, x_1, \dots, x_I)$ es un equilibrio, entonces p_1 y x_i^1 para cada i son todos mapeos continuos de M a $\mathbb{R}_{++}^\ell$, es decir, precios, consumo y dotaciones, son todos elementos del mismo espacio $C(M, \mathbb{R}_{++}^\ell)$.

Ejemplo 2. Tiempo continuo. Se supone que en una economía el consumo de n productos ocurre continuamente a través del tiempo $t \in [0, T]$. Entonces, una función continua $x^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ representa el consumo de n productos por el agente i en el tiempo t . Alternativamente, $x(t)$ puede representar una tasa continua instantánea de consumo.

Ejemplo 3. Diferenciación de productos. En este último ejemplo, se mencionan economías que permiten la diferenciación de productos. En este caso, existe un conjunto compacto (topológico) M de “características” y un conjunto $\mathcal{U} \subset M$ representaría un subconjunto específico de características que se desea tener en una canasta de bienes. Para cada conjunto $\mathcal{U} \subset M$, una función continua $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa la proporción de canastas de bienes que satisfacen las características dadas por $\mathcal{U}$. Naturalmente, se requiere que $\int_M x(t) dt = 1$. Este ejemplo es una versión continua del ejemplo (C) en ([20], p.1837).

2.2. La economía de intercambio

2.2.1. El espacio de bienes

Considerando los ejemplos de la sección previa, se supone que el espacio de bienes es un subconjunto de $C(M, \mathbb{R}^n)$, el conjunto de mapeos continuos con la topología de la norma del supremo, donde M , el espacio de parámetros, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^a$ para algún a .³ Este espacio de bienes tiene varias ventajas adicionales: (i) el interior de su cono positivo (el espacio de consumo) no es vacío, (ii) permitirá escribir de manera natural la separabilidad de utilidades que simplificará el análisis en el presente documento y (iii) el espacio de precios tendrá una estructura particularmente simple como se explicará a continuación.

2.2.2. El espacio de consumo

El **espacio de consumo** es entonces $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$, el cono positivo de $C(M, \mathbb{R}^n)$; esto es, el subconjunto de los mapeos en $C(M, \mathbb{R}^n)$ para los cuales su rango consiste solamente de entradas positivas. Es decir, el plan de consumo del agente i es una función continua $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$.

³El supuesto de que M sea compacto no es tan restrictivo como posiblemente parece inicialmente. Los trabajos de [2], [6], [7] y [8] son similares al presente documento, estudiando un modelo (no compacto) de horizonte infinito a través del enfoque de la proyección natural. Una diferencia con estos documentos es que en el presente documento no se parametrizan economías por los pesos de bienestar y en vez de eso se escoge una parametrización directa a través de dotaciones iniciales.

2.2.3. Dotaciones iniciales

Se considera un número finito $i = 1, \dots, I$ de agentes, cada uno de los cuales está equipado con dotaciones iniciales $\omega_i \in X$, es decir, la asignación inicial del agente i es una función continua $\omega_i : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$.

2.2.4. Preferencias

Para cada agente i , las preferencias se representan por utilidades de la forma

$$U_i(x) = \int_M u^i(x(t), t) dt.$$

Se asume que la función de utilidad $u^i(x(t), t) : \mathbb{R}_{++}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 estrictamente monótona, cóncava, donde $\{y \in \mathbb{R}_{++}^n : u^i(y, t) \geq u^i(x, t)\}$ es cerrado. Eso implica que $U_i(x)$ es estrictamente monótona, cóncava y dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet.

La ventaja de asumir utilidades separables es que se descompone un problema de optimización de dimensión infinita en una secuencia infinita pero de problemas de dimensión finita.

2.2.5. Precios

En sentido estricto, los precios están en el cono positivo del dual de $C(M, \mathbb{R}^n)$. Sin embargo, Crés et al. [12] y Chichilnisky y Zhou [9] han mostrado que en una economía con dotaciones continuas y utilidades separables, los precios tienen que ser funciones continuas del espacio de parámetros M y

por lo tanto, simplemente se puede considerar el **espacio de precios** como

$$S = \{p \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n) : \|p\| = 1\},$$

donde

$$\|p\| = \sup_{t \in M} \|p(t)\|$$

con la métrica estándar $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno de $C(M, \mathbb{R}^n)$, tal que si p es un precio y x es un plan de consumo, $p, x \in C(M, \mathbb{R}^n)$, entonces el valor de x a un nivel de precios p está dado por

$$\langle p, x \rangle = \int_M \langle p(t), x(t) \rangle dt,$$

con el producto interno estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathbb{R}^n$.

