Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

Nº 2010-08

Tasas en Equilibrio bajo Regímenes

Santiago García-Verdú
Banco de México

Junio 2010

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Tasas en Equilibrio bajo Regímenes*

Santiago García-Verdú[†]

Banco de México

Resumen: Este documento estudia cómo la inflación como un indicador macroeconómico afecta a los precios de los bonos nominales. Considero una economía con un agente representativo que tiene preferencias Epstein-Zin. El espacio-estado que captura la inflación y el crecimiento en el consumo, se ve afectado por cambios en regímenes. Así al agente le preocupa la distribución intertemporal del riesgo, que es afectada por la persistencia de las variables y de los regímenes. Los regímenes permiten capturar cambios estructurales en la volatilidad de los choques inesperados. En la medida que los choques inflacionarios inesperados indiquen un menor crecimiento en el consumo, los tenedores de los bonos nominales serán compensados por estos choques. Por lo anterior, un cambio en el régimen que afecta a la covarianza de los choques a la inflación y al crecimiento en el consumo, puede ser interpretado como un cambio en el precio del riesgo. Encuentro coeficientes de aversión al riesgo entre 40 y 90, y factores de descuentos subjetivos mayores a 0.99, dependiendo de la especificación del modelo. Las tasas de interés del modelo tienen en promedio una pendiente positiva, una descomposición de Componentes Principales consistente, y predictibilidad como en Cochrane y Piazzesi (2002). **Palabras Clave:** Valuación de Activos basada en el Consumo; Cambios en Regímenes; Preferencias Recursivas; Curva Cupón Cero; Estructura Temporal de Tasas de Interés.

Abstract: This paper studies how inflation as a macroeconomic indicator affects nominal bond prices. I consider an economy with a representative agent with Epstein-Zin preferences. Regime switching affects the state-space capturing inflation and consumption growth. Thus, the agent is concerned about the intertemporal distribution of risk, which is affected by the persistence of the variables and the regimes. Regime switching allows for structural changes in the volatility of unexpected shocks. To the extent that inflationary unexpected shocks indicate lower consumption growth, nominal bond holders need to be compensated for these shocks. It follows that a switch in the regime state affecting the covariance of inflation and consumption growth can be interpreted as a change in the price of risk. I find coefficients of risk aversion from 40 to 90, and subjective discount factors above 0.99, depending on the exact specification of the model. The model yields have on average a positive slope, a consistent Principal Components decomposition, and predictability as in Cochrane and Piazzesi (2002).

Keywords: Consumption-based Asset Pricing; Regime Switching; Recursive Preferences; Yield Curve; Term Structure of Interest Rates.

JEL Classification: G12, E42, E43, E44, E31.

*Esta es una versión revisada de los primeros capítulos de mi disertación doctoral. Expreso mi gratitud a Lars P. Hansen, Fernando Alvarez, y Monika Piazzesi. Estoy agradecido con Santiago Bazdresch, Rodrigo García-Verdú, Gonzalo Rangel, Alberto Torres, Paco Vázquez-Grande, y participantes del Economic Dynamics Working Group en la Universidad de Chicago, y con los participantes en los seminarios del Banco de Canadá, Banco de México, y el ITAM.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: sgarcia@banxico.org.mx.

1 Introducción

Este documento estudia el rol de la inflación como un indicador macroeconómico que afecta los precios de los bonos. Considero una economía con un agente representativo con preferencias Epstein-Zin. El salto de régimen afecta el espacio de estados que captura la inflación, y el crecimiento del consumo. Así, el agente se preocupa por la distribución de riesgo intertemporal, la cual es afectada por la persistencia de las variables y los regímenes.

Considere un incremento no anticipado en la inflación, ello afecta los rendimientos nominales de dos maneras. Directamente, al decrementar el componente real de los rendimientos nominales. Indirectamente, al incrementar los rendimientos nominales hasta el grado que es un preludio de un menor crecimiento del consumo. El último efecto es una compensación para los tenedores de bonos nominales. Adicionalmente, la relación entre inflación, y consumo está sujeta a saltos de régimen. Así, un salto de régimen que afecta la covarianza de la inflación y el crecimiento del consumo puede ser interpretado como un cambio en el precio del riesgo.

Al tener preferencias Epstein-Zin, el agente se preocupa por la distribución de riesgo intertemporal. Intuitivamente, le importa la persistencia en los cambios de variables, y de los regímenes. Así, el entendimiento de la temporalidad de los cambios, en las variables, y en los regímenes, es central para evaluar sus efectos sobre la curva de rendimientos.

El salto de régimen en el modelo es central para el comportamiento implícito de los rendimientos. Primero, un salto de régimen en la matriz de varianza-covarianza de los choques que afectan el crecimiento del consumo y la inflación, implica heterocedasticidad en los rendimientos, y una prima de riesgo variante en el tiempo, una característica documentada de los datos. Segundo, el salto de régimen permite cambios estructurales en la volatilidad de los choques no anticipados. Hasta el grado que los choques no anticipados indican un menor crecimiento del consumo, los tenedores de bonos nominales necesitan ser compensados, como se explicó. Así, un salto de régimen que afecta la covarianza de la inflación y el crecimiento del consumo puede ser interpretado como un cambio en el precio del riesgo. Tercero, un salto de régimen en la inflación promedio se traduce ampliamente a un régimen en el nivel de rendimientos nominales. Los datos de rendimientos de la posguerra han experimentado cambios estructurales en décadas pasadas, particularmente durante los años setentas y ochentas. Los regímenes son clave para explicar estos periodos.

El modelo se apoya en tres supuestos centrales. Primero, la inflación provee un componente predecible al crecimiento del consumo. La inflación luego juega un doble rol en el modelo, no solamente permite obtener los precios de los bonos nominales sino también provee un componente predecible. Segundo, el salto de régimen afecta el modelo que captura la dinámica de la inflación, y el crecimiento del consumo. Su presencia da razón de la dinámica cambiante en el tiempo de estas variables. Tercero, el agente representativo tiene preferencias Epstein-Zin. Bajo estas preferencias la persistencia de las variables, y de los regímenes son de preocupación especial para el agente.

En contraste a las más comunes preferencias separables en tiempo, bajo preferencias recursivas al agente le importa la distribución de riesgo intertemporal. La persistencia de las variables, y de los regímenes afectan cómo el agente percibe la distribución de riesgo intertemporal. Bajo preferencias separables en tiempo el agente es averso al riesgo pero indiferente a la persistencia. Mientras que bajo preferencias recursivas, el agente no solamente es averso al riesgo sino que también tiene un gusto por la persistencia. La persistencia junto con las preferencias recursivas es clave para obtener variabilidad en el Factor de Descuento Estocástico (SDF, por sus siglas en inglés).

Hay tres pasos fundamentales en cómo procedo. Primero, al asumir una elasticidad de sustitución intertemporal igual a uno, obtengo soluciones cerradas para los precios de bonos y para los rendimientos. Segundo, estimo un modelo usando los procedimientos de Máxima Verosimilitud y muestreo de Gibbs, explotando ambos métodos para hacer pruebas estadísticas y para encargarme de aspectos de medición. Tercero, un procedimiento común en la literatura es el de colocar los regímenes directamente en el SDF. En contraste, asumo que el salto de régimen afecta el modelo que captura la inflación y el crecimiento del consumo. Esto *implica* un salto de régimen en el SDF, permitiendo un modelo más estructural.

Encuentro que los coeficientes de la aversión al riesgo desde 40 a 90, y factores de descuento subjetivos arriba de 0.99, dependiendo de la especificación exacta del modelo, pueden capturar hechos estilizados centrales. Primero, el modelo tiene una curva de rendimientos nominales en promedio con pendiente positiva y mayor variabilidad al final de la curva de rendimientos. En contraste, los modelos basados en consumo con preferencias separables en el tiempo implican una curva de rendimientos con pendiente negativa y tienen poca variabilidad al final de la curva de rendimientos, algo no observado en los datos. En el modelo, la curva de rendimientos nominales promedio posee una pendiente positiva

porque los rendimientos en la parte final tienen una compensación mayor de la distribución de riesgo intertemporal en relación a aquéllos en el inicio de la curva.

Segundo, descompongo los rendimientos implícitos del modelo usando el Análisis de Componentes Principales como en Litterman y Scheinkman (1991). Los comparo con la descomposición de los datos de rendimientos, y muestro que tienen una descomposición por Componentes Principales consistente. Un análisis de la dinámica del modelo sugiere por qué la descomposición por Componentes Principales para el modelo de rendimientos es consistente.

Tercero, estudio las desviaciones de la Hipótesis de Expectativas (EH, por sus siglas en inglés) o, equivalentemente, la predictibilidad en los rendimientos. Hay modelos que son exitosos para explicar la predictibilidad en rendimientos al introducir saltos de régimen, e.g. ver Banzal y Zhou (2001). Inclusive, su salto de régimen es incorporado directamente en el SDF, y sus variables de estado son modeladas como latentes sin variables exógenas macroeconómicas explícitas. Los rendimientos del modelo tienen predictibilidad como se ha visto en los datos en términos de la función de forwards con forma de carpa de Cochrane y Piazzesi (2002). Los regímenes junto con las preferencias Epstein-Zin pueden dar razón de esta característica.

Hay por lo menos tres aspectos potenciales con el modelo.

Primero, el grado hasta el que uno puede medir el componente de predictibilidad del crecimiento del consumo dado por la inflación. Para encargarse de este aspecto, considero la distribución de probabilidad de los parámetros estimados para evaluar los errores de medición, y hacer pruebas sobre las series de tiempo del crecimiento del consumo para medir la importancia relativa de su elemento de caminata aleatoria. Segundo, cómo los regímenes exactamente afectan la dinámica. Para ocuparse de este asunto, motivo varias especificaciones del modelo, discuto sus méritos relativos, y hago pruebas estadísticas para compararlas entre sí.

Tercero, el modelo usa cálculos de elementos en el largo plazo. Por su naturaleza estos son difíciles de medir. Discuto los aspectos de la precisión estadística de estas mediciones.

El entendimiento de cómo las variables macroeconómicas afectan los precios de los activos es central en finanzas y macroeconomía. Ambas disciplinas tienen un interés por entender las fuentes macroeconómicas, los cantidades, y los precios del riesgo. El riesgo macroeconómico, o agregado, debería de ser el único riesgo cotizado. Así, una línea de investigación prometedora es el estudio

de medidas de riesgo adicionales, tal como la distribución de riesgo intertemporal, como funciones de variables macroeconómicas, y sus implicaciones sobre los precios de activos. Tomo de Hansen (2006), Hansen (2007), Hansen, Heaton y Li (2008), y para construir sobre el de Piazzesi y Schneider (2006), añadiendo salto de régimen a los fundamentales.¹ Esto da razón de la dinámica variante en el tiempo de las variables macroeconómicas. El modelo conserva, como en Piazzesi y Schneider (2006), la pendiente positiva en las curvas de rendimiento, y adicionalmente explica un número de hechos estilizados.

2 Revisión de Literatura

La valuación de activos basada en consumo ha tenido su flujo y reflujo en décadas pasadas en la literatura económica. Las compuertas fueron abiertas con documentos como los de Lucas (1978), Hall (1978), Mehra y Prescott (1985), Hansen y Singleton (1982), (1983), Campbell y Shiller (1991), Cox, Ingersoll, y Ross (1985), entre otros. El flujo regresó con documentos como los de Constantinides (1990), Abel (1990), Epstein y Zin (1991), Hansen y Jagannathan (1991), Campbell y Shiller (1991), Constantinides y Duffie (1996), y Campbell y Cochrane (1999). La marea actual está formada por documentos como los de Lettau y Ludvigson (2001), Wachter (2006), Piazzesi, Schneider, y Tuzel (2007), Bansal y Yaron (2004), Parker y Julliard (2005), Hansen, Heaton, y Li (2008), entre muchos otros.

Este documento toma de Hansen, Heaton y Li (2008), Hansen (2006), Hansen (2007), y Hansen (2008), para construir sobre el de Piazzesi y Schneider (2006). Comparado con el de Piazzesi y Schneider (2006), examina otros aspectos, usa regímenes, y difiere en la metodología. Una diferencia central entre el documento de Piazzesi y Schneider (2006), y el de Bansal y Yaron (2004) es que mientras el proceso del crecimiento del consumo es estimado en el primero, es calibrado en el segundo. Piazzesi y Schneider (2006) y este documento dependen de poder tener algo de predictibilidad sobre el crecimiento del consumo a través de la inflación. Parker y Julliard (2005), es similar en el sentido de que argumentan que el crecimiento del consumo acumulado tiene un componente predecible, lo cual es compatible con los resultados de las pruebas de CV en este documento.² Para

¹Tres diferencias medulares entre este documento y el de Piazzesi y Schneider (2006) son el uso de salto de régimen, el factor de descuento subjetivo es menor a uno, y el horizonte infinito.

²Vea la subsección 10 para la definición de la prueba.

la predictibilidad de los rendimientos, documentos como el de Banzal y Zhou (2001) exploran las implicaciones. Ellos han tenido éxito usando regímenes para modelar la predictibilidad de los rendimientos.³ En comparación, este documento incorpora saltos de régimen al espacio de estados que captura la dinámica del crecimiento del consumo y la inflación.

Los Modelos de la Estructura de Plazos en tiempo discreto (afín) tienen tres enfoques conceptualmente diferentes en la literatura. El primero, como en este documento, tiene una especificación paramétrica para el SDF.⁴ El segundo, empieza colocando un SDF continuo y luego usa la versión de tiempo discreto del proceso continuo. Este enfoque tiene la propiedad de que a medida que el intervalo de tiempo se reduce, los modelos convergen a sus contrapartes continuas. El tercero, es similar al segundo en el sentido de que inicia con un proceso continuo pero lo aproxima. Para esto, usa, por ejemplo, la expansión de Euler (vea Glasserman (2003)). La selección es una cuestión de objetivos, conveniencia, y flexibilidad.

Una referencia estándar para los efectos empíricos de la política monetaria en el largo plazo es McCandless y Weber (1995), tema en el cual hay menos desacuerdo. En lo concerniente a los efectos en el corto plazo hay mucha más variedad, lo cual refleja el hecho de que hay menos consenso en este asunto. Algunos documentos medulares son los de Lucas (1972) y Calvo (1983). Acerca de los estimados empíricos de los efectos de la política monetaria en el corto plazo, las siguientes son las fuentes representativas: Friedman y Schwartz (1971), un clásico, Sims y Zha (2006) y Christiano, Eichenbaum y Evans (1994). Relevante para la metodología es, por ejemplo, Eichenbaum (1992). Más sobre la cuestión estructural está el documento de Rotemberg y Woodford (1998) como un ejemplo sobresaliente. Maneras alternativas de la medición de choques monetarios son presentadas en Romer y Romer (2003), y Boschen y Mills (1995). Un modelo notable que relaciona la política monetaria al comportamiento de la estructura de plazos de las tasas de interés es Piazzesi (2005). La literatura en estas áreas es vasta y solamente ha nombrado a un número limitado de documentos.

³Aunque, el SDF de su modelo puede ser motivado con un modelo de equilibrio general; incorporan regímenes directamente al SDF, y asumen variables latentes para calibrar su modelo directamente a los datos de los rendimientos.

⁴Estos pueden ser más subdivididos en base a consumo, factores y variables latentes. La frontera entre ellos se empaña y algunos modelos incorporan elementos de los otros.

3 El modelo

Considere una economía con dotación y un agente representativo que tiene preferencias Epstein-Zin. Los precios se ajustan de tal forma que el agente maximiza la utilidad dada su dotación. Los procesos exógenos de consumo e inflación son modelados con el siguiente espacio de estados:

$$\Delta c_{t+1} = \mu_{\Delta c} + x_{1,t} + \epsilon_{1,t+1} \quad (1)$$

$$\pi_{t+1} = \mu_{\pi}(s_{1,t}) + x_{2,t} + \epsilon_{2,t+1}$$

donde

$$\mathbf{x}_{t+1} = (x_{1,t} \ x_{2,t})',$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \phi_x \mathbf{x}_t + K \epsilon_{t+1},$$

c_t denota el logaritmo del consumo y π_t denota la inflación en el tiempo t . La media del crecimiento del consumo $\mu_{\Delta c}$ es un escalar. El choque $\epsilon_{t+1} \equiv (\epsilon_{1,t+1} \ \epsilon_{2,t+1})'$ que afecta a *todas* las ecuaciones está normalmente distribuido con media $(0 \ 0)'$, y la matriz de varianza-covarianza $\Omega(s_{2,t})$. El vector $\mathbf{x}_t$ es latente. ϕ_x y K son matrices de 2×2 . La matriz ϕ_x necesita tener el valor absoluto de sus raíces características estrictamente menor a 1 para que sea un vector $\mathbf{x}_t$ con aleatorias estacionarias. Algunas veces apilo Δc_{t+1} y π_{t+1} en el vector: $\mathbf{z}_{t+1} \equiv (\Delta c_{t+1} \ \pi_{t+1})'$.

La inflación promedio $\mu_{\pi}(s_{1,t})$, un escalar, y la matriz $\Omega(s_{2,t})$ están, respectivamente, sujetas a saltos de régimen con dos regímenes cada una. Los regímenes $s_{1,t}$, $s_{2,t}$ siguen cadenas de Markov con matrices de transición de probabilidades Q y R , respectivamente,

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix}, \quad R \equiv \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{pmatrix}.$$

$q_{i,j} \equiv \Pr[s_{1,t+1} = j | s_{1,t} = i]$ y $r_{i,j} \equiv \Pr[s_{2,t+1} = j | s_{2,t} = i]$ son las probabilidades de salto en un periodo al régimen j dado que la cadena está en el régimen i , respectivamente.⁵ Para propósitos de notación $\mathbf{s}_t \equiv (s_{1,t}, s_{2,t})$. Se asume que estos regímenes tienen diferentes relaciones, e.g. $s_{1,t}$ fijo, correlación perfecta

⁵Para una relación más general entre los dos, podemos definir un nuevo régimen: $\mathbf{s}_t \equiv (s_{1,t}, s_{2,t})$ y así, $M[i, j] = m_{i,j} \equiv \Pr[\mathbf{s}_{t+1} = j | \mathbf{s}_t = i]$ puede ser directamente construido. Note que bajo independencia $M = Q \otimes R$, lo cual asumo para una especificación del modelo.

(i.e. $s_{1,t} = s_{2,t}$), etc.⁶ Esta es la especificación del caso base, más adelante se describen las especificaciones exactas y las extensiones.⁷

La inflación provee un componente predecible para el crecimiento del consumo a través de $\mathbf{x}_t$. Si el crecimiento del consumo hubiera sido modelado como una caminata aleatoria, las preferencias Epstein-Zin y las preferencias de la aversión relativa al riesgo constante (CRRA, por sus siglas en inglés) hubieran sido observacionalmente equivalentes (Kocherlakota (1990)).

Cambios en el régimen en $\mu_\pi(s_{1,t})$ son interpretados como cambios en los regímenes inflacionarios.⁸ Ellos también pueden ser interpretados como cambios en regímenes monetarios. Aunque esta es una interpretación amplia, como podría ser reconocido que típicamente otros parámetros son afectados por los cambios en los regímenes monetarios, permite eludir el problema de decidir cuál es el mejor indicador de un cambio de régimen monetario.⁹ Asimismo, como está bien entendido, hay un rezago entre los cambios en la política monetaria y sus efectos sobre la inflación.