2.2.6. Funciones de demanda individuales

Las funciones de demanda individuales $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$ de cada agente i son la solución al problema de optimización del consumidor, así que

$$f_i(p, y) = \arg \left[\max_{\langle p, x \rangle = y} U_i(x) \right].$$

Se puede mostrar que para cada agente i su función de demanda individual f_i es un mapeo diferenciable con una inversa diferenciable.

2.2.7. Una economía de intercambio

En este documento, se asume que las preferencias son fijas, de modo tal que las dotaciones iniciales son los únicos parámetros que definen una economía. Se denota una economía genérica por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_I) \in \Omega = X^I$. Para una economía fija $\omega \in \Omega$ la **función de exceso de demanda agregada** es un mapeo $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ definido por

$$Z_\omega(p) = \sum_{i=1}^I (f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) - \omega_i).$$

También se define $Z : \Omega \times S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ mediante la evaluación

$$Z(\omega, p) = Z_\omega(p).$$

Debido a la Ley de Walras, se puede mostrar que la función de exceso de demanda satisface $\langle p, Z_\omega(p) \rangle = 0$ para todos $p \in S$.

2.2.8. El conjunto de equilibrio

La presente sección finalizará definiendo el conjunto de equilibrio, en la misma manera como en dimensiones finitas.

Definición 1. Se dice que $p \in S$ es un **equilibrio** de la economía $\omega \in \Omega$ si $Z_\omega(p) = 0$. El **conjunto de equilibrio** se denota por

$$\Gamma = \{(\omega, P) \in \Omega \times S : Z(\omega, p) = 0\}.$$

El objetivo del presente documento es estudiar algunas propiedades de la estructura del conjunto de equilibrio Γ .

3. Propiedades topológicas de la variedad diferencial infinita de equilibrio

En un trabajo previo [10], se comenzó un estudio sistemático del conjunto infinito de equilibrio infinito con utilidades separables en un espacio de consumo continuo. Se establecieron los siguientes resultados.

Teorema 1. [10] *El conjunto de equilibrio Γ es una variedad diferencial de Banach de clase C^∞ y la proyección natural $\pi : \Omega \times S|_\Gamma \rightarrow \Omega$ es un mapeo C^∞ .*

El objetivo de la presente sección es establecer algunas propiedades topológicas de la variedad diferencial infinita de equilibrio. Resulta que su topología se puede estudiar à la Balasko [4]. El primer resultado se presenta en el Teorema 2, mostrando que la variedad diferencial del equilibrio está compuesta de fibras lineales dada por las ecuaciones que la definen. Eso implica que la variedad será arco-conexa y simplemente-conexa. Ésta es la versión análoga en infinitas dimensiones al Teorema 1 de [4], que muestra que, en dimensiones finitas, también Γ es arco-conexo y simplemente-conexo.

Recordemos (cf. [5]) que un espacio topológico es arco-conexo si siempre es posible unir dos puntos de este espacio, elegidos arbitrariamente, median-

Figura 1: La variedad diferencial de equilibrio Γ .

te un camino continuo. Supongamos que p es un precio, ω el parámetro que define una economía, que (p, ω) es un elemento de la variedad de equilibrio que describe el estado actual del equilibrio y que (p', ω') es el nuevo equilibrio determinado exógenamente que se quiere lograr en el futuro. Cada camino conectando dichos dos equilibrios es una expresión matemática de alguna política económica. Entonces, la conexión del conjunto de equilibrio comprueba que existe una política económica continua uniendo los equilibrios (p, ω) y (p', ω') , mientras que la arco-conexión expresa que cualesquiera dos de estas políticas económicas pueden ser deformadas continuamente una en la otra.

Teorema 2. *La variedad infinita de equilibrio es contraíble. En particular,*

es arco-conexa y simplemente-conexa.

Demostración. Considérese el mapeo $f : S \times (\mathbb{R}_{++})^I \rightarrow S \times \Omega$ dado por

$$f(p, w_1, \dots, w_I) = (p, f_1(p, w_1), \dots, f_I(p, w_I))$$

y el mapeo $\phi : S \times \Omega \rightarrow S \times (\mathbb{R}_{++})^I$ dado por

$$\phi(p, \omega_1, \dots, \omega_I) = (p, \langle p, \omega_1 \rangle, \dots, \langle p, \omega_I \rangle).$$

Finalmente, sea ψ la restricción de ϕ a Γ . La demostración entonces sigue paso por paso la demostración del Teorema 1 en [4]. $\square$

4. Un resultado sobre unicidad global de equilibrios

En esta sección se presenta un resultado sobre la unicidad global de equilibrios. Algunos resultados sobre la unicidad global para economías infinitas se han proporcionado por Dana [13] para una clase diferente de espacios de consumo y por el autor en [11] mediante la construcción de un teorema de índice. Primero, recordemos la noción de economías regulares y críticas.

Definición 2. Se dice que una economía es **regular** (respectivamente **crítica**) si y sólo si ω es un valor regular (respectivamente crítico) de la proyección $pr : \Gamma \rightarrow \Omega$.

El Teorema 3 muestra cómo la unicidad global de equilibrios está intrínsecamente relacionada con la existencia de equilibrios críticos, pero también con la característica de que la proyección es propia. Este resultado es el análogo en dimensiones infinitas del Teorema 5.2 en [4].

Teorema 3. *Para que cada economía infinita suave ω tenga un equilibrio único, es necesario y suficiente que (i) no existan economías críticas y (ii) que un conjunto compacto de economías tenga un conjunto compacto de precios de equilibrio.*

Existe una formulación equivalente del Teorema 3 en términos de la proyección.

Teorema 4. *La proyección $\pi : \Gamma \rightarrow \Omega$ es un difeomorfismo si y sólo si π es propia y $D\pi : T\Gamma \rightarrow T\Omega$ es suprayectiva.*

Demostración del Teorema 3: Según el Teorema 2, la variedad diferencial infinita de equilibrio Γ es conexa. Similarmente, nótese que Ω es simplemente-conexo, ya que es una vecindad abierta de productos cruz de $C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$.

Primero, supongamos que $\pi : \Gamma \rightarrow \Omega$ es un difeomorfismo. Entonces, la derivada de π en el sentido de Frèchet π es suprayectiva en todos los puntos de su dominio; así que cada economía infinita es regular. Pero también, por supuesto, la correspondencia de Walras π^{-1} es un mapeo continuo, por lo tanto, tiene que enviar un conjunto de economías compactas a un conjunto compacto de precios de equilibrio. Por lo tanto, π es propia.

Conversamente, supongamos que (i) no existen economías críticas y (ii) que un conjunto compacto de economías tiene un conjunto compacto de precios de equilibrio. Se quiere mostrar que π es un difeomorfismo. Dado que no existen economías críticas, el teorema de la función implícita entre espacios de Banach garantiza que la inversa es diferenciable en el sentido de Frèchet. Solamente se tiene que mostrar que es una biyección.

Ya que π es propia, se puede utilizar un resultado de Palais [21] de que un mapeo propio manda conjuntos cerrados a conjuntos cerrados, es decir, $\pi(\Gamma)$ es cerrado. Pero también, dado que no existen economías críticas, π es un homeomorfismo local, así que también manda conjuntos abiertos a conjuntos abiertos, es decir, $\pi(\Gamma)$ es abierto. Por lo tanto, $\pi(\Gamma)$ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de Ω . Por ende, $\pi(\Gamma) = \Omega$. Eso muestra que π es suprayectiva.

En lo siguiente se muestra que π es inyectiva. Considerando dos puntos γ_1, γ_2 en la variedad diferencial de equilibrio Γ , tales que $\pi(\gamma_1) = \pi(\gamma_2) = \omega$. Dado que Γ es conexo, se puede considerar un camino $\alpha(t)$ en Γ que conecte γ_1 a γ_2 . Entonces, $\pi \circ \alpha(t)$ es un lazo en Ω basado en ω . También es conocido que Ω es simplemente-conexo, así que se puede utilizar una homotopía $F(s, t)$ tal que $F(0, t) = \pi \circ \alpha(t)$ y $F(1, t) = \omega$. Como ya se observó que π es suprayectiva, propia y un homeomorfismo local de Γ a Ω , entonces a través de un resultado de Ho ([18], p.239), π tiene que ser una proyección recubridora y cada proyección recubridora tiene la propiedad de levantamiento de homotopía ([16], p.60). Por lo tanto, tiene que existir un levantamiento único

$\tilde{F}(s, t)$ de $F(s, t)$ con $\tilde{F}(0, t) = \alpha(t)$. El levantamiento de $\tilde{F}(1, t)$ tiene que ser un conjunto conexo que contiene tanto a γ_1 como a γ_2 . Pero $\pi^{-1}(\omega)$ es discreto, así que $\gamma_1 = \gamma_2$. $\square$

5. La proyección es Fredholm de índice cero

En esta sección se proporciona un breve resumen de las definiciones de la teoría de índice de Fredholm. Recordemos que “ser Fredholm” es una propiedad de las funciones que permite extender algunos resultados de topología diferencial a dimensiones infinitas. En términos generales, un mapeo es de Fredholm si su derivada es casi invertible, es decir, si es invertible hasta perturbaciones compactas. Smale en [23] introdujo esta noción.