La persistencia de $\mu_\pi(s_{1,t})$ puede ser medida por el tiempo esperado en un régimen, $1/(1 - q_{i,i})$, medido en trimestres. Mientras que la persistencia de ϵ_t en $\mathbf{x}_t$ es capturada por la matriz ϕ_x y puede ser medida por la mitad de vida de un choque, o por la magnitud de las raíces características de ϕ_x . En este sentido, la matriz de transición Q y ϕ_x mantienen un paralelismo. Consecuentemente, cambios, digamos, en $x_{2,t}$ son cotizados en los bonos nominales de manera de diferente a los cambios en $\mu_\pi(s_{1,t})$.

Hasta que grado es este modelo razonable para capturar la dinámica de la crecimiento del consumo y la inflación? Cuáles son las respuestas de las variables a los choques exógenos? Son similares a algunos de los resultados en la literatura? Para dar respuestas iniciales a estas preguntas considero Funciones de Autocovarianza y funciones Impulso-Respuesta del espacio de estados.¹⁰

⁶Es común en la literatura asociar regímenes con expansiones y recesiones, en particular en aquellos modelos donde la producción es una variable de estado. Esta interpretación no es válida en el modelo presentado en este documento.

⁷El espacio de estados puede ser visto como una generalización del proceso AR(1). Note que si $K = \phi_x$ y los regímenes están fijos, se convierte en un AR(1) y, bajo estacionariedad, también puede ser escrito como un proceso PM(∞).

⁸Los regímenes inflacionarios han sido identificados en Evans y Lewis (1995) y Evans y Wachtel (1993).

⁹Por ejemplo, Sims y Zha (2006) consideran diferentes especificaciones de un modelo macroeconómico para estudiar saltos de régimen. Otro ejemplo, en el caso específico de la variable de política monetaria Bernanke y Blinder (1992) han argumentado que el mejor indicador ha cambiado a través del tiempo. La investigación monetaria reciente (vea por ejemplo Woodford en Beyer y Reichlin (2008)) ha apoyado tener directamente a la inflación como variable de política.

¹⁰Para estas Funciones de Autocovarianza y funciones Impulso-Respuesta considero el es-

Primero, la Gráfica 1 describe las Funciones de Autocovarianza de los datos de crecimiento del consumo y la inflación y las Funciones de Autocovarianza promedio para estas mismas variables derivadas del modelo. Recuerde que la Función de Autocovarianza de una serie de tiempo la caracteriza. Excepto para algunos casos en donde los datos se ubican en el intervalo de confianza y la Función de Autocovarianza de los datos está cerca de la Función de Autocovarianza promedio derivada del modelo, lo cual confiere apoyo al modelo propuesto.¹¹

Incondicionalmente, el crecimiento del consumo es menos persistente que la inflación. Hay una relación negativa entre el crecimiento del consumo y la inflación, para a lo mucho 5 trimestres. Estos estimados son ampliamente comparables a aquéllos obtenidos, por ejemplo, en Walsh (2003), donde se encuentra que el deflactor del PIB está negativamente correlacionado con rezagos y adelantos de la producción, lo cual sugiere que las fluctuaciones son conducidas principalmente por choques de oferta o de demanda con precios pegajosos.

Gráfica 1: Funciones de Autocovarianza.

Las Funciones de Autocovarianza para el crecimiento del consumo y la inflación observados. La unidad de tiempo son trimestres en el eje x. Los intervalos de confianza (un 90% de nivel de confianza) y la Función de Autocovarianza promedio son construidas con remuestreo.

pacio de estados sin regímenes. Discuto la estimación más adelante.

¹¹Estrictamente hablando no nos proporciona evidencia en contra del modelo.

Segundo, considero las funciones Impulso-Respuesta (IR) del espacio de estados. Para identificar los choques que afectan el espacio de estados uso la descomposición de Cholesky sobre la matriz de varianza-covarianza estimada. Asumo que un choque de inflación afecta el crecimiento del consumo solamente de una manera contemporánea.

Gráfica 2: Funciones Impulso-Respuesta.

Funciones Impulso-Respuesta a choques de una desviación estándar. El supuesto de identificación es que la inflación afecta el crecimiento del consumo solamente de manera contemporánea. El eje y indica cambio porcentual, en base trimestral. Por ejemplo, un choque a π de una desviación estándar equivale a $1.16\% = (0.29 \times 4)$ en términos anuales. Las unidades de tiempo son trimestres en el eje x. Los intervalos de confianza son contruidos usando el muestreo de Gibbs en 90%.

La Gráfica 2 presenta las funciones Impulso-Respuesta asociadas al espacio de estados. Si un choque a la inflación afecta contemporáneamente el crecimiento del consumo, una sorpresa de una desviación estándar (0.29) conduce a un decremento inmediato de 0.09 puntos porcentuales (i.e. 0.36% en términos anuales) en el crecimiento del consumo. Tiene un efecto acumulado de aproximadamente 1% en términos anuales para los siguientes 5 trimestres. Una sorpresa de una desviación estándar (0.53) en el crecimiento del consumo conduce a un incremento en la inflación de 0.09 puntos porcentuales (i.e. 0.36 % anual), aunque el efecto no es inmediato. La respuesta de la inflación no tiene reacción contemporánea, como se mencionó. Esto puede ser entendido cuando la inflación

tiene cierta pegajosidad. La neutralidad del dinero se observa en el largo plazo. Medularmente, las sorpresas inflacionarias proporcionan información acerca de las perspectivas del crecimiento futuro del consumo.

Estos resultados son estimados estadísticos y pueden ser contrastados con algunos modelos en la literatura.¹² Aunque los modelos describen la dinámica subyacente de las variables, los estimados directos podrían tener la influencia de otras variables que oscurecería esas dinámicas. Aunque, para este modelo, la relación entre los fundamentales es tomada como exógena.

Finalmente, por qué es este modelo potencialmente útil para pensar en la dinámica del crecimiento del consumo, de la inflación y sus relaciones con los rendimientos? Una razón es la siguiente. La Hipótesis de Expectativas (EH, por sus siglas en inglés)¹³ tiende a cumplirse en horizontes largos y en promedio.¹⁴ Si fijamos $\mathbf{x}_t$, otorgándole su valor promedio de largo plazo, i.e. $\mathbf{0}$, fijamos $\mu_\pi(s_{1,t})$, y fijamos la matriz de varianza-covarianza, para obtener los rendimientos, la EH en verdad se cumple en el modelo. Así desde el comienzo sabemos que en promedio será válida.¹⁵ Cochrane (2001), página 428, argumenta que, la EH es una “exposición de diapositivas.” Luego se explora si la lentitud de las variables, la estructura de los regímenes, y las preferencias recursivas pueden explicar la predictibilidad y , así, que no se cumpla la EH.

4 Preferencias

Bajo preferencias Epstein-Zin (1991) y Weil (1990) con una elasticidad de sustitución intertemporal ψ igual a uno, la utilidad está dada por la siguiente expresión recursiva:

$$V_t = C_t^{1-\beta} \text{CE}_t (V_{t+1})^\beta, \quad (2)$$

¹²Un modelo de mercados segmentados predice un decremento en el consumo ante una sorpresa al crecimiento del dinero si suficientes agentes no pueden acceder inmediatamente los mercados financieros. En contraste, Lucas (1972) predice un incremento positivo en la producción ante una sorpresa al crecimiento del dinero. Note que el mapeo de las variables usadas en cada caso no es directo.

¹³La EH puede ser definida en niveles o en logaritmos, el término de la desigualdad de Jensen los hace diferir. Asimismo, la neutralidad al riesgo es una condición necesaria para la EH (definida en niveles) pero no suficiente.

¹⁴Parafraseando a Cochrane (2001), página 427.

¹⁵En efecto, la EH se cumple para el modelo sin regímenes. Pudiéramos, en este caso, observar desviaciones de ella, dependiendo del comportamiento de $\mathbf{x}_t$. Aunque en el modelo, es la presencia de regímenes lo que es clave para explicar las desviaciones de la EH.

donde $\mathbf{CE}_t(V_{t+1}) = \mathbf{E}_t \left(V_{t+1}^{1-\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)}$ es la equivalencia de certidumbre del valor de continuación V_{t+1} . El coeficiente de aversión al riesgo es γ . El factor de descuento subjetivo β es positivo y estrictamente menor a uno.¹⁶ Las preferencias Epstein-Zin tienen dos características distintivas. Primero, la elasticidad de sustitución intertemporal ψ y el coeficiente de aversión relativa al riesgo γ no son iguales como en el caso de preferencias de Aversión Relativa al Riesgo Constante (CRRA, por sus siglas en inglés). Segundo, las preferencias Epstein-Zin capturan la distribución de riesgo intertemporal. El grado de preocupación del agente acerca de la distribución de riesgo intertemporal es medido por γ .

Informalmente, me refiero a la preocupación del agente por la distribución de riesgo intertemporal como un gusto por la persistencia. Específicamente, si $\gamma > 1$ al agente le disgusta la persistencia. Si $\gamma = 1$ el agente es indiferente a la persistencia. Si $\gamma < 1$ al agente le gusta la persistencia. La definición formal es si el agente prefiere una temprana resolución de la incertidumbre vis a vis una tardía resolución de la misma.¹⁷ Para la mayor parte, uso la interpretación del gusto por la persistencia. Los estimados muestran que $\gamma > 1$, así, al agente le disgusta la persistencia, o equivalentemente, el prefiere una resolución temprana de la incertidumbre.

En general, el logaritmo de una variable en mayúsculas es denotado por sus minúsculas, e.g. $\log V_t = v_t$. La ecuación (2) puede ser escrita como:

$$v_t = (1 - \beta)c_t + \beta(1 - \gamma)^{-1} \log \mathbf{E}_t(\exp((1 - \gamma)v_{t+1})). \quad (3)$$

Esta expresión puede ser reinterpretada como la función valor de un agente con una función de utilidad lineal que tiene un operador de sensibilidad al riesgo para el valor de continuación dado por $T(v) = (1 - \gamma)^{-1} \log \mathbf{E}_t(\exp((1 - \gamma)v))$. Vea Whittle (2002) para una descripción general. Tallarini (2000) lo usa en un modelo de ciclos económicos. Asimismo, tiene una liga directa a un problema de un agente que tiene dudas acerca de la especificación de su modelo, vea Hansen y Sargent (2007). Para solucionar la función valor tenemos la siguiente

¹⁶Este supuesto difiere del modelo en Piazzesi y Schneider (2006). Ellos estiman una β mayor a uno y consideran un horizonte finito.

¹⁷Otra interpretación es pensar en dos fuerzas actuando en direcciones opuestas. Hay un disgusto por la persistencia y también hay un gusto por trayectorias de consumo suaves regidas por ψ , la elasticidad de sustitución intertemporal, la cual es 1 en este caso. Cuando $\gamma=1$ estos efectos se cancelan entre si. Vea Restoy y Weil (1998) para una interpretación similar. Otra interpretación mencionada abajo es el cambio de la medición, donde las probabilidades están inclinadas.

proposición, la cual es un caso particular de los resultados en Hansen (2006) y Hansen (2007).

Proposición 1 La solución a la función valor en (3) bajo el espacio de estados en (1) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} v_t &= c_t + \mathbf{E}_t \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \Delta c_{t+k} + f(s_{2,t}) \\ &= c_t + \beta(1 - \beta)^{-1} \mu_{\Delta c} + e'_1 \beta (I - \beta \phi_x)^{-1} x_t + f(s_{2,t}) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $e_1 = (1 \ 0)'$.¹⁸

Prueba Vea Apéndice A.

Un incremento en el consumo o en el crecimiento del consumo esperado descontado, incrementa el valor de continuación. La función f captura la contribución de los cambios de régimen $s_{2,t}$ en el valor de continuación. f toma dos valores, i.e. el mismo número de valores que el número de regímenes. $f(s_{2,t})$ es un vector y $s_{2,t}$ es una función indicadora que señala la entrada relevante.¹⁹ Hay dos efectos que contribuyen a este valor. Primero, un incremento en la volatilidad (i.e. un salto de régimen en $s_{2,t}$) reduce el valor de continuación. Al agente le disgusta el riesgo. Segundo, entre más persistente el régimen $s_{2,t}$ sea, mayor será la diferencia $f(s_{2,t} = 2) - f(s_{2,t} = 1)$. Al agente le disgusta la persistencia.²⁰

5 El Factor de Descuento Estocástico

En esta sección obtengo el Factor de Descuento Estocástico (SDF, por sus siglas en inglés) y describo cómo depende de las variables de estado de mañana y de las diferencias entre regímenes, lo cual puede ser interpretado como “revisiones.” Las magnitudes de estas “revisiones” dependen de la persistencia de las variables y los regímenes. Esta sección toma de Hansen (2006), Hansen (2007), y Hansen, Heaton, y Li (2008).

¹⁸Si el régimen $s_{2,t}$ no existe $f(s_{2,t})$ es una constante.

¹⁹Vea Hansen (2006) para una exposición más general.

²⁰Considere la ecuación (4), el régimen $s_{1,t}$ que afecta la inflación promedio no aparece en el valor de continuación. En contraste, el componente de inflación $x_{2,t}$ afecta el valor de continuación, provee información sobre las perspectivas del crecimiento futuro del consumo. Note que v_t condicionada en la información hasta el tiempo $t - 1$ y en el régimen en el tiempo t tiene una distribución normal.

El SDF real está dado por

$$M_{t+1}^{(r)} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-1} \left(\frac{V_{t+1}}{\mathbf{CE}_t(V_{t+1})} \right)^{(1-\gamma)}. \quad (5)$$

Notando que

$$\mathbf{E}_t \left(\left(\frac{V_{t+1}}{\mathbf{CE}_t(V_{t+1})} \right)^{(1-\gamma)} \right) = 1,$$

podemos interpretar (5) como un SDF bajo preferencias logaritmicas con un cambio de medición que depende de γ . Este cambio de medición inclina las probabilidades pesimistamente cuando $\gamma > 1$. Así, su presencia permite más variabilidad en el SDF en comparación con las preferencias de Aversión Relativa al Riesgo Constante (CRRA, por sus siglas en inglés).

Por la solución al valor de continuación (4) y algo de álgebra el (log) de SDF puede ser expresado como:

$$\log \beta - \Delta c_{t+1} - (\gamma - 1) \underbrace{(\mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{E}_t) \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \Delta c_{t+1+i}}_{\text{"Revisiones" al crecimiento del consumo}} + \underbrace{f(s_{2,t+1}) - \beta^{-1} f(s_{2,t})}_{\text{"Revisiones" a los regímenes}}$$

Hay varios efectos más allá y por encima de las preferencias CRRA. Un resultado estándar, a medida que el crecimiento del consumo Δc_{t+1} se reduce, $m_{t+1}^{(r)}$ se incrementa. La utilidad Epstein-Zin introduce una preferencia para la distribución de riesgo intertemporal. Este documento estima que γ es mayor a uno, lo cual significa que al agente le disgusta la persistencia, como se mencionó. Hay dos componentes multiplicados por $(\gamma - 1)$: las “revisiones” al crecimiento del consumo y las “revisiones” al régimen. Si no hay un componente predecible en el crecimiento del consumo el primer componente es $\Delta c_{t+1} - \mu_{\Delta c}$. Si hay menos persistencia en los regímenes el segundo componente es más pequeño. Si Ω no tiene regímenes, entonces el segundo componente es constante.

Los cambios en el componente de “revisiones” $(\mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{E}_t) \sum_i \beta^i \Delta c_{t+1+i}$ son una preocupación para el agente. Por ejemplo, una revisión al alza en el crecimiento del consumo reduce el factor de descuento estocástico, y vice versa. Como los estimados lo muestran, una revisión positiva en la inflación señala un decremento en el crecimiento del consumo.²¹ Esto significa que los componentes de la inflación $x_{2,t+1}$ y $x_{2,t}$ afectan el SDF real; como se explicó, la inflación tiene contenido informativo para el crecimiento del consumo esperado. Sucede que los

²¹Esta relación es explícita cuando los operadores de media son calculados.

bonos reales dependen de los componentes de la inflación, quizás inicialmente un resultado contraintuitivo.

Como una consecuencia de las propiedades de f , una revisión al alza en el régimen de volatilidad (capturado por $f(s_{2,t+1}) - \beta^{-1}f(s_{2,t})$) reduce el SDF, al agente le disgusta el riesgo. Además, la persistencia medida por las probabilidades de transición $r_{i,i}$, hará la diferencia $f(s_{2,t+1}) - \beta^{-1}f(s_{2,t})$ mayor, así, reduciendo el factor de descuento estocástico. Al agente le disgusta la persistencia. El agente sabe que dado un salto de régimen a uno de mayor volatilidad, y más persistencia, mayor volatilidad estará en la economía por más tiempo. Intuitivamente, hay una sensación de que “cuando las cosas andan mal suelen empeorar.” Estos efectos son exacerbados entre más grande sea γ .

El modelo para el SDF puede ser visto como un factor lineal condicional de la forma $m_{t+1}^{(r)} = \mathcal{A}(s_{2,t+1}, s_{2,t}) + \mathcal{B}'(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t)$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son funciones no definidas aquí. Este SDF podría recordarle al lector otros en la literatura, por ejemplo aquéllos en Ang et al. (2004) y Singleton et al. (2007). Los suyos, sin embargo, aunque pueden ser motivados como tales, no son modelos basados en consumo pero directamente dependen de la existencia del SDF.

El SDF nominal es $M_{t+1} \equiv M_{t+1}^{(r)}/\Pi_{t+1}$, donde Π_{t+1} significa el nivel de precios en el tiempo $t+1$ sobre el nivel de precios en el tiempo t . Sucede que el (log) del SDF nominal puede ser escrito como:

$$m_{t+1} = m_{t+1}^{(r)} - \pi_{t+1}$$

Así, la inflación tiene un doble rol en el (log) del SDF nominal. El primero está dentro de las “revisiones” al crecimiento del consumo. El segundo es para estandarizar el (log) del SDF real para que tenga precios en términos nominales.²²

6 Valuación de Bonos y Rendimientos

Una ventaja del modelo es que una solución exacta para los precios de bonos es posible. Las derivaciones están basadas en los resultados en Hansen, Heaton y Li (2008), Hansen (2006), y Hansen (2007). Permitamos que $P_t^{(n),r}$ denote el precio de un bono real, i.e. un bono que paga una unidad de consumo, en el tiempo t y que madura en n periodos. El precio de un bono nominal, i.e. un bono que paga un dólar, se denota por $P_t^{(n)}$. La relación básica para el precio

²²Otra interpretación para el SDF está en el apéndice.

de un bono real está dada por:

$$P_t^{(n),r} = \mathbf{E}_t \left(M_{t+1}^{(r)} P_{t+1}^{(n-1),r} \right). \quad (6)$$

Debido a que $P_{t+n}^{(0),r} = 1$ y por la ley de las expectativas iteradas sucede que:

$$P_t^{(n),r} = \mathbf{E}_t \left(\exp \left(\sum_{k=1}^n m_{t+k}^{(r)} \right) \right) \quad (7)$$

donde he denotado $\log M_{t+k}^{(r)}$ por $m_{t+k}^{(r)}$. El precio de un bono nominal en el tiempo t es denotado por $P_t^{(n)}$, un bono que paga un dólar en n periodos, puede ser escrito como:

$$P_t^{(n)} = \mathbf{E}_t \left(\exp \left(\sum_{k=1}^n m_{t+k} \right) \right) = \mathbf{E}_t \left(\exp \left(\sum_{k=1}^n m_{t+k}^{(r)} - \pi_{t+k} \right) \right), \quad (8)$$

donde $M_{t+k} = M_{t+k}^{(r)} / \Pi_{t+k}$, Π_{t+k} es el nivel de precios en el tiempo $t+k$ sobre el nivel de precio en el tiempo $t+k-1$; entonces, $\log M_{t+k} = \log M_{t+k}^{(r)} - \log \Pi_{t+k}$. Para una solución cerrada tenemos los siguientes resultados.²³

Proposición 2. El precio de un bono nominal en el tiempo t que madura en n periodos condicionado a los regímenes y las variables de estado para el caso de regímenes independientes puede ser expresado como:

$$P_t^{(n)}(\mathbf{x}_t, \mathbf{s}_t) = \exp(-A(n) - \mathbf{B}(n)' \mathbf{x}_t - F(s_{2,t}, n) - G(s_{1,t}, n)),$$

donde $A(n)$ es un escalar y $\mathbf{B}(n)$ es un vector de 2×1 , $F(s_{2,t}, n), G(s_{1,t}, n)$ son funciones que toman el mismo número de valores que de regímenes, para una n dada. Explícitamente,

$$\begin{aligned} A(n) &= -nh \\ \mathbf{B}(n) &= - \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\phi'_x)^i \right) w \text{ si } n > 0 \text{ y } \mathbf{0} \text{ si } n = 0. \end{aligned}$$

donde $h = \log(\beta) + \mu_{\Delta c}$ y $w = -(1 \ 1)'$, estos dependen de la especificación

²³En lo siguiente uso el caso de regímenes independientes, aunque fórmulas análogas se cumplen para el caso general (vea Apéndice C).

exacta del modelo.²⁴ F y G satisfacen un conjunto de ecuaciones recursivas.