Precisamente, un **operador lineal de Fredholm** es un mapeo lineal continuo $L : E_1 \rightarrow E_2$ de un espacio de Banach a otro con las siguientes propiedades:

1. $\dim \ker L < \infty$;
2. rango L es cerrado;
3. $\text{coker } L = E_2 / \text{rango } L$ tiene dimensión finita.

Si L es un operador de Fredholm, entonces su **índice** se define como $\dim \ker L - \dim \text{coker } L$, así que el índice de L es un número entero.

Un **mapeo de Fredholm** es un mapeo C' , $f : M \rightarrow V$ entre variedades diferenciales localmente como espacios de Banach tal que para cada $x \in M$,

la derivada $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$ es un operador de Fredholm. El **índice** de f se define como el índice de $Df(x)$ para algún x . Si M es conexo, esta definición no depende de x .

En un trabajo previo [10], se ha mostrado que la función de exceso de demanda $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ de la economía $\omega \in \Omega$ es un mapeo de Fredholm de índice cero. En el presente documento se comprueba un resultado equivalente para la proyección natural. Como complemento, cabe mencionar que cualquier mapeo suave entre espacios de dimensión finita es un mapeo de Fredholm.

Teorema 5. *El mapeo $\pi : \Gamma \rightarrow \Omega$ es Fredholm de índice cero.*

Demostración. La proyección $\pi : \Gamma \rightarrow \Omega$ es Fredholm a través de una aplicación simple de ([1], p.48). El índice es constante a través de Γ ya que se ha mostrado que es conexo. $\square$

6. Economías críticas y el número de equilibrios

Sea $B \subset \Gamma$ el conjunto de precios críticos y $\Sigma \subset \Omega$ el conjunto de economías críticas. Ahora que se han recordado las nociones de la teoría de índice de Fredholm se puede mencionar que los Teoremas 3 y 4 podrían reformularse en una tercera manera equivalente.

Teorema 6. *Para que cada economía infinita suave tenga un equilibrio único,*

es necesario y suficiente que (i) un conjunto compacto de economías tenga un conjunto compacto de precios de equilibrio; (ii) que la proyección $\pi : \Gamma \rightarrow \Omega$ sea un mapeo de Fredholm de índice cero; y, (iii) que $B = \emptyset$.

En dimensiones finitas, es bien conocido que, lejos de economías críticas, los precios varían continuamente como funciones de asignaciones iniciales (véase Gráfica 2). Lo anterior, es el resultado obtenido por Debreu en [14]. El Teorema 7 muestra la extensión de este resultado a dimensiones infinitas.

Figura 2: Alrededor de ω_1, ω_2 , los precios varían continuamente como funciones de las dotaciones iniciales. Ese no es el caso para la economía crítica ω_0 .

Teorema 7. Sea Σ el conjunto singular en Ω . Entonces, $\pi : \Gamma - \pi^{-1}(\Sigma) \rightarrow \Omega - \Sigma$ es un mapeo de espacios recubridores.

Demostración. Dado que π es propia, entonces según un resultado de Palais [21] manda conjuntos cerrados a conjuntos cerrados. Por lo tanto, el conjunto de economías críticas $\pi(B) = \Sigma$ es cerrado y así, tanto $\Gamma - \pi^{-1}(\Sigma)$ como $\Omega - \Sigma$ son abiertos.

La idea es mostrar que cada conjunto compacto de economías regulares tiene un conjunto compacto de precios de equilibrio. Es decir, para mostrar entonces que $\pi : \Gamma - \pi^{-1}(\Sigma) \rightarrow \Omega - \Sigma$ es un mapeo propio. Si lo anterior es el caso, π será tanto un mapeo abierto como cerrado, y así suprayectivo. Por eso, será un mapeo de espacios recubridores.