Prueba Vea Apéndice C.

Para el precio de bonos reales tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1 El precio de un bono real en el tiempo t que madura en n periodos como una función de variables de estado y el régimen $s_{2,t}$ puede ser escrito como

$$P_t^{(n),r}(\mathbf{x}_t, s_{2,t}) = \exp(-A_r(n) - \mathbf{B}_r(n)' \mathbf{x}_t - F_r(s_{2,t}, n)),$$

donde, como arriba, $A_r(n)$ es un escalar y $\mathbf{B}_r(n)$ es un vector de 2×1 , $F_r(s_{2,t}, n)$ es una función que toma el mismo número de valores que de regímenes, para una n fija. $A_r, \mathbf{B}_r(n)$ son:

$$\begin{aligned} A_r(n) &= -nh_r \\ \mathbf{B}_r(n) &= -\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\phi'_x)^i\right) w_r \text{ si } n > 0 \text{ y } \mathbf{0} \text{ si } n = 0. \end{aligned}$$

donde $h_r = \log(\beta) + \mu_{\Delta c}$ y $w_r = -(1 \ 0)'$. Análogamente, éstas dependen de la especificación exacta del modelo. F_r satisface un conjunto de ecuaciones recursivas. Note que se excluye el régimen asociado a la inflación promedio, un resultado recordativo de la estructura de la función f en el (log) del valor de continuación v .

Prueba Vea Apéndice C.

El rendimiento de un bono nominal se define por $y_t^{(n)} \equiv -\log(P_t^{(n)})/n$, mientras el rendimiento real como $y_t^{(n),r} \equiv -\log(P_t^{(n),r})/n$. Así, las expresiones para los rendimientos se obtienen directamente.

Para finalizar esta sección, muestro algunas fórmulas útiles que ligán a los rendimientos nominales y reales con las variables macroeconómicas en la mayoría de las especificaciones de modelo. Las siguientes relaciones se cumplen si fijamos el régimen $s_{1,t}$, y solamente tenemos el régimen, $s_{2,t}$, asociado a la matriz de

²⁴Por ejemplo, la especificación de los regímenes del modelo no tiene una solución explícita para A .

varianza-covarianza.²⁵

$$\begin{aligned}
y_t^{(n)} - \mathbf{E}y_t^{(n)} &= \frac{1}{n}\mathbf{E}_t \sum_{i=1}^n (\Delta c_{t+i} - \mathbf{E}\Delta c_{t+i}) + \frac{1}{n}\mathbf{E}_t \sum_{i=1}^n (\pi_{t+i} - \mathbf{E}\pi_{t+i}) + \\
&\quad + (F(s_{2,t}, n) - \mathbf{E}F(s_{2,t}, n))/n \\
y_t^{(n),r} - \mathbf{E}y_t^{(n),r} &= \frac{1}{n}\mathbf{E}_t \sum_{i=1}^n (\Delta c_{t+i} - \mathbf{E}\Delta c_{t+i}) + (F_r(s_{2,t}, n) - \mathbf{E}F_r(s_{2,t}, n))/n.
\end{aligned}$$

Los casos sin regímenes y con régimen de estas fórmulas tienen una diferencia importante. Mientras que, en el caso sin regímenes, las versiones de estas ecuaciones son independientes del valor de γ , los casos con regímenes son afectados por γ a través de F y F_r . Relaciones más generales, en el caso donde hay un régimen en $\mu_\pi(s_{1,t})$, no son posibles con rendimientos nominales. A conocimiento del autor, una solución explícita para los componentes de los rendimientos que capturan el cambio en $s_{1,t}$ no es asequible.

7 Estimación

El modelo es estimado en dos pasos. Primero, el espacio de estados es estimado con los métodos de Máxima Verosimilitud (ML, por sus siglas en inglés) o muestreo de Gibbs (GS, por sus siglas en inglés). Segundo, los parámetros de preferencias, γ and β , se obtienen al minimizar la distancia entre el promedio de corte transversal de los rendimientos implícitos en el modelo y los rendimientos en los datos.

Hay por lo menos dos razones para usar un procedimiento de dos pasos.²⁶ Primero, ello simplifica la estimación. Resulta retador estimar la función de verosimilitud del espacio de estados sin regímenes. Así, la añadidura de regímenes lo hace más retador. Segundo, hay una necesidad de separar las variables macroeconómicas de las financieras, debido a que las últimas están mejor medidas.²⁷

Las variables de estado $\mathbf{x}_t$ son estimadas asumiendo que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y usando el espacio de estados para sacarlas.²⁸ Para la probabilidad de estar en un régimen

²⁵Ellas son una generalización del caso sin regímenes como en Piazzesi y Schneider (2006).

²⁶Una estimación conjunta es una alternativa que sólo inicialmente fue perseguida. El paso clave es modelar explícitamente los errores de medición de los rendimientos. Asuma que estos errores de medición son independientes a los choques que afectan el espacio de estados y, finalmente, construya la verosimilitud para usar ML. Los detalles se dan en el Apéndice E.

²⁷Las variables financieras no están exentas de errores de medición, e.g. el fenómeno de microestructura.

²⁸Los resultados son robustos al valor del punto de partida, $\mathbf{x}_0$. La segunda posibilidad es

considere lo siguiente. Recuerde la notación $\mathbf{z}_{t+1} \equiv (\Delta c_{t+1} \quad \pi_{t+1})$ y denote $\mathbf{z}^{(t)}$ como $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_t\}$, lo cual recoge la historia hasta el tiempo t de la variable $\mathbf{z}$. Para tener una evaluación de probabilidad del régimen actual, $Pr(s_t|\mathbf{z}^{t-1})$, la inferencia óptima o, $Pr(s_t|\mathbf{z}^T)$, el suavizamiento óptimo, puede ser usado. Uso las inferencias óptimas. Para la valuación, para determinar qué régimen prevalece, seleccioné el régimen con la más alta probabilidad en el tiempo t . La estimación de $\mu_\pi(s_{1,t})$ es problemática, dado que $x_{2,t}$ introduce ruido. Para las estimaciones, fijo estimados específicos sobre valores plausibles para $\mu_\pi(s_{1,t})$.²⁹ Esto equivale a usar GS con un prior informativo.

En lo concerniente a la identificación tenemos las siguientes cuestiones. Dado que ϵ se distribuye normalmente la función de verosimilitud es relativamente fácil de obtener. No es difícil construir el algoritmo del muestreo de Gibbs dada la disponibilidad de las funciones de densidad condicionadas (excepto para K). Como un supuesto de identificación fijo $\mathbf{x}_0 = [0 \quad 0]'$, como se mencionó. Bajo estos supuestos $\Omega(s_{2,t})$, $\mu_{\Delta c}$, $\mu_\pi(s_{1,t})$, ϕ_x , K , Q , y R son identificadas. Un estimado de $\mathbf{x}_t$ puede ser recuperado como se describió arriba. Vea Apéndice E para más detalles.

Estimo las siguientes especificaciones de modelo:

1. **Sin regímenes**: No hay regímenes que afecten el espacio de estados.
2. **Heterocedasticidad**: se fija el régimen $s_{1,t}$, i.e. μ_π es constante, y el régimen $s_{2,t}$ afecta $\Omega(s_{2,t})$.
3. **Independientes**: el régimen $s_{1,t}$ afecta $\mu_\pi(s_{1,t})$, y $s_{2,t}$ afecta $\Omega(s_{2,t})$, y los regímenes $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes.
4. **Mismos**: $s_{1,t}$ afecta $\mu_\pi(s_{1,t})$ y $\Omega(s_{1,t})$. En otras palabras, $s_{1,t} = s_{2,t}$.

Si o no el crecimiento del consumo tiene choques heterocedásticos, en particular en las últimas décadas, es una cuestión debatible.³⁰ Para todas las especificaciones asumo que $\Omega(s_2 = 1)_{11} = \Omega(s_2 = 2)_{11}$. Los regímenes en Ω_{22} son motivados por la observación de que la varianza de la inflación es variante

que bajo una estimación conjunta se asume que hay dos (i.e. el mismo número que variables de estado) rendimientos medidos sin errores. Entonces, las variables $\mathbf{x}_t$ son sacadas de estos rendimientos.

²⁹Las medias estimadas en la especificación **S** son usadas para la especificación **I**. Otros criterios podrían ser usados, pero al mismo tiempo opciones ad-hoc para las medias, $\mu_\pi(s_{1,t})$, debieran ser evitadas.

³⁰Este supuesto difiere en documentos relacionados en la literatura, e.g. Bansal y Yaron (1995) asumen que sí. Mientras que, por ejemplo, Cochrane (2005) lo critica.

en el tiempo. Si o no la covarianza está sujeta a regímenes depende de cómo su estructura de régimen se relaciona con las varianzas del crecimiento del consumo y la inflación.³¹

Dada la estructura de los regímenes, en los estimados el régimen con alta varianza se asocia con alta covarianza, y vice versa. En este régimen, los choques de inflación son en promedio más grandes y predicen un mucho menor crecimiento del consumo, dada la mayor (en valor absoluto) covarianza negativa. Así, un salto de régimen que afecta la covarianza entre la inflación y el crecimiento del consumo puede ser interpretado como un cambio en el precio del riesgo.

Sims y Zha (2006) intentan determinar si hubieron saltos de régimen de política monetaria usando una forma reducida de modelo. Concluyen que los regímenes están generalmente asociados a cambios en el choque de varianza-covarianza de su sistema. Podríamos pensar en la especificación **H** como la más cercana a la de ellos. Los regímenes en $\mu_\pi(s_{1,t})$ son motivados por los cambios drásticos en la inflación promedio durante los años setentas y ochentas. Un supuesto que no es obvio es la relación entre los saltos de régimen, $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$. Aunque una relación general es deseable, su estimación resultó ser difícil.³² Esto es recordativo de los retos para estimar las correlaciones cruzadas en otras partes del modelo.

8 Datos y Código

Los datos de consumo y de los índices de precios se obtienen de las Cuentas Nacionales de Ingreso y Producción (NIPA, por sus siglas en inglés). Solamente los bienes no duraderos y los servicios son considerados para construir la variable de consumo.³³ Un índice de precios correspondiente es construido como una medida de inflación.³⁴ Los rendimientos de los bonos con vencimientos may-

³¹Una posible manera para pensar en ello, es descomponer los choques como funciones de factores, es decir, $\epsilon_1 = \sum a_i Z_i$ y $\epsilon_2 = \sum b_i Z_i$, donde las Z s son normales estandarizadas i.i.d.. La configuración de regímenes entonces depende de cómo los regímenes afectan los coeficientes a s y b s.

³²La especificación para la relación general entre $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ fue estimada. El modelo también puede ser resuelto bajo esta especificación. Pero, no está claro si un máximo se alcanza en la optimización, así, este caso no es perseguido. Asimismo, el supuesto de independencia hasta cierta medida depende del número de regímenes.

³³Este es un procedimiento común en la literatura. La cuestión es que derivamos la utilidad de consumir un “dividendo” de un bien duradero, no del mismo bien duradero. Un modelo adicional tendría que ser introducido para dar razón de este asunto. El supuesto subyacente es que el consumo de bienes duraderos y servicios es separable.

³⁴Su construcción sigue a aquella en Piazzesi y Schneider (2006). La construcción de un índice de precios correspondiente para la canasta de consumo usada es relevante. Algunos

ores a uno provienen de los archivos Fama-Bliss de bonos sin cupón del Centro para la Investigación de Precios de Valores (CRSP, por sus siglas en inglés). El rendimiento de corto plazo proviene de la tasa libre de riesgo del CRSP Fama. Los vencimientos son 1 trimestre, 1 año, 2, 3, 4 y 5 años. Se asume un crecimiento constante de la población, vea Apéndice E para detalles. El Cuadro 1 presenta las estadísticas básicas de los datos usados y el Apéndice D contiene información complementaria a estas series.

Cuadro 1: Estadísticas Básicas.

Estas son las estadísticas básicas para el crecimiento del consumo, inflación, y para los rendimientos usados en el modelo. La unidad de tiempo son trimestres. Por ejemplo, la inflación promedio anual es $3.71\% = (0.9267 \times 4)$, mientras que el rendimiento trimestral promedio anual es $5.15\% = (1.2869 \times 4)$. Las series van desde 1952:2 a 2005:3. El consumo proviene de los datos de NIPA sobre bienes no duraderos y servicios. El índice de inflación es construido de los índices de precios de NIPA correspondientes. Los rendimientos son tomados de CRSP Fama-Bliss y de la tasa libre de riesgo CRSP Fama. m. significa media, d.e. desviación estándar, y CAC coeficiente de autocorrelación con una correlación reza-gada.

	Δc	π	1Q	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y
m	0.8230	0.9267	1.2869	1.3893	1.4408	1.4832	1.5147	1.5351
d.e.	0.5712	0.6293	0.7288	0.7307	0.7208	0.7029	0.6961	0.6849
CAC	0.3528	0.8471	0.9382	0.9468	0.9560	0.9620	0.9664	0.9695

Del Cuadro 1, la inflación tiene una media mayor, más variabilidad, y es más persistente que el crecimiento del consumo. La media de los rendimientos se incrementa con el vencimiento. Con excepción del vencimiento de 1 trimestre, la volatilidad en los rendimientos disminuye a medida que el vencimiento se incrementa. Los rendimientos son más persistentes que la inflación y el crecimiento del consumo, y la autocorrelación en los rendimientos ligeramente se incrementa con el vencimiento.

Del Cuadro 2, la inflación está negativamente correlacionada con el crecimiento del consumo; así, estas estimaciones son consistentes con la idea de que la alta inflación está asociada a un bajo crecimiento del consumo. Los rendimientos de los diferentes plazos están altamente correlacionados, lo cual

modelos en la literatura, vea e.g. Wachter (2006), usa directamente el índice de precios al consumidor (CPI, por sus siglas en inglés) aunque la variable de consumo usada no sea una canasta de consumo general.

Cuadro 2: **Coefficientes de Correlación.**

Este cuadro presenta los coeficientes de correlación de las principales variables: crecimiento del consumo, inflación, rendimientos de 1 trimestre, 1 año, ..., y 5 años.

	Δc	π	1T	1A	2A	3A	4A	5A
Δc	1.0000	-0.3595	-0.1790	-0.1600	-0.1522	-0.1544	-0.1601	-0.1593
π	-0.3595	1.0000	0.6790	0.6650	0.6408	0.6208	0.6082	0.6040
1T	-0.1790	0.6790	1.0000	0.9884	0.9743	0.9598	0.9468	0.9360
1A	-0.1600	0.6650	0.9884	1.0000	0.9931	0.9831	0.9722	0.9633
2A	-0.1522	0.6408	0.9743	0.9931	1.0000	0.9970	0.9914	0.9860
3A	-0.1544	0.6208	0.9598	0.9831	0.9970	1.0000	0.9980	0.9950
4A	-0.1601	0.6082	0.9468	0.9722	0.9914	0.9980	1.0000	0.9985
5A	-0.1593	0.6040	0.9360	0.9633	0.9860	0.9950	0.9985	1.0000

disminuye a medida que se incrementa la diferencia entre los vencimientos. La inflación conserva una correlación positiva con todos los rendimientos, mientras que el crecimiento del consumo tiene una correlación negativa con todos los rendimientos. Un objetivo clave es entender la interacción entre estas variables y cómo ésta podría haber cambiado.

La mayoría de los algoritmos son codificados e implementados por el autor.³⁵ Los algoritmos fueron probados al generar datos simulados para los cuales los parámetros son conocidos, bajo estas circunstancias proveen estimados razonables. El guión para la construcción del índice de precios es tomado de Piazzesi y Schneider (2006).

9 Estimación por Máxima Verosimilitud

Para la Estimación por Máxima Verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés) bajo saltos de régimen sigo a Hamilton (1994).³⁶ La función de densidad de probabilidad condicionada al régimen es: $f(\mathbf{z}_{t+1}|s_t)$. Dado que los regímenes son latentes, una observación pudo haber provenido de cualquiera de los regímenes. Las inferencias óptimas son usadas, $Pr(\mathbf{s}_t|\mathbf{z}^{(t)})$, para evaluar la probabilidad del régimen prevaleciente, como se mencionó (vea el Apéndice E para los detalles).

³⁵Ellos fueron codificados e implementados en MATLAB, Version 7.8.0.347 (R2009a). Se necesitan las utilerías de Estadística y Optimización para correr los códigos.

³⁶Hamilton (1994) ofrece dos algoritmos: la optimización directa de la Máxima Verosimilitud y el algoritmo E.M., por conveniencia uso el primero.

El Cuadro 9, en el apéndice, presenta los estimados para el caso de $s_{1,t}$ siendo fijo y un salto de régimen en $\Omega(s_{2,t})$, especificación **H**. El Cuadro 10 presenta los estimados para el caso de regímenes independientes $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$, asociados a la inflación promedio y a la matriz de varianza-covarianza, respectivamente, i.e. especificación **I**. El Cuadro ?? presenta los estimados para el caso en el cual $s_{1,t} = s_{2,t}$, especificación **M**.

Los estimados para $\Omega(s_{2,t})$ no traslapan el intervalo de confianza para ninguno de los parámetros del otro régimen, evidencia de la presencia de regímenes. La covarianza negativa condicional está presente en ambos regímenes. Un régimen está asociado a alta volatilidad en el cual los choques a la inflación y sus efectos sobre el consumo son más grandes (en valor absoluto).

Las persistencias de $x_{1,t}$ y $x_{2,t}$ pueden ser medidas con las raíces características de ϕ_x o con las vidas medias de los choques sobre ϵ , como se mencionó. Considere los Cuadros 8, 9, y 10 en el Apéndice E. El componente de inflación es mucho más persistente. El componente del crecimiento del consumo es ligeramente persistente. La varianza del componente del crecimiento del consumo, $e_1' K \Omega(s_{2,t}) K' e_1$, es pequeña en relación a los choques que afectan el crecimiento del consumo, $e_1' \Omega(s_{2,t}) e_1$. La persistencia de los regímenes es medida por las probabilidades de transición en las matrices asociadas a los regímenes, Q y/o R o con el tiempo esperado en un régimen, dado, e.g. por $1/(1 - r_{i,i})$.

Los parámetros que no son afectados por los regímenes están cerca de las estimaciones en otras especificaciones, e.g. vea Cuadro 8 en el Apéndice E. Sin embargo, una importante diferencia entre las especificaciones es el estimado de $\mathbf{x}_t$. La configuración exacta de los regímenes tiene implicaciones sobre este objeto.

Pruebas de Régimen

La presencia de saltos de régimen tiene motivaciones económicas. Pero, es no obstante útil para hacer algunas pruebas estadísticas. La prueba para la presencia de regímenes o el número de regímenes es retardadora.³⁷ Las pruebas comunes, e.g. el cociente de verosimilitud, no aplican debido a que bajo la hipótesis nula un conjunto de parámetros generalmente no es identificado. Para superar esta dificultad, uso la prueba para salto de régimen del Cociente de Verosimilitud Modificado (MLR, por sus siglas en inglés) de Kasahara et al.(2008).³⁸ El es-

³⁷La presencia de regímenes se refiere a comparar uno con más regímenes y el número de regímenes a comparar dos con más.

³⁸Referirse a Kashara et al.(2008) para los detalles.

tadístico es $MLR \equiv \max_p \max_\theta (L(\theta, p) - L(\theta_{Rest}, p))$, que bajo la nula tiene una distribución $(\max\{G, 0\})^2$, donde G tiene una distribución normal estándar. L es la función de verosimilitud que usa las probabilidades incondicionales de estar en un régimen y una función de penalización de la forma $Tc_T \log(p(1-p))$, donde p es la probabilidad incondicional de estar en un régimen, y c_T converge a 0 a medida que T tienda a infinito. Esta función de penalización evita la subidentificación de p bajo la nula (i.e. sin o menos regímenes). La distribución de MLR puede ser tabulada, los valores críticos son 2.8 al 10% y 3.8 al 5%. Y donde aplica, uso la prueba del Cociente de Verosimilitud, $-2(L(\theta_{Rest}) - L(\theta_{UnRest}))$. El Cuadro 3 presenta las estadísticas. En conjunto, estadísticamente, el caso de regímenes es apoyado, vea la primera fila en el cuadro.³⁹ Hablando holgadamente, la prueba que compara las especificaciones **M** y **H**, apoya al primero. Las pruebas que comparan **I** con **M** o **H**, apoyan **I**.

Cuadro 3: **Las Pruebas del Cociente de Verosimilitud Común y Modificado.**

El * indica que la prueba falló en rechazar la nula al 10%. Las letras, **S**, **H**, **I**, **M**, significan Sin regímenes, Heterocedasticidad (régimen solamente en Ω), Independientes ($s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes), y Mismos ($s_{1,t} = s_{2,t}$), respectivamente. La nula es la especificación que restringe, i.e. sin o menos regímenes. El † indica que se trata de una prueba de cociente de verosimilitud común, de otra manera es una prueba de cociente de verosimilitud modificado. Los valores críticos para el MLR son aproximadamente 3.85 al 5% y 2.69 al 10%. La especificación de la fila es la hipótesis nula, i.e. la que restringe la estimación comparada con la columna.

Especificación	S	H	I	M
S	-	5.11	5.58	5.40
H	-	-	81.1	13.45†
I	-	-	-	-
M	-	-	26.29†	-

³⁹Un tercer régimen es una posibilidad que no fue perseguida en ninguno de los saltos de régimen.

10 Estimación del Muestreo de Gibbs

El método de estimación del muestreo de Gibbs (GS, por sus siglas en inglés)⁴⁰ provee algunas herramientas para el presente análisis: a) los estimados de los parámetros como un resultado de salida básico; b) las distribuciones posteriores de cada parámetro para construir los intervalos de confianza para las Funciones Impulso-Respuesta (vea la Gráfica 2); c) la distribución posterior de las raíces características de la matriz ϕ_x , para evaluar la estacionariedad de las variables y la validez de tomar el límite de las sumatorias de la forma $\sum_i^n \beta^i \phi_x^i$; d) los estimados de un conjunto de pruebas estadísticas para evaluar la persistencia del componente en el crecimiento del consumo; y, e) las distribuciones posteriores de las respuestas de corto, largo plazo, y sumatorias de choques al infinito descontadas. Con excepción de la segunda. Estas son examinadas abajo.

El pseudo-código del algoritmo usado está en el Apéndice E. Los priors usados para los parámetros GS no son informativos, excepto para el caso de K el cual proviene del estimado de MLE. Las Gráficas 3 y 4 presentan las distribuciones posteriores estimadas para los parámetros clave del espacio de estados, ϕ_x y Ω , en el caso sin regímenes.

Las distribuciones posteriores de los elementos $\phi_x[i, j]$ donde $i \neq j$ muestran la dificultad para evaluar la significancia económica y estadística de los efectos cruzados, tanto en el corto como en el largo plazo. Este es particularmente el caso para $\phi_x[1, 2]$. Aunque en las colas, el soporte de ambas distribuciones posteriores contiene el cero. En contraste, los elementos en $\phi_x[i, j]$ donde $i = j$, llevan la significancia de los efectos directos de las variables. Una cuestión crucial es el grado hasta el cual estos objetos y sus medidas, en relación a la dinámica de corto plazo de las variables, son adecuados para evaluar los efectos de largo plazo. Respecto a las distribuciones posteriores de Ω , las covarianzas económicas y estadísticas condicionales no son un asunto de importancia, comparado con los elementos fuera de la diagonal en ϕ_x .

La prueba del Cociente de Varianza

Un supuesto central en el modelo es que el crecimiento del consumo no es una caminata aleatoria. En contraste, por lo menos desde Hall (1978), el supuesto

⁴⁰El muestreo de Gibbs provee muestras aproximadas de la distribución cuando el muestreo directo es difícil y el acceso a las distribuciones marginales es posible. Tiene incertidumbre paramétrica incorporada. Fue propuesto por Geman y Geman (1984) y es un caso especial del algoritmo de Metropolis-Hastings (vea el Apéndice E).

Gráfica 3: La distribución posterior de ϕ_x .

Los priors usados no son informativos con excepción de K el cual proviene del MLE. La notación $[i, j]$ denota las entradas i^{th} y j^{th} .

Gráfica 4: La distribución posterior de Ω .

Los priors usados no son informativos con excepción de K el cual proviene del MLE. La notación $[i, j]$ denota las entradas i^{th} y j^{th} .

de que el crecimiento del consumo sigue una caminata aleatoria ha sido usado en la literatura.⁴¹ Estas hipótesis rivales para la distribución del crecimiento del consumo son modulares para el uso de las preferencias Epstein-Zin. Cuando el crecimiento del consumo es una caminata aleatoria, las preferencias Epstein Zin y CRRA son observacionalmente equivalentes⁴² (Kocherlakota (1990)). El Cociente de Varianza es $\frac{1}{K} \frac{Var(c_{t+K}-c_t)}{Var(c_{t+1}-c_t)}$, usado en Cochrane (1988). Bajo la nula de una caminata aleatoria su distribución tiene media 1, para toda $K = 1, 2, 3, \dots$. Hago simulaciones usando el muestreo de Gibbs para obtener la distribución del Cociente de Varianza bajo la observada y bajo la nula. La Gráfica 5 presenta la distribución para tres rezagos, 6 meses, 1 año y 2 años ($K = 2, 4$ y 8) bajo los datos. Los estadísticos estimados son 1.3417, 1.7731 y 2.0773, respectivamente. Todos ellos se ubican fuera del soporte de la distribución simulada bajo la nula. Así, esto provee evidencia en contra de la hipótesis de la caminata aleatoria. Un componente como $x_{1,t}$ explicaría las desviaciones de la nula en la dirección observada. La pregunta es qué explica $x_{t,1}$ económicamente, más allá de la interpretación estadística.

El conjunto de información usado es central para la predictibilidad. Se asume que las variables en el espacio de estados son las únicas que están en el conjunto de información del agente. Consecuentemente definen ex-ante el riesgo macroeconómico en el modelo, pero otras podrían ser relevantes. Algunos documentos incorporan otras variables macroeconómicas, e.g. Hansen, Heaton y Li (2008) usan ingresos corporativos, en su modelo de valuación de activos. En nuestro caso, el uso de una tercera variable en el modelo es para tener información más allá y por encima de aquella contenida en la inflación.⁴³

Distribuciones posteriores de elementos clave

El modelo mide elementos en el largo plazo; así, es importante examinar la precisión estadística de sus mediciones. Considero las distribuciones posteriores de seis elementos. Primero, la respuesta del crecimiento del consumo a un choque a la inflación, después de un trimestre y después de 20 trimestres. Miden

⁴¹Dos aspectos relacionados son: i) los componentes exactos usaron el consumo, e.g. sin o con bienes duraderos; y, ii) el conjunto de información usado, debido a que otras variables podrían proveer información que podría influir la estimación.

⁴²Hansen y Sargent (2006) van un paso más allá y consideran un modelo en el cual el agente asume que son posibles ambos modelos para el crecimiento del consumo, y tiene dudas de especificación acerca de su modelo.

⁴³Exploré esto con los estimados iniciales. El apéndice tiene estimados que usan el crecimiento del ingreso laboral como una tercera variable. No está claro si tiene información no contenida en el crecimiento del consumo o en la inflación.

Gráfica 5: La distribución posterior del estadístico del CV.

La función de densidad de probabilidad posterior es presentada para $K = 2, 4$ y 8 , para medio año, un año y dos años.

la precisión de la información contenida en la inflación para las perspectivas del crecimiento futuro del consumo. Segundo, la distribución de cuatro elementos en $\sum_i^\infty \beta^i \phi_x^i = (I - \beta \phi_x)^{-1}$, reflejan las respuestas esperadas descontadas del crecimiento del consumo y de la inflación. Note que la convergencia es influida por β .⁴⁴ Es similar a la expresión $\sum_i^n \phi_x^i$, usada en los rendimientos (recuerde la definición de $\mathbf{B}(n)$). Así, el análisis también debería de proporcionar claridad. El estimado, ϕ_x^n , es clave para las implicaciones del modelo. Se relaciona con la medición de los precios del riesgo, y el comportamiento esperado de las variables en el futuro cercano y lejano.

La Gráfica 6 sugiere que inflación positiva no anticipada produce perspectivas de crecimiento negativo del consumo. Un choque de 0.29, señala un decremento de 0.04, 0.16% en términos anuales. Al considerar la respuesta de largo plazo, en la Gráfica 7, vemos que la evidencia no es tan fuerte en relación a los efectos de la inflación sobre el crecimiento del consumo de largo plazo. La distribución posterior de la respuesta tiene cero en su soporte y está negativa-

⁴⁴Este objeto es recordativo de la fórmula de Gordon, la cual es usada para valorar acciones, $P = \frac{D}{g-r}$ donde P es el precio de una acción, D es el dividendo de la misma, g la tasa a la que el dividendo crece cada periodo, y r es la tasa de descuento de los flujos de caja. Pequeños cambios en la tasa de descuento o en el crecimiento de los dividendos tienen implicaciones importantes sobre el precio.

Gráfica 6: La respuesta de corto plazo de Δc a un choque a π .

La distribución posterior de la respuesta de corto plazo de Δc a un choque a π . Las unidades están en porcentajes trimestrales. El choque tiene la desviación estándar de la inflación condicional 0.29, se entiende como corto plazo un trimestre.

Gráfica 7: La respuesta de largo plazo de Δc a un choque a π .

La distribución posterior de la respuesta de largo plazo de Δc a un choque a π . Las unidades están en porcentajes trimestrales. El choque tiene un tamaño promedio de desviación estándar de inflación condicional, 0.29, se entiende como largo plazo 20 trimestres.

mente sesgada. La respuesta de la media está alrededor de 0.06% en términos anuales. Es incierto si la medición del crecimiento del consumo tiene suficiente precisión para hacer esta respuesta significativa. La incertidumbre paramétrica hace que la distribución posterior para el choque de largo plazo tenga una varianza similar a la del choque de corto plazo. Esto sucede aunque podríamos esperar que los efectos económicos se redujeran con el paso del tiempo.

Gráfica 8: La respuesta de $(I - \beta\phi_x)^{-1}$ a choques a Δc y π .

La distribución posterior de la respuesta de $(I - \beta\phi_x)^{-1}$ a choques a Δc y π con $\beta=0.995$. Las unidades están en porcentajes trimestrales.

La Gráfica 8 presenta las cuatro distribuciones posteriores para los elementos en $(I - \beta\phi_x)^{-1}$. Las gráficas nos permiten estar muy seguros respecto a las respuestas y los valores esperados de las variables a choques a cada una de ellas. La medición de los efectos cruzados es más problemática. La respuesta de la sumatoria del crecimiento del consumo es aproximadamente -1% en términos anuales. Mientras que la respuesta de la sumatoria del crecimiento de la inflación es aproximadamente 1.2% en términos anuales.

En resumen, las mediciones de los elementos, en particular en el largo plazo, son un motivo de preocupación respecto a su precisión. Distribuciones posteriores clave son evaluadas para investigar las implicaciones del modelo. En el caso de las respuestas de largo plazo, la medición de ϕ_x tiene implicaciones relevantes y debería ser tomada con cautela, especialmente los elementos fuera de la diagonal. En el caso de la sumatoria, el modelo depende de los efectos que se

acumulen.

11 Rendimientos Implícitos

Estamos ahora en una posición para analizar los rendimientos implícitos. Así, considere cada uno de los componentes que son parte de la fórmula de rendimientos nominales.

$$y(\mathbf{x}_t, s_t) = A(n)/n + \mathbf{B}(n)' \mathbf{x}_t/n + F(n, s_{2,t})/n + G(n, s_{2,t})/n$$

Primero, el componente $A(n)/n = \log(\beta) + \mu_{\Delta c}$ es constante a través de los vencimientos.⁴⁵ Una mayor β , un agente más impaciente, produce un mayor nivel de $A(n)/n$. Como él quiere pedir prestado más, los rendimientos se incrementan para hacer esto más costoso y, así, alcanzar un equilibrio. Similarmente, un mayor $\mu_{\Delta c}$, una economía estructuralmente más vibrante, da un mayor $A(n)/n$. Como el agente insiste en endeudarse para suavizar su consumo, los rendimientos necesitan incrementarse para alcanzar un equilibrio. Por ejemplo, con un estimado de $\beta = 0.995$ y $\mu_{\Delta c} = 0.8230$, obtengo un valor de 2.42% para este componente.⁴⁶

Segundo, la Gráfica 9 describe los dos componentes en $\mathbf{B}(n)' \mathbf{x}_t/n$, el componente asociado al crecimiento del consumo, $\mathbf{B}(n)_1 x_{1,t}/n$, y el componente asociado a la inflación, $\mathbf{B}(n)_2 x_{2,t}/n$, como funciones del tiempo para el vencimiento n . Debido a que el valor promedio de $\mathbf{x}_t$ es cero, describo estos componentes con las desviaciones estándar de $x_{1,t}/n$ y $x_{2,t}/n$. La mayor parte de la variación en los rendimientos nominales proviene de la inflación. Los vencimientos de corto plazo son afectados más que los de largo plazo para ambos componentes.⁴⁷ Debido a que las variables en $\mathbf{x}_t$ están negativamente correlacionadas, típicamente veríamos estas líneas en lados opuestos del eje x.

Dos comentarios están en línea, primero, la persistencia en las variables macroeconómicas juega un doble rol. Por un lado, define los pesos de corte transversal de los rendimientos (a través de $\mathbf{B}(n)$). Por otro, define el comportamiento de series de tiempo de un choque a cualquier variable en $\mathbf{x}_t$; así, ligando el corte transversal con el comportamiento de series de tiempo de los

⁴⁵En el caso sin regímenes no hay una solución explícita.

⁴⁶ $2.42 = 100(\log(0.995) + 0.00823)$ trimestralmente.

⁴⁷Recuerde que $\mathbf{B}(n)/n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\phi'_x)^i \right) (1 - 1)' / n$.

Gráfica 9: Los componentes de $\mathbf{B}'\mathbf{x}_t/n$.

Las gráficas describen la contribución de los componentes $B_1(n)x_{1,t}/n$ y $B_2(n)x_{2,t}/n$ que forman el rendimiento de un bono. A los elementos en $\mathbf{x}_t$ se les asigna su estimado de desviación estándar. El eje x indica el tiempo para el vencimiento. Las unidades de tiempo están en trimestres.

rendimientos. Segundo, $\mathbf{B}(n)/n$ no depende de γ .

Tercero, considere la Gráfica 10 que muestra el componente $F(s_{2,t}, n)/n$, asociado al régimen que afecta la matriz de varianza-covarianza. Su influencia se incrementa a medida que el vencimiento también lo hace, en ambos regímenes. Así, la presencia de regímenes contribuye al promedio de pendiente positiva de la curva de rendimientos nominales. Específicamente, la gráfica describe la función $F(n, s_{2,t})/n$ para diferentes niveles de $\alpha\Omega$ donde α es un escalar con valores 0.8, 0.9 y 1.0.

Hay tres efectos a considerar. Primero, mayor “riesgo” (i.e. α) implica un componente real menor de los rendimientos nominales, un efecto de ahorro precautorio. Segundo, una mayor varianza de la inflación condicional implica un incremento en los rendimientos nominales, como una compensación para el riesgo inflacionario. A medida que el riesgo se incrementa los rendimientos bajan, i.e. el primer efecto domina. Bajo este escenario, choques a la inflación no anticipados tienden a ser más grandes y cuando ocurren, implican un mayor decremento en el crecimiento del consumo. El régimen asociado a una alta varianza de inflación condicional tiene una alta covarianza condicional de los

Gráfica 10: La función $F(n, s_{2,t} = 1)/n$ para diferentes niveles de $\alpha\Omega$.

La gráfica muestra la función $F(n, s_{2,t})/n$ para diferentes niveles de $\alpha\Omega$ donde α es un escalar con valores 0.8, 0.9 y 1.0. Como el riesgo (i.e. α) se incrementa el agente aumenta los ahorros precautorios enviando los rendimientos hacia abajo. El régimen $s_{2,t}$ es fijo.

choques. En este caso, el segundo efecto domina.⁴⁸ Estos efectos suponen que no hay cambios en los otros componentes.

La Gráfica 11 presenta el componente $F(s_{2,t}, n)/n$ para diferentes niveles de persistencia en el régimen. Por simplicidad, se asume que $r_{1,1} = r_{2,2}$. Ello ilustra que entre más persistente sea el régimen asociado a la matriz de varianza-covarianza, mayor la diferencia $(F(s_{2,t} = 2, n) - F(s_{2,t} = 1, n))/n$, y así los cambios en los rendimientos. En términos de saltos de régimen, esto es donde mucha de la dinámica sucede.

Finalmente, para $G(s_{1,t}, n)/n$, el componente asociado al régimen que afecta la inflación promedio, cambios en los regímenes inflacionarios afectan el corto y largo plazo similarmente. Un salto de régimen a inflación promedio alta mueve la curva de rendimientos hacia arriba, para la mayor parte, de manera paralela pero afectando más la parte del principio de la curva, y vice versa. Análogamente, los niveles de $G(s_{1,t}, n)/n$ dependen de los estimados de $\mu_\pi(s_{1,t})$ y de la persistencia en el régimen asociado a μ_π (medido a través de Q).

⁴⁸Recuerde, $\Omega(s_1 = 1)_{1,1} = \Omega(s_2 = 2)_{1,1}$

Gráfica 11: La función $F(n, s_{2,t})/n$ para diferentes niveles de persistencia.

La gráfica muestra la función $F(n, s_{2,t})/n$ para diferentes niveles de persistencia de $s_{2,t}$ como es medida por $r_{1,1}$ y $r_{2,2}$. Los rótulos en la gráfica indican sus valores. A medida que el régimen se hace menos persistente $(F(n, 2) - F(n, 1))/n$ disminuye. F entonces depende del valor del estimado en el régimen y de su persistencia. Por simplicidad se hace el supuesto $r_{1,1} = r_{2,2}$.