Sea K es un subconjunto compacto de $\Omega - \Sigma$. Entonces K también es compacto en Ω . Sin embargo, $\pi^{-1}(K) \subset \Gamma - \pi^{-1}(\Sigma)$ y así es compacto en este conjunto. $\square$

El resultado previo también muestra que si un conjunto singular Σ es suficientemente pequeño, la suprayectividad de π se garantiza y por lo tanto, se puede enfocar en el estudio de π como mapeo recubridor y su comportamiento sobre el conjunto crítico. Resulta que precios críticos son removibles en el sentido siguiente.

Teorema 8. *Si B denota el conjunto de precios críticos de equilibrio en Γ , entonces los precios críticos aislados son removibles, es decir, si $p \in B$ es aislado en B , entonces, π es un homeomorfismo local sobre p .*

Demostración. La demostración básicamente es la del Teorema 4 en [22]. $\square$

El resultado previo muestra que con precios críticos aislados, localmente

se obtiene $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$. El resultado final del presente trabajo muestra una globalización de este resultado.

Teorema 9. *Si el conjunto de precios críticos B es la unión contable de conjuntos compactos, entonces, $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ y π es un difeomorfismo global de $\Gamma - B$ sobre $\Omega - \Sigma$.*

Demostración. La demostración es una aplicación simple del Teorema 6 de [22]. □

7. Conclusiones

En el presente documento nos propusimos estudiar ejemplos de economías con un espacio de consumo continuo. Se concentró en entender la estructura del conjunto de equilibrio y se mostraron resultados en direcciones diferentes. Derivado de un trabajo previo, ya era conocido que el conjunto de equilibrio tiene la estructura de una variedad diferencial de Banach, pero adicionalmente se mostró que es contraíble (y en particular, arco-conexo y simplemente-conexo) y que afuera del conjunto singular, la proyección es un mapeo de espacios recubridores. También se mostró que los precios críticos son removibles y que, si los precios críticos son la unión contable de conjuntos compactos, entonces el mapeo de proyección es un difeomorfismo afuera del conjunto crítico.

Similarmente, se propusieron tres formulaciones del problema de existencia global de equilibrios, mostrando la relación cercana entre multiplicidad

de equilibrios y la existencia de equilibrios críticos, así como propiedades de la proyección, mostrando que es propia y que su índice de Fredholm es cero.

Referencias

- [1] Abraham, R. y Robbin, J. *Transversal Maps and Flows*. Benjamin, New York, 1967.
- [2] Accinelli, E. *About manifolds and determinacy in general equilibrium theory*. Estudios de Economía 30 (2003) 169-177.
- [3] Araujo, A. *The non-existence of smooth demand in general Banach spaces*. Journal of Mathematical Economics 17 (1988) 309-319.
- [4] Balasko, Y. *Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory*. Journal of Mathematical Economics 2 (1975) 95-118.
- [5] Balasko, Y. *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Academic Press Inc., 1988.
- [6] Balasko, Y. *The natural projection approach to the infinite horizon model*. Journal of Mathematical Economics 27 (1997) 251-265.
- [7] Balasko, Y. *Pareto Optima, welfare weights, and smooth equilibrium analysis*. Journal of Economic Dynamics and Control 21 (1997) 473-503.

- [8] Balasko, Y. *Equilibrium analysis of the infinite horizon model with smooth discounted utility functions*. Journal of Economic Dynamics and Control 21 (1997) 783-829.
- [9] Chichilnisky, G. y Zhou, Y. *Smooth Infinite Economies*. Journal of Mathematical Economics 29 (1998) 27-42.
- [10] Covarrubias, E. *Regular infinite economies*. To appear in the B.E. Journal of Theoretical Economics.
- [11] Covarrubias, E. *The number of equilibria of smooth infinite economies*. Working Paper (2008) University of Edinburgh.
- [12] Crès, H., Markestrand, T. y Tvede, M. *Incomplete financial markets and jumps in asset prices*. Working paper 09-12 (2009), University of Copenhagen.
- [13] Dana, R.A. *Existence and uniqueness of equilibria when preferences are additively separable*. Econometrica 61 (1993) 953-957.
- [14] Debreu, G. *Economies with a finite set of equilibria*. Econometrica 38 (1970) 387-392.
- [15] Gabszewicz, J.J. y Mertens J.-F. *An equivalence theorem for the core of an economy whose atoms are not “too” big*. Econometrica 39 (1971) 713-721.