12 Análisis de corte transversal

Considere el Cuadro 4, una pendiente positiva de la curva promedio de rendimientos nominales es obtenida para todas las especificaciones. La mayoría de los rendimientos promedio están holgadamente dentro de un error estándar de los datos. La volatilidad de los rendimientos implícitos es menor y se reduce más rápidamente en comparación con los datos. Pero la presencia de regímenes mejora la variabilidad en la parte final de la curva.

Los parámetros de preferencias son menores a los reportados en Piazzesi y Schneider (2006), con un modelo similar pero sin regímenes. Una razón intuitiva de esta diferencia es que la presencia de saltos de régimen introduce más variación en el Factor de Descuento Estocástico (SDF, por sus siglas en inglés). Hay entonces menos necesidad de tener coeficientes más grandes γ . Así, la presencia de regímenes no solamente permite capturar la dinámica de la inflación y del crecimiento del consumo de una mejor manera -por construcción-, sino que también permite obtener estimados más razonables para los parámetros

de preferencias. No obstante, no resuelve el problema de obtener lo que sería considerada una magnitud razonable de γ .⁴⁹

El Cuadro 4 reporta los rendimientos reales implícitos, para los cuales la curva tiene pendiente negativa, consistente con la evidencia disponible. Estos resultados no se pueden comparar directamente con los datos debido al corto periodo en el que los bonos Títulos del Tesoro Protegidos contra la Inflación (TIPS, por sus siglas en inglés)⁵⁰ se han comercializado. Las magnitudes y propiedades no están lejos de aquéllas presentadas en McCulloch (2001), pero para un periodo diferente, vea la Gráfica 33 en el Apéndice D. Evans (1998) presenta rendimientos reales usando datos del Reino Unido donde el mercado de bonos reales ha estado activo por un periodo mucho mayor. Además, TIPS presenta cuestiones como su tratamiento impositivo y el rezago de inflación indizante para determinar sus pagos.⁵¹ El rezago indizante y el tratamiento impositivo implican que estrictamente hablando no hay un bono libre de riesgo.

Como se discutió, la inflación afecta los rendimientos reales a través del crecimiento del consumo o del contenido informativo que tiene para el crecimiento del consumo. Como se explicó, un choque a la inflación pronostica un decremento en el crecimiento del consumo, disminuyendo el rendimiento real. El tenedor del bono real, al contrario del tenedor del bono nominal, no tiene que ser compensado por este riesgo. Al bono real le irá bien durante tiempos inflacionarios. Esto explica por qué la curva de rendimientos reales tiende a tener una pendiente negativa en promedio.

13 Análisis de series de tiempo

La Gráfica 12 describe el rendimiento de 1 trimestre implícito en la especificación $\mathbf{H}$, $s_{1,t}$ es fijo y $s_{2,t}$ afecta Ω . También tiene el correspondiente a los datos. El modelo es bastante exitoso en capturar la dinámica de series de tiempo, pero falla en algunos de los cambios ocurridos en los 70s y 80s. Para esta misma configuración, considere el margen diferencial y la probabilidad de estar en un

⁴⁹Este problema directamente se relaciona con el Enigma de la Prima de Riesgo de las Acciones.

⁵⁰También conocidos como bonos indizados.

⁵¹El día en el que el índice de inflación se fija y el día en el que el pago se hace no es el mismo. En los EEUU el rezago es de dos meses y en el Reino Unido es de 6 meses. Esta característica no es parte del modelo. Una de las razones de la existencia del rezago es que el índice de inflación podría ser revisado después de haber sido publicado. Usualmente, en los EEUU, los bonos reales están indexados al Índice de Precios al Consumidor (CPI, por sus siglas en inglés), mientras que los del Reino Unido están indexados al Índice de Precios al Menudeo (RPI, por sus siglas en inglés).

Cuadro 4: **Medias de corte transversal para rendimientos nominales y reales.**

Las especificaciones son: Sin regímenes, Heterocedástico, Independientes y Mismos regímenes. Los parámetros de preferencias están en las últimas dos columnas. e.e. es error estándar y de() es desviación estándar. *Para el caso de Sin regímenes, los estimados de los parámetros de preferencias son difíciles de interpretar porque no se logra una calibración adecuada. La prima en **I'** indica que se fijan las medias $\mu_{\pi}(s_{1,t})$ antes de la optimización.

		1T	4T	8T	12T	16T	20T	γ	β
Datos	$E(y)$	5.1477	5.5571	5.7633	5.9326	6.0588	6.1405	-	-
	e. e.	0.1988	0.1993	0.1966	0.1917	0.1899	0.1868		
	de(y)	2.9152	2.9227	2.8832	2.8115	2.7843	2.7394		
	$E(y^{(r)})$	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.		
S	$E(y)$	6.1502	6.3327	6.5729	6.7912	6.9848	7.1557	60*	0.9999*
	e.e.	0.1237	0.1126	0.1012	0.0918	0.0837	0.0767		
	de(y)	1.8135	1.6509	1.4839	1.3461	1.2277	1.1245		
	$E(y^{(r)})$	3.1522	2.9473	2.7899	2.6834	2.6004	2.5315		
H	$E(y)$	5.4624	5.5613	5.7242	5.8900	6.0479	6.1949	40	0.9996
	e.e.	0.1257	0.1162	0.1074	0.1000	0.0934	0.0874		
	de(y)	1.8430	1.7044	1.5748	1.4669	1.3700	1.2810		
	$E(y^{(r)})$	2.6728	2.5186	2.3959	2.3086	2.2375	2.1763		
I'	$E(y)$	5.6059	5.5699	5.7160	5.8810	6.0425	6.1948	48	0.9997
	e.e.	0.1313	0.1044	0.0962	0.0904	0.0852	0.0803		
	de(y)	1.9247	1.5307	1.4106	1.3256	1.2490	1.1768		
	$E(y^{(r)})$	1.4361	1.2559	1.1264	1.0321	0.9514	0.8793		
I' ₂	$E(y)$	5.9470	5.8642	5.8755	5.9297	5.9960	6.0646	90	0.9995
	e.e.	0.1303	0.1179	0.1066	0.0977	0.0902	0.0837		
	de(y)	1.9102	1.7290	1.5626	1.4321	1.3226	1.2279		
	$E(y^{(r)})$	1.6902	1.4029	1.2229	1.1226	1.0542	1.0024		
M	$E(y)$	5.5245	5.5850	5.7328	5.8958	6.0564	6.2099	55	0.9996
	e.e.	0.1344	0.1261	0.1184	0.1119	0.1060	0.1005		
	de(y)	1.9713	1.8495	1.7367	1.6413	1.5546	1.4743		
	$E(y^{(r)})$	1.4890	1.2965	1.1735	1.0974	1.0380	0.9865		

régimen. La Gráfica 13 describe el comportamiento del margen diferencial. El modelo es moderadamente exitoso en esta dimensión. La Gráfica 14 tiene el estimado de la probabilidad de los estados de régimen. Está asociada con el estado de/con alta volatilidad. El estimado se incrementa hacia los 2000s, ello no parece muy plausible dado el comportamiento de los rendimientos en ese tiempo.⁵²

Gráfica 12: El rendimiento de corto plazo para la especificación **H**.

Los rendimientos trimestrales de los datos y aquéllos implícitos en la especificación **H**, teniendo solamente un régimen afectando Ω .

Pasando a la especificación **I**, i.e. $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes, La Gráfica 15 presenta el rendimiento de corto plazo y la Gráfica 17 el margen diferencial. Se comporta similarmente a la especificación **H**. Aunque el corto plazo tiene un mejor desempeño en capturar los cambios de los 70s y 80s. Su comportamiento depende de los estimados de $\mu_\pi(s_{1,t})$. La Gráfica 19 presenta las series de tiempo de los estimados de los estados de régimen, para ambos regímenes, $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$. El régimen $s_{1,t}$, afectando μ_π , está principalmente asociado a los cambios en política monetaria a finales de los 70s y de los 80s, durante los cambios drásticos en inflación y el llamado experimento monetario. Los cambios en el régimen $s_{2,t}$ son muy similares a aquéllos asociados a la especificación **H**, donde $s_{2,t}$ afecta Ω .⁵³

⁵²Este podría ser el caso debido a que la varianza de la inflación condicional y el cambio de la covarianza condicional son afectados por el mismo régimen.

⁵³Debido a que haber fijado $s_{1,t}$ lo hace independiente de $s_{2,t}$

Gráfica 13: El margen diferencial entre rendimientos para la especificación **H**.

El margen diferencial se calcula como el rendimiento de 5 años menos el rendimiento de 1 año. Especificación **H**, régimen $s_{1,t}$ es fijo y $s_{2,t}$ afecta Ω .

Gráfica 14: Estimados de la probabilidad de los estados de régimen, especificación **H**.

Este estado de régimen, $s_{2,t} = 2$, está asociado con alta varianza de choques a la inflación y alta covarianza entre choques.

Gráfica 15: **El rendimiento de corto plazo para la especificación I' .**

Los rendimientos trimestrales de los datos y aquéllos implícitos en la especificación I , $s_{1,t}$ independiente de $s_{2,t}$.

Gráfica 16: **El rendimiento de corto plazo para la especificación I'_2 .**

Los rendimientos trimestrales de los datos y aquéllos implícitos en la especificación I'_2 , $s_{1,t}$ independiente de $s_{2,t}$.

Gráfica 17: **El margen diferencial entre rendimientos para la especificación I.**

El margen diferencial se calcula como el rendimiento de 5 años menos el rendimiento de 1 año. Especificación **I**, el régimen $s_{1,t}$ es independiente de $s_{2,t}$.

Gráfica 18: **El margen diferencial entre rendimientos para la especificación I'_2 .**

El margen diferencial se calcula como el rendimiento de 5 años menos el rendimiento de 1 año. Especificación **I'_2** , el régimen $s_{1,t}$ es independiente de $s_{2,t}$.

Gráfica 19: Estimados de probabilidad de estados de régimen para la especificación I'.

Los estimados de estados de régimen $s_{1,t}$, asociados a μ_π , estando en el estado 2 y régimen $s_{2,t}$, asociados a Ω , estando en el estado 2 son mostrados arriba y abajo, respectivamente. Se asume que son independientes. Cambios en los estados de régimen coinciden con los episodios de inflación de los 70s y con los cambios de política en los 80s.

Gráfica 20: Estimados de la probabilidad de estados de régimen para la especificación I'_2 .

Los estimados de estados de régimen $s_{1,t}$, asociados a μ_π , estando en el estado 2 y régimen $s_{2,t}$, asociados a Ω , estando en el estado 2 son mostrados arriba y abajo, respectivamente. Se asume que son independientes. Cambios en los estados de régimen coinciden con los episodios de inflación de los 70s y con los cambios de política en los 80s.

Gráfica 21: El rendimiento de corto plazo para la especificación M.

Esta es la serie de tiempo para el rendimiento de corto plazo para el caso de la especificación **M**, i.e. $s_{1,t} = s_{2,t}$

Gráfica 22: El margen diferencial entre rendimientos para la especificación M.

5 años - 1 año para el caso de la especificación **M**, i.e. $s_{1,t} = s_{2,t}$

Considere la especificación **M**, donde $s_{1,t} = s_{2,t}$, las Gráficas 21 y 22 presentan el rendimiento de corto plazo y el margen diferencial, respectivamente. Aunque el comportamiento del rendimiento de corto plazo es similar al resto de las especificaciones, el margen diferencial captura mucho menos de la variación. El estimado del estado de régimen asociado a una alta media y alta varianza en inflación se comporta como se muestra arriba en la Gráfica 19. Esto significa que al asumir relaciones perfectas en los regímenes, i.e. $s_{1,t} = s_{2,t}$, el régimen $s_{1,t}$ domina la dinámica. Esta es la razón de por qué mucha de la dinámica en $s_{2,t}$ se pierde.

El margen diferencial, en general para todas las diferentes especificaciones, tiene un buen comportamiento. La relación cercana entre los rendimientos del modelo conduce a esto, debido a que el rendimiento de corto plazo captura más variabilidad que los vencimientos de mayor plazo. En el modelo, una disyuntiva existe entre poder capturar la variabilidad de los rendimientos de mayor plazo y la variabilidad del margen diferencial. Esto es porque los rendimientos implícitos están mucho más correlacionados entre ellos que con sus contrapartes en los datos.

14 Descomposición por Componentes Principales

El uso del Análisis de Componentes Principales (PCA, por sus siglas en inglés)⁵⁴ empezó en la literatura de la estructura de plazos de las tasas de interés con Litterman y Scheinkman (1991). Su caracterización está basada en la interpretación de sus primeros tres componentes principales como movimientos en el “nivel,” “pendiente,” y “curvatura” de la curva de rendimientos. Estos componentes explican casi toda la variabilidad en los movimientos de los rendimientos, y la proporción de la varianza explicada decrece con cada componente. Esta reducción en la varianza explicada es capturada por el modelo, aunque las proporciones bajan mucho más rápidamente. Luego fue documentado que los choques de demanda agregada están correlacionados con el primer componente principal, el nivel. Cambios en la política monetaria afectan al segundo componente principal, teniendo un efecto sobre la pendiente, e.g. vea Singleton (2006). Esto es consistente con, por ejemplo, Rigobon y Sack (2002), quienes al estimar un modelo de forma reducida concluyen que un incremento en las tasas de interés de corto plazo resulta en un desplazamiento hacia arriba en la curva

⁵⁴Originalmente fue desarrollado por Karl Pearson, entre otras contribuciones muy bien conocidas.

de rendimientos que es menor para vencimientos mayores. La interpretación de movimientos en la curvatura es menos clara.

Reexpreso los componentes de los rendimientos implícitos en el modelo. La idea es verla como otra descomposición con componentes económicamente interpretables. La razón por la cual reexpreso los componentes es porque el PCA elimina las medias de las variables que son analizadas. Así, recordando que $y_t^{(n)} = (A(n) + \mathbf{B}'(n)\mathbf{x}_t + F(n, s_{2,t}) + G(n, s_{1,t}))/n$, podemos reescribir $y_t^{(n)} - \mathbf{E}y_t^{(n)}$ como

$$(B_1(n)x_{1,t} + B_2(n)x_{2,t} + (F(n, s_{2,t}) - \mathbf{E}F(n, s_{2,t})) + (G(n, s_{1,t}) - \mathbf{E}G(n, s_{1,t}))/n.$$

Apilando los rendimientos con vencimientos de 1 trimestre, 1 año, 2, 3, 4, y 5 años en un vector $\mathbb{Y}_t$, y los coeficientes en $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{F}(s_{2,t})$, y $\mathbb{G}(s_{1,t})$ para obtener,

$$\mathbb{Y}_t - \mathbf{E}\mathbb{Y} = \mathbb{B}_1x_{1,t} + \mathbb{B}_2x_{2,t} + (\mathbb{F}(s_{2,t}) - \mathbf{E}\mathbb{F}) + (\mathbb{G}(s_{1,t}) - \mathbf{E}\mathbb{G}) \quad (9)$$

Recuerde que el PCA provee una descomposición mediante la cual podemos expresar la curva de rendimientos en el tiempo t como

$$\mathbb{Y}_t - \mathbf{E}\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^6 \alpha_{i,t} \mathbf{v}_i,$$

donde $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ para toda $i \neq j$, y donde $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para toda i . Para comparar, la Gráfica 36 describe la descomposición de PCA para los datos de los rendimientos. Las Gráficas 23 y 24 presentan aquéllos implícitos en la especificación $\mathbf{H}$, i.e. $s_{2,t}$ afecta Ω , y la especificación $\mathbf{M}$, para la cual $s_{1,t} = s_{2,t}$, respectivamente. La descomposición es algo consistente para la primera, y cercanamente consistente para la segunda.⁵⁵

Para ver por qué esto es plausible, considere la función de rendimientos $\mathbf{B}(\mathbf{n})'\mathbf{x}_t$, la Gráfica 9, y los movimientos típicos de las variables de estado.

i) Los cambios en $x_{1,t}$ y $x_{2,t}$ están en promedio correlacionados negativamente. Naturalmente, pueden ser algunas veces ambos positivos o ambos negativos. Por lo tanto normalmente veríamos las líneas en la Gráfica 9 en lados opuestos del eje x.

ii) Los cambios en $x_{2,t}$ explican muchas de las variaciones en los rendimientos

⁵⁵La obtención de las magnitudes correctas es ayudada por el hecho de que los vectores en el PCA están estandarizados como se describió.

Gráfica 23: Descomposición por Componentes Principales para la especificación **H**.

Las gráficas de los tres primeros componentes principales para los datos y el modelo principal son mostradas. Las interpretaciones “nivel,” “pendiente,” y “curvatura” pueden ser vistas. La especificación **H** es presentada, i.e. con régimen $s_{1,t}$ afectando solamente Ω . Sólo obtiene correctamente dos de los componentes.

Gráfica 24: Descomposición por Componentes Principales para la especificación **M**.

La gráfica presenta los tres primeros componentes principales para los rendimientos del modelo. Las interpretaciones “nivel,” “pendiente,” y “curvatura” pueden ser vistas. La especificación **M** es presentada, i.e. con régimen $s_{1,t} = s_{2,t}$ afectando μ_π y Ω . Obtiene correctamente todos los componentes.

Gráfica 25: Descomposición por Componentes Principales para la especificación $\mathbf{I}'_2$.

La gráfica presenta los tres primeros componentes principales para los rendimientos del modelo. Las interpretaciones “nivel,” “pendiente,” y “curvatura” pueden ser vistas. La especificación $\mathbf{I}'_2$ es presentada, i.e. con régimen $s_{1,t} = s_{2,t}$ afectando μ_π y Ω . Sólo obtiene correctamente dos de los componentes.

al comparar con aquéllos en $x_{1,t}$. Esto va de acuerdo con el resultado documentado que mucho de los movimientos de la curva de rendimientos se deben a cambios en la inflación y medidas asociadas.

iii) El componente asociado al régimen de varianza-covarianza $s_{2,t}$, afecta los rendimientos de menor plazo menos que los de mayor plazo.

Primero, una parte importante de los cambios en rendimientos proviene de los movimientos conjuntos en $\mathbf{x}_t$, para la mayor parte estos afectan el nivel de los rendimientos. En promedio, la correlación negativa significa que el componente $\mathbf{B}_1(n)x_{1,t}$ estará jalando la curva de rendimientos en la dirección opuesta a $\mathbf{B}_2(n)x_{2,t}$. Con variaciones típicas en estos componentes obtenemos cambios en el nivel de la curva de rendimientos (vea la Gráfica 9), consistente con el comportamiento del primer componente principal. Los cambios en el régimen asociados a la inflación promedio ($s_{1,t}$) también afectan el nivel del rendimiento. Estos son, sin embargo, menos comunes.

Segundo, cambios más drásticos en el componente de inflación $x_{2,t}$ pueden significativamente afectar la pendiente, de acuerdo con la interpretación dada al segundo componente principal. Así, los cambios en los rendimientos nominales dominados por cambios en la inflación afectan la pendiente de la curva de

rendimientos.

Tercero, las variaciones en la curvatura deberían de aparecer menos frecuentemente que aquéllas en el nivel o en la pendiente. La curvatura varía más drásticamente cuando los elementos en $\mathbf{x}_t$ van desde *ambos* siendo negativos a *ambos* siendo positivos o vice versa; lo cual sucede con baja probabilidad. Estos tipos de cambios afectan la curvatura de la curva de rendimientos. Esto es compatible con la baja proporción de varianza explicada por el tercer componente principal, y el tipo de movimientos.

Para resumir, uno puede ver la expresión de rendimientos del modelo como otra descomposición de los movimientos de los rendimientos que es consistente con la descomposición de PCA, y tiene componentes económicos interpretables. Es notable que aunque el uso de información de los rendimientos para obtener los estimados de preferencias en el modelo fue limitado a las medias de corte transversal, las especificaciones del modelo implican una descomposición de PCA consistente.

15 Predictibilidad

Una característica central de los rendimientos observados es la desviación de la Hipótesis de Expectativas (EH, por sus siglas en inglés) en la forma de predictibilidad en los rendimientos. Por ejemplo, vea Fama y Bliss (1987), Campbell y Shiller (1991), y Cochrane y Piazzesi (2002). Ha sido documentado que los rendimientos esperados de bonos son variantes en el tiempo. Fama (1984) presenta algo de evidencia y lo postula como un hecho estilizado que los modelos tendrían que explicar. Como es sabido, estos son los mismos fenómenos (vea, e.g. Singleton (2006)).

Algunos modelos de la estructura de plazos de las tasas de interés que están basados en la existencia de un Factor de Descuento Estocástico (SDF, por sus siglas en inglés), e.g. Banzal y Zhou (2001), han podido capturar mucha de la dinámica de predictibilidad en los rendimientos. Sin embargo, modelos de estructura de plazos basados en consumo han sido menos explorados en esta dimensión.⁵⁶ Mostraré que el modelo tiene implicaciones importantes para predictibilidad.

El Cuadro ?? da a conocer dos hechos centrales. Primero, el modelo captura la magnitud del (log) de los rendimientos del periodo de tenencia (hpr, por sus

⁵⁶Una excepción es Wachter (2006). Ella extiende el modelo de hábitos de Campbell y Cochrane (1999) para obtener una estructura de plazos de la tasa de interés.

siglas en inglés) (algunas medidas están ligeramente desviadas de sus errores estándares). Recuerde que el (log) del rendimiento del periodo de tenencia, hpr , está dado por $hpr_{t+1}^{(n)} = p_{t+1}^{(n-1)} - p_t^{(n)}$. Segundo, para el (log) implícito en el modelo, como en los datos, en promedio no hay diferencia entre la tenencia de bonos de diferentes vencimientos por un periodo, un año para este caso. En este sentido, la EH se cumple en promedio, para el modelo así como para los datos.

Cuadro 5: Media de los rendimientos del periodo de tenencia.

Estas son medias de los rendimientos del periodo de tenencia, los errores estándares correspondientes, y las desviaciones estándar del logaritmo del rendimiento del periodo de tenencia (hpr , por sus siglas en inglés) para vencimientos de 1 a 4 años. El periodo de tenencia es un año. Los datos van desde 1952:2 a 2005:4. La fuente de los datos: CRSP. La especificación **H**, $s_{1,t}$ es fijo y $s_{2,t}$ afecta Ω . La especificación **I** significa regímenes independientes $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$, afectando Ω y μ_π respectivamente. La especificación **M** significa $s_{1,t} = s_{2,t}$ afectando Ω y μ_π .

	Vencimiento	$E(hpr_{t+1}^{(n)})$	err. est.	des. est.
Datos	1	5.9702	0.2582	3.7505
	2	6.2323	0.3245	4.7135
	3	6.3392	0.3963	5.7672
	4	6.1543	0.4566	6.6323
H	1	5.8889	0.1394	2.0246
	2	6.1007	0.1822	2.6464
	3	6.3161	0.2226	3.2330
	4	6.5008	0.2581	3.7485
I'	1	5.8604	0.1274	1.8500
	2	6.0893	0.1744	2.5331
	3	6.3058	0.2187	3.1762
	4	6.5231	0.2550	3.7047
I'₂	1	5.8911	0.1375	1.9966
	2	5.9311	0.1768	2.5676
	3	6.0169	0.2123	3.0838
	4	6.0852	0.2443	3.5480
M	1	5.8869	0.1501	2.1810
	2	6.1178	0.1966	2.8561
	3	6.3535	0.2433	3.5342
	4	6.5458	0.2883	4.1883

En seguida, considero las pruebas de regresión de predictibilidad como se implementaron en Cochrane (2001), para medir el éxito del modelo en esta

dimensión. Luego procedo con las pruebas de regresión como en Cochrane y Piazzesi (2002).

El Cuadro ?? muestra los resultados para las pruebas iniciales de predictibilidad. Para las regresiones del cambio en rendimientos la EH predice un coeficiente de uno para el coeficiente b . En los datos esto tiende a cumplirse entre más grande sea N . La especificación **H** obtiene la tendencia del coeficiente en la dirección opuesta. Mientras, la especificación **I** es más exitosa, empieza a alinearse con la EH a medida que N se incrementa. En la especificación **M**, la EH se cumple para todos los valores de N . El modelo en el corto plazo presenta alguna predictibilidad mientras que los datos no. Esto se relaciona con la alta variabilidad del rendimiento de corto plazo que no es capturada por el modelo. Todas tienden a incrementar su predictibilidad cuando N se incrementa, como se refleja en la R^2 ajustada.

Para las regresiones de los rendimientos del periodo de tenencia, vea el Cuadro ??, la EH predice un valor de cero para el coeficiente b . La especificación **H**, mantiene coeficientes y R^2 s ajustadas menores. Para la especificación **I**, los estimados están cerca de los datos. Esto es consistente con los resultados para las regresiones del cambio en rendimientos. La especificación **M** obtiene las magnitudes en la dirección errónea. No está completamente claro por qué los estimados para las regresiones de los rendimientos del periodo de tenencia están lejos en relación a los datos, en contraste con las regresiones del cambio en rendimientos.

En resumen, por las propiedades del crecimiento del consumo, inflación, y los estimados, se esperaría que la predictibilidad se cumpliera solamente hasta cierto grado. En otras palabras, hay un contenido limitado de predictibilidad en inflación y crecimiento del consumo, relativo a la predictibilidad en rendimientos.⁵⁷ Pero, mientras la especificación **H** siga de alguna manera de cerca a la EH, la predictibilidad en la especificación **I** ($s_{1,t}, s_{2,t}$ independientes) va en la dirección correcta. Un incremento en la diferencia entre la tasa forward y la de corto plazo predice un incremento en los rendimientos (en exceso) futuros o en el rendimiento del periodo de tenencia. La asunción de independencia en los regímenes que afectan la inflación promedio y la matriz de varianza-covarianza contribuye a obtener magnitudes más cercanas y patrones para las pruebas básicas de regresión de predictibilidad.

Pasando a las pruebas de Cochrane y Piazzesi (2002), tenemos que su re-

⁵⁷Ello también dependerá de las formas funcionales que conectan los datos.

Cuadro 6: Regresiones de predictibilidad del cambio en los rendimientos.

El periodo es de 1952:2 a 2005:4. Fuente: CRSP. Estas regresiones son para las siguientes especificaciones: **H** es el caso para el cual $s_{1,t}$ es fijo y $s_{2,t}$ afecta Ω . **I** es el caso cuando $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes. **M** es el caso cuando $s_{1,t} = s_{2,t}$ son los mismos. e.e. significa errores estándares y aju significa ajustada. Bajo la hipótesis de expectativas el valor de b debería de ser 1. La N indica el número de periodos después de t el rendimiento futuro es considerado, ello en años. $y_{t+N}^{(1)} - y_t^{(1)} = a + b(f_t^{(N \rightarrow N+1)} - y_t^{(1)}) + \epsilon_{t+N}$.

N	a	e.e.(a)	b	e.e.(b)	R^2 aju.
Datos					
1	0.0015	0.1342	0.0813	0.1669	-0.008
2	-0.2284	0.1939	0.3800	0.1599	0.017
3	-0.5754	0.2187	0.6227	0.1521	0.068
4	-0.6109	0.2268	0.8077	0.1531	0.115
H					
1	-0.2801	0.0949	0.8574	0.2031	0.0742
2	-0.5167	0.1335	0.6939	0.1566	0.0829
3	-0.6237	0.1588	0.7187	0.1345	0.1201
4	-0.6679	0.1686	0.6047	0.1159	0.1170
I'					
1	-0.1271	0.0844	0.5414	0.1866	0.0214
2	-0.2829	0.1299	0.5974	0.1604	0.0401
3	-0.5463	0.1610	0.6339	0.1421	0.0855
4	-0.6292	0.1703	0.5611	0.1205	0.0946
I'₂					
1	-0.0226	0.0688	1.0120	0.1829	0.1236
2	-0.1362	0.0902	1.0095	0.1432	0.1911
3	-0.2346	0.1035	0.8913	0.1225	0.2044
4	-0.2836	0.1090	0.7342	0.1069	0.1892
M					
1	-0.2847	0.1023	0.9698	0.2527	0.0614
2	-0.6193	0.1597	1.0273	0.2064	0.1035
3	-0.9415	0.1892	1.0473	0.1702	0.1543
4	-1.0577	0.2026	0.9074	0.1440	0.1634

gresión inicial está dada por:

$$hpr_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)} = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} y_t^{(1)} + \beta_2^{(n)} f_t^{(2)} + \dots + \beta_5^{(n)} f_t^{(5)} + \epsilon_{t+1}^{(n)},$$

recordando que $f_t^{(k)}$ denota la tasa forward. Sus pruebas están basadas en una generalización de las regresiones del rendimiento del periodo de tenencia. La idea es que variables adicionales no deberían de mejorar las capacidades de pronóstico que la EH tiene. Esta regresión para los datos del modelo presentó colinealidad. Esto no es sorprendente dado el número reducido de variables de estado que son parte del modelo.

La simplificación de la prueba para eludir el problema de colinealidad condujo a que se hiciera la regresión

$$hpr_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)} = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} y_t^{(1)} + \beta_3^{(n)} f_t^{(3)} + \beta_5^{(n)} f_t^{(5)} + \epsilon_{t+1}^{(n)},$$

eliminando dos de las tasas forward intermedias. La Gráfica 26 presenta las funciones con forma de carpa para la especificación **I**, i.e. $s_{1,t}$ independiente de $s_{2,t}$, y la Gráfica 28 presenta las funciones con forma de carpa para la especificación **M**, i.e. $s_{1,t} = s_{2,t}$

El Cuadro 7 presenta los estimados para las regresiones Cochrane Piazzesi simplificadas. Como en las regresiones simples los valores bajos de las R^2 s ajustadas son esperados en el sentido de que en relación a la predictibilidad de los rendimientos, la información contenida en el crecimiento del consumo y en la inflación es pequeña, como se mencionó. El incremento en los errores estándar a medida que el vencimiento es mayor refleja la dificultad que el modelo encara para medir elementos en el largo plazo. Es ciertamente notable que las magnitudes de los coeficientes son cercanas y tienen el mismo patrón.

Recuerde que solamente los promedios de los rendimientos de corte transversal fueron usados para obtener los parámetros de preferencias. En otras palabras, el modelo no depende fuertemente de la función de empalme suave usada para obtener los rendimientos de los datos. Sin embargo, Singleton (2006) argumenta que la función con forma de carpa obtenida en Cochrane y Piazzesi (2002) depende del suavizamiento en la construcción de los datos de rendimientos. Así, los resultados presentados aquí apoyan la robustez de los resultados en Cochrane y Piazzesi (2002).⁵⁸

⁵⁸La comparación no es estrictamente directa debido a que algunos de los forwards fueron eliminados, por razones ya explicadas.

Cuadro 7: Las regresiones Cochrane-Piazzesi simplificadas.

La regresión Cochrane simplificada $hpr_{t+1}^{(n)} - y_t^{(1)} = \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)}y_t^{(1)} + \beta_3^{(n)}f_t^{(3)} + \beta_5^{(n)}f_t^{(5)} + \epsilon_{t+1}^{(n)}$. El periodo es desde 1952:2 a 2005:4. Fuente: NIPA y CRSP.

n	β_0	e.e.	β_1	e.e.	β_3	e.e.	β_5	e.e.	R^2 aju.
Datos									
1	-1.237	0.292	-0.670	0.112	1.453	0.2210	-0.585	0.170	0.24
2	-1.876	0.527	-1.453	0.202	3.126	0.5000	-1.395	0.306	0.27
3	-2.816	0.716	-2.163	0.274	4.541	0.5430	-1.993	0.516	0.30
4	-3.670	0.899	-2.681	0.345	5.097	0.6820	-1.958	0.523	0.27
H									
1	-5.005	2.615	0.154	0.505	-1.959	1.677	2.457	1.602	0.024
2	-9.327	4.666	0.259	0.722	-3.670	2.992	4.627	2.858	0.028
3	-13.145	6.40	0.368	0.990	-5.271	4.104	6.614	3.920	0.030
4	-16.491	7.880	0.578	1.220	-6.738	5.053	8.402	4.826	0.031
I'									
1	2.225	1.800	-1.252	0.278	3.724	1.149	-2.658	1.101	0.105
2	3.027	3.263	-2.135	0.504	6.135	2.083	-4.204	1.995	0.102
3	3.804	4.549	-2.900	0.702	8.168	2.904	-5.501	2.782	0.099
4	4.514	5.669	-3.555	0.875	9.868	3.619	-6.581	3.467	0.095
I'₂									
1	4.2940	2.5980	-0.1360	0.3470	1.8540	1.5750	-2.3140	1.6230	-0.0000
2	7.5160	4.5000	-0.2440	0.6010	3.2040	2.7280	-3.9860	2.8120	-0.0010
3	9.9850	6.0340	-0.2950	0.8060	4.1410	3.6580	-5.1960	3.7710	-0.0010
4	11.9080	7.3080	-0.3120	0.9760	4.8050	4.4300	-6.0950	4.5660	-0.0010
M									
1	1.366	3.729	-0.614	0.391	2.015	2.040	-1.492	2.184	0.003
2	1.913	6.868	-1.204	0.721	3.592	3.757	-2.478	4.023	0.006
3	2.215	9.669	-1.743	1.015	4.939	5.289	-3.263	5.663	0.007
4	2.367	12.172	-2.231	1.278	6.101	6.658	-3.905	7.128	0.007

En resumen, el rol de los regímenes y la manera en cómo son especificados en el modelo son cruciales para obtener algunos de los patrones que aparecen en las regresiones Cochrane-Piazzesi simplificadas, las cuales son muy exitosas en el modelo. En su documento, Cochrane y Piazzesi (2002), concluyen que la función con forma de carpa es un factor que conduce la predictibilidad en los rendimientos. La estructura del modelo y los estimados de las diferentes especificaciones implican que el régimen $s_{2,t}$ captura un componente importante de la dinámica de predictibilidad en los rendimientos. Así, nuestro modelo sugiere, que este es el factor que conduce la predictibilidad. Este régimen puede ser interpretado como un cambio en riesgo variante en el tiempo.

Gráfica 26: Las gráficas Cochrane Piazzesi con forma de carpa para la especificación I.

Estas son la $\beta_1^{(n)}$, $\beta_3^{(n)}$ y $\beta_5^{(n)}$ de la regresión. La gráfica muestra los coeficientes de la regresión (10) usando los rendimientos implícitos por el modelo $\mathbf{I}'$, i.e. $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes.

Gráfica 27: Las gráficas Cochrane Piazzesi con forma de carpa para la especificación I_2 .

Estas son la $\beta_1^{(n)}$, $\beta_3^{(n)}$ y $\beta_5^{(n)}$ de la regresión. La gráfica muestra los coeficientes de la regresión (10) usando los rendimientos implícitos por el modelo I_2 , i.e. $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes.

Gráfica 28: Las gráficas Cochrane Piazzesi con forma de carpa para la especificación M .

Estas son la $\beta_1^{(n)}$, $\beta_3^{(n)}$ y $\beta_5^{(n)}$ de la regresión. La gráfica muestra los coeficientes de la regresión (10) usando los rendimientos implícitos por el modelo M , i.e. $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son el mismo.

16 Conclusiones

Hayek (1945) pudo haber predicho las dificultades que los modelos de valuación de activos basados en consumo han encarado en las décadas pasadas. La obtención de rendimientos solamente del consumo agregado difícilmente sería una simple hazaña, debido a que los precios ya resumen y llevan una cantidad notable de información. Además del consumo, variables adicionales necesitan ser consideradas para entender: i) el grado hasta el cual los cambios en las variables macroeconómicas son percibidos como transitorios o de larga duración, ii) los efectos que los choques tienen sobre las variables, particularmente sus dinámicas intertemporales, iii) las diversas medidas de riesgo, y, así, iv) sus efectos sobre los rendimientos.

Este documento propone un modelo de valuación de activos basado en consumo para analizar la relación entre crecimiento del consumo, inflación, y rendimientos. La inclusión de saltos de régimen y la especificación exacta juegan un rol clave. Generalmente la idea de introducir regímenes es para capturar cambios en las relaciones tanto en variables macroeconómicas como en financieras. Aunque, en el modelo, es la combinación de la utilidad recursiva y la persistencia en regímenes lo que produce implicaciones relevantes para el comportamiento de los rendimientos.

La estimación del espacio de estados usa el crecimiento del consumo y la inflación como variables macroeconómicas. Mientras que la estimación de los parámetros de preferencias usa solamente la curva de rendimientos promedio. No obstante, es notable el grado hasta el cual el modelo se alinea con un importante conjunto de hechos estilizados de los rendimientos. Estos no fueron, sin embargo, perfectamente consistentes a través de las especificaciones.

La estimación y medición de parámetros conlleva retos econométricos. Primero, por ejemplo, una matriz de transición no restringida⁵⁹ implica un espacio de estados que rápidamente se convierte en un objeto intratable para estimar. La dificultad de esta estimación es recordativa de los problemas al medir las respuestas cruzadas de las otras variables. Así, en el caso de saltos de régimen parece una solución conveniente estimar los casos polares, como lo hago.⁶⁰ Segundo, la matriz ϕ_x juega un triple rol: i) mide las respuestas de corto y largo plazo de las variables; ii) liga el comportamiento de corte transversal con la dinámica de

⁵⁹Específicamente, una relación arbitraria entre $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$

⁶⁰El número de estados de régimen considerados es relevante para el supuesto de independencia.

series de tiempo de los rendimientos; y iii) define los precios del riesgo de corto y largo plazo. Tercero, el modelo depende de medir la distribución de riesgo temporal. El aumento en el parámetro que mide este riesgo le permite jugar un rol importante. Por un lado, es difícil de medir. Por otro, justificándolo produce un modelo con implicaciones empíricas relevantes. El punto crucial es luego su validez y las variables macroeconómicas detrás de ello. Por lo menos, surgen dos cuestiones adicionales.

Primero, uso el mismo parámetro para medir la aversión al riesgo y la distribución de riesgo intertemporal. Ellos no necesariamente deberían de ser lo mismo. Esto es análogo al caso familiar de la función de utilidad elevada a una potencia, en la cual hay solamente un parámetro que mide la aversión al riesgo y la elasticidad de la distribución intertemporal. Estos dos conceptos en principio no están relacionados. Segundo, lo que el econométrista podría terminar midiendo podría jugar un rol más significativo. Por ejemplo, un agente observa un choque macroeconómico negativo. Asumo que él entonces reacciona ante ello y se cubre en la medida de lo posible. Su consumo se reduce menos de lo que habría consumido si no hubiera un mecanismo de cobertura. El economista entonces recaba los datos generados. Si bien el indicador macroeconómico era informativo en ese momento, la correlación podría decrecer ex-post por la naturaleza del mecanismo de compartición de riesgo variante en el tiempo.⁶¹ La diferencia entre la medición esperada (ex-ante) versus la observada (ex-post) de la distribución de riesgo intertemporal podría ser sustancial. Asuntos como este deberían de motivar diferentes maneras de medir riesgos.