- [16] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [17] Hervés-Beloso, C. y Monteiro, P.K. *Strictly monotonic preferences on continuum of goods commodity spaces*. Journal of Mathematical Economics (2009) doi:10.1016/j.jmateco.2009.10.003.
- [18] Ho, C.W. *A note on proper maps*. Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975) 237-241.
- [19] Mas-Colell, A. *Indeterminacy in incomplete market economies*. Economic Theory 1 (1991) 45-61.
- [20] Mas-Colell, A. y Zame, W.R. *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces*. Handbook of Mathematical Economics, vol. IV (1991) ed. by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, North Holland, Amsterdam.
- [21] Palais, R.S. *When proper maps are closed*. Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 835-836.
- [22] Plastock, R.A. *Nonlinear Fredholm maps of index zero and their singularities*. Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978) 317-322.
- [23] Smale, S. *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*. American Journal of Mathematics 87 (1965) 861-866.

A. Apéndice: Definiciones matemáticas.

Definición 3. Un espacio topológico se define como **contraíble** si el mapeo identidad $i_X : X \rightarrow X$ es homotópico a un mapeo constante.

Definición 4. Un **espacio de Banach** $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado (sobre los números reales en este caso) que es completo con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definición 5. Un **espacio de Hilbert** H es un espacio vectorial con un producto interno definido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que define un espacio de Banach, fijando $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para $x \in H$.

Definición 6. Un **funcional lineal acotado** $h(x)$ definido sobre un espacio de Banach X es un mapeo lineal $X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|h(x)| \leq K\|x\|_X$ para alguna constante K independiente de $x \in X$. El conjunto de todos los funcionales lineales acotados en X , denotado X^* , se llama el **espacio conjugado** de X y es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|h\| = \sup|h(x)|$ sobre la esfera $\|x\|_X = 1$. Si $(X^*)^* = X$, entonces el espacio X se llama **reflexivo**.

Definición 7. Se dice que un conjunto M de un espacio de Banach X es un **conjunto compacto** si M es cerrado (en la topología de la norma) y tal que cada secuencia en M contiene una subsecuencia fuertemente convergente.

Definición 8. Un operador lineal L con dominio X y rango contenido en Y , (X, Y espacios de Banach) es un **operador lineal acotado** si existe una constante K independiente de $x \in X$ tal que $\|Lx\|_Y \leq K\|x\|_X$ para todo

$x \in X$. El conjunto de tales mapeos para X, Y fijos es otra vez un espacio de Banach, denotado $L(X, Y)$ con respecto a la norma $\|L\| = \sup\|Lx\|_Y$ para $\|x\|_X = 1$.

Definición 9. Un operador lineal $C \in L(X, Y)$ se llama **operador compacto** si para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, $C(B)$ es condicionalmente compacto en Y . Los mapeos lineales acotados con rango de dimensiones finitas son automáticamente compactos. Conversamente, si X y Y son espacios de Hilbert, entonces un mapeo lineal compacto C es el límite uniforme de tales mapeos.

Propiedades relevantes de operadores lineales compactos. Sea $C \in L(X, X)$ sea compacto y sea $L = I + C$, entonces

1. L tiene un rango cerrado;
2. $\dim \ker L = \dim \operatorname{coker} L < \infty$;
3. Existe un número entero finito β tal que $X = \ker(L^\beta) \oplus \operatorname{rango}(L^\beta)$ y L es un homeomorfismo lineal de rango (L^β) sobre si mismo.

Definición 10. Sea $f \in C^1(U, Y)$, $U \subset X$, donde X, Y son espacios de Banach. Entonces, se dice que $x \in U$ es un **punto regular** para f si $f'(x)$ es un mapeo lineal suprayectivo en $L(X, Y)$. Si $x \in U$ no es regular, x se llama **punto singular**. Similarmente, **valores singulares** y **valores regulares** y de f se definen considerando los conjuntos $f^{-1}(y)$. Si $f^{-1}(y)$ tiene un punto singular, y se llama valor singular; si no, y es un valor regular.

Definición 11. Se dice que un operador $f \in C^0(X, Y)$ es un **operador propio** si la imagen inversa de cualquier conjunto compacto C en Y , $f^{-1}(C)$ es compacto en X . La importancia de dicha noción reside en el hecho de que si el operador f es propio, éste restringe el tamaño del conjunto de solución $S_p = \{x : x \in X, f(x) = p\}$ para cualquier $p \in Y$ fijo.

Definición 12. Un mapeo f entre espacios topológicos X, Y es llamado **mapeo propio** si la imagen inversa de cada subconjunto compacto de Y es un subconjunto compacto de X .