Veo los siguientes ejercicios futuros relevantes. Primero, la posibilidad de estimar especificaciones más generales al añadir más información económica relevante para el agente. Información económica adicional, e.g. ingresos corporativos, encuestas de inflación, futuros sobre tasas de corto plazo o una función sensata de estas variables podría potencialmente contener información respecto a las perspectivas para el crecimiento del consumo. Una extensión paralela consistiría en usar variables adicionales que minimizaran el número de parámetros adicionales a estimar. Esto podría involucrar la variación de la especificación exacta del espacio de estados.

Segundo, la posibilidad de considerar valores diferentes de uno para ψ . La

⁶¹Recuerde que el agente es compensado solamente por el riesgo macroeconómico. Así, naturalmente, la medición del riesgo intertemporal debería explicar esto. Asimismo, el cambio a través del tiempo en el mecanismo de compartición de riesgo puede ser motivado por conjuntos de inversión variantes en el tiempo.

asunción de que la elasticidad de sustitución intertemporal ψ no es uno no solamente simplifica las fórmulas para obtener los precios de bonos sino que elude la necesidad de estimar la riqueza, una variable no observada. Así, habría una necesidad de estimar la riqueza. Este supuesto no es inofensivo y podría estar escondiendo efectos significativos. Esto podría potencialmente dar al modelo más información con implicaciones relevantes sobre el valor de los estimados, la dinámica de las variables, y, así, el comportamiento de los rendimientos.

Tercero, la posibilidad de colocar una función de utilidad que use diferentes parámetros para medir la aversión al riesgo y la distribución de riesgo intertemporal. Se necesitaría evidencia independiente sobre la magnitud del parámetro que mide el segundo riesgo. Esta idea no estaría exenta de las dificultades inherentes que miden diferentes riesgos y sus propiedades. Algunos de estos y relacionados asuntos son, hasta cierta medida, discutidos en los apéndices.

Referencias

Andrew B. Abel. Asset prices under habit formation and catching up with the joneses. *American Economic Review*, 80(2):38–42, May 1990.

URL <http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v80y1990i2p38-42.html>.

Andrew Ang y Geert Bekaert. The term structure of real rates and expected inflation. (4518), August 2004.

URL <http://ideas.repec.org/p/cpr/ceprdp/4518.html>.

Ravi Bansal y Amir Yaron. Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *Journal of Finance*, 59(4):1481–1509, 08 2004.

URL <http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v59y2004i4p1481-1509.html>.

Ravi Bansal y Hao Zhou. Term structure of interest rates with regime shifts. (2001-46), 2001.

URL <http://ideas.repec.org/p/fip/fedgfe/2001-46.html>.

Ben S Bernanke y Alan S Blinder. The federal funds rate and the channels of monetary transmission. *American Economic Review*, 82(4):901–21, Septiembre 1992.

URL <http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v82y1992i4p901-21.html>.

Andreas Beyer y Lucrezia Reichlin. The role of money – money and monetary policy in the twenty-first century. 2008.

URL <http://www.ecb.int/pub/pdf/other/roleofmoneyen2008en.pdf>.

John F Boschen y Leonard O Mills. The relation between narrative and money market indicators of monetary policy. *Economic Inquiry*, 33(1):24–44, Enero 1995.

URL <http://ideas.repec.org/a/oup/ecinqu/v33y1995i1p24-44.html>.

Guillermo A. Calvo. Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12(3):383–398, Septiembre 1983.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v12y1983i3p383-398.html>.

John Y. Campbell y John H. Cochrane. By force of habit: A consumption based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of Political Economy*, 107(2):205–251, 1999.

URL <http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/250059>.

John Y. Campbell y Robert J. Shiller. Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view. (3153), Septiembre 1991. URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/3153.html>.

Lawrence J. Christiano, Martin Eichenbaum, y Charles L. Evans. Identification and the effects of monetary policy shocks. (94-7), 1994. URL <http://ideas.repec.org/p/fip/fedhma/94-7.html>.

John H Cochrane. How big is the random walk in gnp? *Journal of Political Economy*, 96(5):893–920, Octubre 1988.

URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v96y1988i5p893-920.html>.

John H. Cochrane. *Asset Pricing*. Princeton University Press, 2da ed, 2001.

John H. Cochrane. *Financial markets and the real economy*. 2005. *Foundations and Trends in Finance*.

John H. Cochrane y Monika Piazzesi. Bond risk premia. (9178), Septiembre 2002. URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/9178.html>.

George M. Constantinides. Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. *Journal of Political Economy*, 98(3):519–43, Junio 1990.

URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v98y1990i3p519-43.html>.

George M Constantinides y Darrell Duffie. Asset pricing with heterogeneous consumers. *Journal of Political Economy*, 104(2):219–40, Abril 1996.

URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v104y1996i2p219-40.html>.

John C Cox, Jr Ingersoll, Jonathan E, y Stephen A Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, Marzo 1985.

URL <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v53y1985i2p385-407.html>.

Qiang Dai, Kenneth J. Singleton, y Wei Yang. Regime shifts in a dynamic term structure model of U.S. treasury bond yields. *Rev. Financ. Stud.*, 20(5):1669–1706, 2007. URL <http://rfs.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/20/5/1669>.

Martin Eichenbaum. Interpreting the macroeconomic time series facts: The effects of monetary policy : by: C: Sims. *European Economic Review*, 36: 1001–1011, Junio 1992.

Larry G Epstein y Stanley E Zin. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis. *Journal of Political Economy*, 99(2):263–86, Abril 1991.

URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v99y1991i2p263-86.html>.

M. D. D. Evans y P. Wachtel. Do expected shifts in inflation affect estimates of the long-run fisher relation? *Journal of Money, Credit and Banking*, 25 (3), 1993.

Martin D. D. Evans. Real rates, expected inflation, and inflation risk premia. *Journal of Finance*, 53(1):187–218, 02 1998.

URL <http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v53y1998i1p187-218.html>.

Martin D D Evans y Karen K Lewis. Do expected shifts in inflation affect estimates of the long-run fisher relation? *Journal of Finance*, 50(1):225–53, Marzo 1995.

URL <http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v50y1995i1p225-53.html>.

Eugene F. Fama. Term premiums in bond returns. *Journal of Financial Economics*, 13(4):529–546, Diciembre 1984.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v13y1984i4p529-546.html>.

Eugene F Fama y Robert R Bliss. The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, 77(4):680–92, Septiembre 1987.

URL <http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v77y1987i4p680-92.html>.

Milton Friedman y Anna Jacobson Schwartz. *Monetary History of the United States, 1867-1960*. Princeton University Press, 1971.

Stuart Geman y Donald Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, Noviembre 1984.

URL <http://dx.doi.org/10.1080/02664769300000058>.

Jr. George T. McCandless y Warren E. Weber. Some monetary facts. Quarterly Review, (Sum):2–11, 1995.

URL <http://ideas.repec.org/a/fip/fedmqr/y1995isump2-11nv.19no.3.html>.

Paul Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic

Modelling and Applied Probability). Springer, Agosto 2003. ISBN 0387004513. Robert E Hall. Stochastic implications of the life cycle permanent income hypothesis: Theory and evidence. Journal of Political Economy, 86(6):971–87, Diciembre 1978. URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v86y1978i6p971-87.html>.

James D. Hamilton. Time Series Analysis. Princeton University Press, 1994.

Lars Peter Hansen. Modeling the long run: Valuation in dynamic stochastic economies: Fisher-schultz lecture at the 2006 european meetings of the econometric society. Agosto 2008.

Lars Peter Hansen. Toward a term structure of macroeconomic risk pricing unexpected growth fluctuations: Nemmers lecture. 2007. No publicado.

Lars Peter Hansen. Notes: Full information economy - discrete-time models. 2006. Manuscrito no publicado.

Lars Peter Hansen y Ravi Jagannathan. Implications of security market data for models of dynamic economies. Journal of Political Economy, 99(2):225–62, Abril 1991. URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v99y1991i2p225-62.html>.

Lars Peter Hansen y Thomas Sargent. Fragile beliefs and the price of model uncertainty. Documento de trabajo, University of Chicago y New York University, 2006.

Lars Peter Hansen y Thomas J. Sargent. Robustness. Princeton University Press, 2007.

Lars Peter Hansen y Kenneth J Singleton. Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. Econometrica, 50(5):1269–86, Septiembre 1982. URL <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v50y1982i5p1269-86.html>.

Lars Peter Hansen y Kenneth J Singleton. Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns. *Journal of Political Economy*, 91(2):249–65, Abril 1983. URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v91y1983i2p249-65.html>.

Lars Peter Hansen, John C. Heaton, y Nan Li. Consumption strikes back? measuring long-run risk. *Journal of Political Economy*, 116(2):260–302, 04 2008. URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v116y2008i2p260-302.html>.

F. A. Hayek. The use of knowledge in society. *The American Economic Review*, 35(4):519–530, 1945. URL <http://www.jstor.org/stable/1809376>.

T. Okimotot Kasahara, H. y K. Shimotsu. Modified likelihood ratio test for regime switching. *Documento de trabajo*, 2008.

Narayana R Kocherlakota. Disentangling the coefficient of relative risk aversion from the elasticity of intertemporal substitution: An irrelevance result. *Journal of Finance*, 45(1):175–90, Marzo 1990. URL <http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v45y1990i1p175-90.html>.

Martin Lettau y Sydney Ludvigson. Resurrecting the (c)capm: A cross-sectional test when risk premia are time-varying. *Journal of Political Economy*, 109(6):1238–1287, Diciembre 2001. URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v109y2001i6p1238-1287.html>.

Robert Litterman y Josje Sheinkman. Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, 1(1), 1991.

Lucas, Robert E. Jr., Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46(6):1429–45, Noviembre 1978. URL <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v46y1978i6p1429-45.html>.

Robert Jr. Lucas. Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, 4(2):103–124, Abril 1972. URL <http://ideas.repec.org/a/eee/jetheo/v4y1972i2p103-124.html>.

J. Huston McCulloch. The inflation premium implicit in the US real and nominal. (210), Abril 2001. URL <http://ideas.repec.org/p/sce/scecf1/210.html>.

Rajnish Mehra y Edward C. Prescott. The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15(2):145–161, Marzo 1985.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v15y1985i2p145-161.html>.

Jonathan A. Parker y Christian Julliard. Consumption risk and the cross section of expected returns. *Journal of Political Economy*, 113(1):185–222, Febrero 2005. URL

<http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v113y2005i1p185-222.html>.

Monika Piazzesi. Bond yields and the federal reserve. *Journal of Political Economy*, 113(2):311–344, Abril 2005.

URL <http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v113y2005i2p311-344.html>.

Monika Piazzesi y Martin Schneider. Equilibrium yield curves, Octubre 2006. URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/12609.html>.

Monika Piazzesi, Martin Schneider, y Selale Tuzel. Housing, consumption and asset pricing. *Journal of Financial Economics*, 83(3):531–569, Marzo 2007.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v83y2007i3p531-569.html>.

Fernando Restoy y Philippe Weil. Approximate equilibrium asset prices. (6611), Junio 1998.

URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/6611.html>.

Roberto Rigobon y Brian P. Sack. The impact of monetary policy on asset prices. (8794), Febrero 2002.

URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/8794.html>.

Christina D. Romer y David H. Romer. A new measure of monetary shocks: Derivation and implications. (9866), Julio 2003.

URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/9866.html>.

Christopher A. Sims y Tao Zha. Were there regime switches in u.s. monetary policy? *American Economic Review*, 96(1):54–81, Marzo 2006.

URL <http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v96y2006i1p54-81.html>.

Ken Singleton. *Empirical Dynamic Asset Pricing*. Princeton University Press, 2006.

Thomas D. Tallarini Jr. Risk-sensitive real business cycles. *Journal of Monetary Economics*, 45(3):507–532, Junio 2000.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v45y2000i3p507-532.html>.

Harald Uhlig. On jeffreys prior when using the exact likelihood function. *Econometric Theory*, 10(3-4):633–644, Agosto 1994.

Jessica A. Wachter. A consumption-based model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 79(2):365–399, Febrero 2006.

URL <http://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v79y2006i2p365-399.html>.

Carl E. Walsh. *Monetary Theory and Policy*. The MIT Press, 2da edicion, 2003.

Philippe Weil. Nonexpected utility in macroeconomics. *The Quarterly Journal of Economics*, 105(1):29–42, Febrero 1990.

URL <http://ideas.repec.org/a/tpr/qjecon/v105y1990i1p29-42.html>.

Peter Whittle. Risk sensitivity, a strangely pervasive concept. *Macroeconomic Dynamics*, 6(01):5–18, Febrero 2002.

A Función Valor

Aquí soluciono la función valor tomando resultados de Hansen (2007), Hansen (2006), y Hansen, Heaton y Li (2008). Para simplificar la notación le otorgo a las funciones f sus notaciones lineales y asumo independencia entre regímenes. El caso general es similar.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{t+1} &= (\mu_{\Delta c} \ \mu_{\pi}(s_{1,t}))' + \mathbf{x}_t + \epsilon_{t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} &= \phi_x \mathbf{x}_t + K \epsilon_{t+1},\end{aligned}\tag{10}$$

El choque ϵ_{t+1} que afecta ambas ecuaciones se distribuye normalmente con media $(0 \ 0)'$, y matriz de varianza-covarianza $\Omega(s_{2,t})$. Recuerde, $s_{1,t}$ es independiente de $s_{2,t}$. La ecuación que el valor de continuación necesita satisfacer.

$$v_t = (1 - \beta)c_t + \beta(1 - \gamma)^{-1} \log \mathbf{E}_t(\exp((1 - \gamma)v_{t+1})).$$

Conjeture que la función valor es de la forma:

$$v_t = a + \mathbf{b}'\mathbf{x}_t + c_t + f(s_{2,t})$$

Considere la expresión $\mathbf{E}_t \exp((1 - \gamma)v_{t+1})$,

Constante en el tiempo t	$\exp((1 - \gamma)(a + \mathbf{b}'\phi_x \mathbf{x}_t + c_t + \mu_{\Delta c} + e_1' \mathbf{x}_t))$
Estocástica en el tiempo t	$\exp((1 - \gamma)(\eta' \epsilon_{t+1} + f_1 + f_2 s_{2,t+1}))$

donde $\eta' = \mathbf{b}'K + e'_1$. Así, por independencia, para solucionar la función valor tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a &= \beta\mu_{\Delta c} + \beta a \\
a &= \frac{\beta}{(1-\beta)}\mu_{\Delta c} \text{ con regímenes en Omega} \\
a &= \frac{\beta}{(1-\beta)}\mu_{\Delta c} + \frac{\beta}{(1-\beta)}(1-\gamma)\eta'\Omega\eta/2 \text{ sin regímenes en Omega} \\
c_t &= (1-\beta)c_t + \beta c_t \\
\mathbf{b}' &= \beta(\mathbf{b}'\phi_x + e'_1) \\
\mathbf{b}' &= \beta e'_1(I - \beta\phi_x)^{-1} \\
\mathbf{b} &= \beta(I - \beta\phi'_x)^{-1}e_1 \\
f_1 + f_2s_{2,t} &= \frac{\beta}{(1-\gamma)}\log \mathbf{E}_t \exp((1-\gamma)(f_1 + f_2s_{2,t+1})) + \frac{\beta}{2}(1-\gamma)\eta'\Omega(s_{2,t})\eta
\end{aligned}$$

La última ecuación puede ser vista como una ecuación Ricatti discreta, se soluciona numéricamente para f_1 y f_2 , más generalmente para f . Este conjunto de ecuaciones define el valor de continuación, y por construcción lo satisface.

Gráfica 29: Serie de tiempo obtenida del (log) real S.D.F.

La gráfica presenta la serie de tiempo obtenida para el (log) real del Factor de Descuento Estocástico bajo Epstein-Zin y bajo utilidad CRRA, $\gamma = 5$ y $\beta = 0.995$. El tiempo en el eje x, en trimestres.

B SDF, una segunda interpretación

Ahora considere una expresión alternativa para el (log) nominal del SDF. Para este fin tenemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}\kappa &\equiv \log \beta - \gamma \mu_{\Delta c} \\ \xi &\equiv -e'_1 - e'_2 \\ \sigma_1(s_{2,t}) &\equiv (-\gamma e'_1 - e'_1(\gamma - 1)\beta(I - \phi_x)^{-1}K - e'_2) \Sigma(s_{2,t}) \\ \sigma_2(s_{2,t+1}, s_{2,t}) &\equiv -(\gamma - 1)(f(s_{2,t+1}) - \beta^{-1}f(s_{2,t}))\end{aligned}$$

donde $\Omega(s_{2,t}) = \Sigma(s_{2,t})\Sigma(s_{2,t})'$, $e'_1 = (1 \ 0)$ y $e'_2 = (0 \ 1)$. Puedo luego reescribir el (log) nominal del SDF como $\kappa + \xi' \mathbf{x}_t + \sigma_1(s_{2,t})\zeta_{t+1} + \sigma_2(s_{2,t+1}, s_{2,t}) - \mu_\pi(s_{1,t})$, donde $\zeta_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, I)$.

El factor constante κ depende del coeficiente de aversión al riesgo γ , el factor de descuento subjetivo β , y la media del crecimiento del consumo $\mu_{\Delta c}$. Las cargas de factores ξ tienen un efecto de corto plazo, a través de -1 para $x_{1,t}$ y -1 para $x_{2,t}$.

El precio de mercado del riesgo está dado por $\sigma_1(s_{2,t})$. Tiene tres componentes, uno depende de $-\gamma\Sigma(s_{2,t})$ capturando el efecto de corto plazo. El segundo es $(\gamma - 1)(I - \beta\phi_x)^{-1}\Sigma(s_{2,t})$, explicando los efectos cruzados y de largo plazo. Su importancia crece con la persistencia de $\mathbf{x}_t$. Por último, $-e'_2\Sigma(s_{2,t})$, toma en cuenta el choque a la inflación.

Los cambios en $s_{2,t}$ tienen un efecto de largo plazo denotado $\sigma_2(s_{2,t+1}, s_{2,t})$. Más persistencia, como es medida por las probabilidades de transición $r_{i,i}$, hará la diferencia $f(s_{2,t+1}) - \beta^{-1}f(s_{2,t})$ más grande.

Recuerde la notación: $f(s_{2,t+1}) = f_1 + f_2 s_{2,t+1}$ en el caso de dos estados de régimen.

El precio de un “salto” de $s_{2,t} = 0$ a $s_{2,t+1} = 1$ (de $s_{2,t} = 1$ a $s_{2,t+1} = 0$) está dado por $(1 - \gamma)f_2$ (respectivamente, $-(1 - \gamma)\beta^{-1}f_2$). Entre más persistente el régimen $s_{2,t}$ sea, más grande en valor absoluto el salto en el precio será. Si no hay persistencia, i.e. $r_{i,i} = 1/2$ para $i = 1, 2$, el precio del salto disminuye. Estos resultados son una consecuencia directa de las propiedades del valor de continuación. Finalmente, el régimen $s_{1,t}$ en $\mu_\pi(s_{1,t})$ afecta linealmente el (log) del SDF.

C Detalles de la Valuación de Bonos

Esta sección presenta cómo encontrar una solución para los precios de bonos. Seguiré de nuevo el caso de la especificación en la última sección. Las pruebas para el caso general son análogas. Conjeture una función de precios de la forma.

$$P_t^{(n)}(\mathbf{x}_t, s_t) = \exp(-A(n) - \mathbf{B}(n)' \mathbf{x}_t - F(n, s_{t,2}) - G(n, s_{t,1}))$$

Así, recuerde que

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= a + \mathbf{b}' x_{t+1} + c_{t+1} + f_1 + f_2 s_{2,t+1} \\ m_{t+1} &= \log \beta - \gamma \Delta c_{t+1} + (1 - \gamma)(\hat{v}_{t+1} - \beta^{-1} \hat{v}_t) - \pi_{t+1} \end{aligned}$$

donde $\hat{v}_{t+1} = v_{t+1} - c_{t+1}$. Sucede que

$$\begin{aligned} (\hat{v}_{t+1} - \beta^{-1} \hat{v}_t) &= a + \mathbf{b}' x_{t+1} + f_1 + f_2 s_{2,t+1} \\ &\quad - \beta^{-1} a - \beta^{-1} \mathbf{b}' x_t - \beta^{-1} f_1 - \beta^{-1} f_2 s_{2,t} \\ &= \mathbf{b}'(\phi_x - \beta^{-1} I) x_t + \mathbf{b}' \phi_x K \epsilon_{t+1} + a(1 - \beta^{-1}) + \\ &\quad + f_1(1 - \beta^{-1}) + f_2 s_{2,t+1} - \beta_2^{-1} f_2 s_{2,t} \end{aligned}$$

Ahora debido a que

$$\mathbf{E} \left(\exp(m_{t+1}^{(r)} - \pi_{t+1}) P_{t+1}^{(n-1)}(\mathbf{x}_{t+1}, s_{t+1}) / P_t^{(n)}(\mathbf{x}_t, s_t) \right) = 1,$$

por la conjetura del precio, el S.D.F., e independencia entre regímenes; obtenemos las siguientes relaciones recursivas:

$$\begin{aligned} A(n) &= A(n-1) - \log(\beta) - \gamma e'_1 \mu_1 + (1 - \gamma)a(1 - \beta^{-1}) \\ &= A(n-1) - \log(\beta) + \mu_{\Delta c} \text{ con régimen en Omega} \\ &= A(n-1) - \log(\beta) + \mu_{\Delta c} + \frac{(1 - \gamma)^2}{2} \eta' \Omega \eta \text{ sin regímenes en Omega} \\ \mathbf{B}(n) &= \phi'_x \mathbf{B}(n-1) + \gamma e'_1 + (1 - \gamma) \mathbf{b}'(\phi_x - \beta^{-1} I) - e'_2 \\ &= \phi'_x \mathbf{B}(n-1) + e_1 + e_2 \text{ con y sin regímenes} \\ F(n, s_{2,t}) &= -\log(\mathbf{E}_t(\exp(-F(n-1, s_{2,t+1}) + 0.5 \psi(n-1)' \Omega(s_{2,t}) \psi(n-1)))) \end{aligned}$$

donde $\psi(n-1) \equiv -\gamma e'_1 + (1 - \gamma) \mathbf{b}' K - \mathbf{B}(n-1)' K - e_2 = -\gamma e'_1 + (1 - \gamma) \beta e'_1 (I - \beta \phi_x)^{-1} K - \mathbf{B}(n-1)' K - e_2$. Recuerde que $A(0) = 0$, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{0}$ y $F(0, s_{2,t}) = 0$

para todo s_t debido a que $P_t^{(0)}(\mathbf{x}_t, s_t) = 1$ para toda $\mathbf{x}_t$ y s_t , los cuales definen las condiciones iniciales. Estos pueden ser interpretados como las ecuaciones Ricatti discretas.

Note que la construcción del precio para el bono real es totalmente análoga, excepto que, naturalmente, la inflación es excluida (equivalentemente fije $e'_2 = (0 \ 0)$). Para una relación general en los regímenes, la construcción es similar excepto que el régimen es expandido $\mathbf{s}_t \equiv (s_{1,t}, s_{2,t})$ y así el precio del bono es de la forma:

$$P_t^{(n)}(\mathbf{x}_t, s_t) = \exp(-A(n) - \mathbf{B}(n)' \mathbf{x}_t - H(n, \mathbf{s}_t)).$$

D Detalles de los datos

Esta sección no intenta ser auto-contenida sino más bien como complemento del texto. Las gráficas para las series de tiempo del crecimiento del consumo, inflación, rendimientos y rendimientos reales son presentadas. Por inspección visual, la gráfica de la inflación justifica la exploración del régimen en la inflación promedio.

E Detalles de la estimación

Esta sección presenta estimados para las siguientes especificaciones del modelo:

- 1.Sin regímenes:** No hay regímenes que afecten el espacio de estados.
- 2.Heterocedasticidad:** el régimen $s_{1,t}$ es fijo, i.e. μ_π es constante, y el régimen $s_{2,t}$ afecta $\Omega(s_{2,t})$
- 3.Independientes:** el régimen $s_{1,t}$ afecta $\mu_\pi(s_{1,t})$, y $s_{2,t}$ afecta $\Omega(s_{2,t})$ y los regímenes $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes.
- 4.Mismos:** $s_{1,t}$ afecta $\mu_\pi(s_{1,t})$ y $\Omega(s_{1,t})$. En otras palabras, $s_{1,t} = s_{2,t}$.
- 5.Solamente un régimen asociado a ϕ_x .**
- 6.Un modelo con una tercera variable, crecimiento del ingreso laboral.**

Gráfica 30: Serie de tiempo para el crecimiento del consumo real.

El consumo considerado es para bienes no duraderos y servicios. Se asume que el crecimiento de la población es constante en cero. Así, el crecimiento del consumo no es ajustado. Fuente: NIPA.

Gráfica 31: Serie de tiempo para la inflación.

También presenta descripciones detalladas de los métodos de estimación usados en el documento.

F Estacionariedad

En la sección del modelo postulé el supuesto de necesitar raíces características ϕ_x estrictamente menores a uno. Esto es necesario por lo menos por dos razones: estacionariedad y para poder tomar el límite de $\sum_i^n \phi_x^i$ a medida que $n \rightarrow \infty$, lo cual se relaciona con el valor esperado de las variables en el modelo.⁶² Las Gráficas 34 y 35 presentan las distribuciones posteriores de las raíces características, asumiendo priors impropios. Para el componente asociado al crecimiento del consumo, el soporte de la distribución de la raíz característica es limitada por uno. Sin embargo, el soporte de la distribución de la raíz característica asociado con el componente de la inflación cubre elementos por encima de 1. Así, el supuesto de estacionariedad y poder tomar el límite de las sumas arriba mencionadas no son inofensivos.

⁶²Un tratamiento más general de este tema puede ser encontrado en Uhlig (1994). Él sugiere por razones discutidas ahí mismo el uso de, en el caso unidimensional, el prior de Jeffrey. En este caso tendría que ser generalizado a dos dimensiones.

Gráfica 32: **Series de tiempo para los rendimientos, todos los 6 vencimientos.**

Estas son las series de tiempo para los rendimientos de todos los 6 vencimientos usados en el documento: 1 T, 1 año, 2, 3, 4, y 5 años.
Fuente: CRSP.

Gráfica 33: Series de tiempo observadas para los rendimientos reales.

Estos son los rendimientos reales para todos los 6 vencimientos como se estimaron por McCulloch. Note que los periodos no coinciden con aquéllos considerados en nuestro análisis, aunque las magnitudes son comparables.

Fuente: www.econ.ohio-state.edu/jhm/ts/ts.html

Cuadro 8: **Esimados de ML bajo no regímenes, especificación S.**

Estos son los estimados para el espacio de estados sin regímenes. Los errores estándar están entre paréntesis. Las unidades son trimestralmente, e.g. el crecimiento del consumo bajo el régimen 1 es $0.8566 \times 4 = 3.42$ % por año.

Parámetro	Estimado	
$\mu_{\Delta c}$	0.8230	
	-	
μ_{π}	0.9267	
	-	
Ω	0.1857	-0.0376
	(0.0180)	(0.0095)
	-0.0376	0.0928
	(0.0095)	(0.0090)
ϕ_x	0.5525	-0.0925
	(0.1707)	(0.0540)
	0.2869	1.0294
	(0.1163)	(0.0346)
$eig(\phi_x)$	0.6168	
	0.9650	
K	0.2384	-0.1226
	(0.0757)	(0.0979)
	0.0921	0.5206
	(0.0489)	(0.0667)

Cuadro 9: Estimados de ML con regímenes en Ω , especificación H.

Estos son los estimados para el espacio de estados con un régimen con dos estados de régimen en la matriz de varianza-covarianza. Los errores estándar están entre paréntesis. Las unidades de tiempo son trimestralmente.

Parámetro	Estimado	
$\mu_{\Delta c}$	0.8230	-
μ_{π}	0.9267	-
$\Omega(s_{2,t} = 1)$	0.1880 (0.0183) -0.0583 (0.0153)	-0.0583 (0.0153) 0.1364 (0.0220)
$\Omega(s_{2,t} = 2)$	0.1880 (0.0183) -0.0124 (0.0123)	-0.0124 (0.0123) 0.0378 (0.0076)
ϕ_x	0.5641 (0.1552) 0.1848 (0.1065)	-0.0882 (0.0502) 0.9968 (0.0314)
$\text{eig}(\phi_x)$	0.6058 0.9551	
K	0.2296 (0.0714) 0.1238 (0.0456)	-0.1304 (0.0952) 0.5137 (0.0701)
Q	0.9716 (0.0268) 0.0433 -	0.0284 - 0.9567 (0.9714)

Cuadro 10: **Estimados de ML, regímenes independientes en μ_π y Ω , especificación I.**

Estos son los estimados para el espacio de estados con regímenes en $\mu_\pi(s_{1,t})$ y $\Omega(s_{2,t})$, cuando $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes. Los errores estándar están entre paréntesis. Las unidades son trimestralmente, e.g. el crecimiento del consumo bajo el régimen 1 es $0.8566 \times 4 = 3.42$ % por año. Las medias son fijadas ex-ante. La media para el crecimiento del consumo es la media incondicional. La varianza del choque que afecta el crecimiento del consumo se fija igual en cada estado de régimen. $\text{eig}(\phi_x)$ son las raíces características de ϕ_x .

Parámetro	Estimado	
$\mu_{\Delta c}$	0.8230	
	-	
$\mu_\pi(s_{1,t} = 1)$	1.1758	
	-	
$\mu_\pi(s_{1,t} = 2)$	0.6242	
	-	
$\Omega(s_{2,t} = 1)$	0.1836	-0.0587
	(0.0194)	(0.0212)
	-0.0587	0.1624
	(0.0212)	(0.0366)
$\Omega(s_{2,t} = 2)$	0.1836	-0.0244
	(0.0194)	(0.0100)
	-0.0244	0.0470
	(0.0100)	(0.0109)
ϕ_x	0.6268	-0.0450
	(0.1780)	(0.0415)
	0.2925	1.0296
	(0.0999)	(0.0240)
$\text{eig}(\phi_x)$	0.6626	
	0.9938	
K	0.1980	-0.1715
	(0.0958)	(0.0984)
	0.0907	0.5107
	(0.0414)	(0.0670)
Q	0.9761	0.0239
	(0.2536)	-
	0.0258	0.9742
	-	(0.2933)
R	0.9893	0.0107
	(0.3274)	-
	0.1480	0.8520
	-	(0.3208)

Cuadro 11: **Estimados de ML con el mismo régimen en μ_π y Ω , especificación M.**

Estos son los estimados para el espacio de estados con un régimen con dos estados de régimen en la inflación promedio y la matriz de varianza-covarianza. Los errores estándar están entre paréntesis. Las unidades de tiempo son trimestralmente.

Parámetro	Estimado	
$\mu_{\Delta c}$	0.8738	
	-	
$\mu_\pi(s_{2,t} = 1)$	1.1758	
	(0.0993)	
$\mu_\pi(s_{2,t} = 2)$	0.6242	
	(0.0965)	
$\Omega(s_{2,t} = 1)$	0.1844	-0.0855
	(0.0176)	(0.0242)
	-0.0855	0.1688
	(0.0242)	(0.0394)
$\Omega(s_{2,t} = 2)$	0.1844	-0.0239
	(0.0176)	0.0242
	-0.0239	0.0635
	(0.0242)	0.0394
ϕ_x	0.5343	-0.0967
	(0.1770)	0.0641
	0.1773	1.0032
	(0.0915)	0.0278
$eig(\phi_x)$	0.5743	
	0.9632	
K	0.2464	-0.0911
	(0.0730)	0.0958
	0.0603	0.3234
	(0.0423)	0.0531
R	0.9584	0.0416
	(0.0376)	-
	0.0054	0.9946
	-	(0.0054)

Cuadro 12: **Estimados de ML para el espacio de estados con regímenes en ϕ_x .**

Los estimados presentados son solamente para ϕ_x .

$\phi_x(s = 1)$	-0.0103 (0.0665)	-0.1482 (0.0643)
	0.2952 (0.0689)	0.9430 (0.0272)
$\phi_x(s = 2)$	8.1049 (1.2022)	0.2108 (0.5841)
	0.7357 (0.3946)	0.2458 (2.2217)

Gráfica 34: **Distribución posterior de la primera raíz característica de ϕ_x .**

Distribuciones posteriores de la primera raíz característica de ϕ_x . Priors impropios fueron asumidos para todos los parámetros con la excepción de K .

Cuadro 13: **Estimados de ML para el espacio de estados con 3 variables de estado.**

Estos son los estimados para el espacio de estados sin regímenes. Los errores estándar están entre paréntesis. Las unidades son trimestralmente, e.g. el crecimiento del consumo bajo el régimen 1 es $0.8566 \times 4 = 3.42$ % por año. La tercera variable es el crecimiento del ingreso laboral.

Parámetro	Estimado		
$\mu_{\Delta c}$	0.8230		
	-		
μ_{π}	0.9267		
	-		
$\mu_{\Delta L}$	0.5649		
	-		
Ω	0.1811	-0.0342	0.1560
	(0.0183)	(0.0097)	(0.0287)
	-0.0342	0.0869	-0.0612
	(0.0097)	(0.0107)	(0.0206)
	0.1560	-0.0612	0.7135
	(0.0287)	(0.0206)	(0.0699)
ϕ_x	0.0364	-0.1049	0.5496
	(0.7605)	(0.0714)	(0.5128)
	0.7304	1.0463	-0.3559
	(0.8113)	(0.0691)	(0.5482)
	-1.0143	-0.1500	1.1974
	(2.0366)	(0.1451)	(1.2633)
K	0.1686	-0.0307	0.0139
	(0.1095)	(0.0922)	(0.0874)
	0.0951	0.4533	0.0392
	(0.0912)	(0.1177)	(0.0307)
	0.5312	-0.1656	-0.0835
	(0.2919)	(0.1660)	(0.1131)

Gráfica 35: Distribución posterior de la segunda raíz característica de ϕ_x .

Distribuciones posteriores de las raíces características de ϕ_x . Priors impropios fueron asumidos para todos los parámetros con la excepción de K .

G Detalles de los rendimientos de corte transversal

El Cuadro 14 presenta los primeros cuatro momentos (estandarizados) de los rendimientos para las principales especificaciones del modelo, y los datos. Se discute el comportamiento de la varianza (desviación estándar) en el cuerpo principal del documento.

En lo concerniente al sesgo, todas las especificaciones son positivas. Solamente la especificación **I'** captura la pendiente negativa como en los datos. Colas derechas ligeramente menos pesadas están presentes en la parte izquierda de la curva. Excepto para la especificación M los estimados están por debajo. Sus magnitudes resaltan la importancia del régimen en μ_π para los rendimientos implícitos. En conjunto, colas derechas extendidas son capturadas para los rendimientos. Aun cuando la curtosis es subestimada en el modelo, su pendiente negativa es parte del modelo en la especificación **I**. Nuevamente, sugiriendo la importancia del régimen en μ_π . Funciona bien respecto a la autocorrelación, subestimándola ligeramente. Para resumir, siempre y cuando solamente las medias de los rendimientos de corte transversal sean usadas para la calibración, en

otras palabras el primer momento (i.e. el segundo paso de la estimación de dos pasos); el modelo tiene un desempeño en general satisfactorio. Estos resultados apoyan la especificación **I**.

H La Descomposición de PCA para los datos de los rendimientos

La Descomposición del Análisis de Componentes Principales para los datos de rendimientos es:

Gráfica 36: **Descomposición por Componentes Principales para los datos de rendimientos.**

La gráfica de los primeros tres componentes principales para los datos es mostrada. Las líneas son los componentes de “nivel,” “pendiente” and “curvatura”.

I Regresiones de predictibilidad adicionales

Esta sección presenta los resultados adicionales relacionados con las pruebas de predictibilidad de los rendimientos.

Cuadro 14: Los primeros cuatro momentos estandarizados.

El cuadro presenta el 1ero, 2do, 3ero y 4to momentos (estandarizados), y la autocorrelación (1 rezago) para los rendimientos implícitos en las especificaciones del modelo y de los datos. Recuerde la notación, la especificación **I** significa para un espacio de estados con régimen en $s_{1,t}$ en μ_π y $s_{2,t}$ en Ω , **M** significa la especificación que tiene los mismos regímenes $s_{1,t} = s_{2,t}$ para μ_π y Ω .

	1T	1A	2A	3A	4A	5A
Datos						
Media	5.15	5.56	5.77	5.94	6.07	6.15
Varianza	8.53	8.58	8.34	7.93	7.77	7.52
Sesgo	1.06	0.82	0.83	0.82	0.83	0.80
Curtosis	4.46	3.76	3.67	3.61	3.62	3.43
Autocorr.	0.94	0.95	0.96	0.96	0.97	0.97
H						
Media	5.4624	5.5613	5.7242	5.8900	6.0479	6.1949
Varianza	3.3967	2.9050	2.4801	2.1519	1.8768	1.6410
Sesgo	0.7794	0.8971	0.9577	0.9763	0.9791	0.9756
Curtosis	2.9193	3.0971	3.1943	3.2205	3.2197	3.2088
Autocorr.	0.9334	0.9464	0.9521	0.9540	0.9547	0.9548
I'						
Media	5.6059	5.5699	5.7160	5.8810	6.0425	6.1948
Varianza	3.7044	2.3431	1.9899	1.7572	1.5600	1.3849
Sesgo	0.8551	0.7137	0.7319	0.7272	0.7158	0.7034
Curtosis	3.0543	2.7716	2.8098	2.7943	2.7616	2.7258
Autocorr.	0.9298	0.9115	0.8905	0.8763	0.8649	0.8556
I'₂						
Media	5.9470	5.8642	5.8755	5.9297	5.9960	6.0646
Varianza	3.6490	2.9896	2.4418	2.0510	1.7493	1.5078
Sesgo	1.0507	1.1338	1.1272	1.0936	1.0607	1.0333
Curtosis	3.8907	3.9881	3.8702	3.7170	3.5878	3.4876
Autocorr.	0.9125	0.9351	0.9471	0.9530	0.9564	0.9586
M						
Media	5.5245	5.5850	5.7328	5.8958	6.0564	6.2099
Varianza	3.8862	3.4205	3.0162	2.6938	2.4167	2.1737
Sesgo	1.0686	1.1977	1.2715	1.3112	1.3388	1.3604
Curtosis	3.2691	3.4997	3.6485	3.7291	3.7835	3.8251
Autocorr.	0.9408	0.9536	0.9582	0.9595	0.9600	0.9601

Cuadro 15: Regresiones de predictibilidad de los rendimientos del periodo de tenencia.

El periodo es de 1952:2 a 2005:4. Fuente de los rendimientos: CRSP. Estas regresiones son para las especificaciones $\mathbf{M}$, $s_{1,t} = s_{2,t}$ e $\mathbf{I}$, donde $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$ son independientes. Bajo la EH $b = 0$. N está en años. $hpr_{t+1}^{(N+1)} - y_t^{(1)} = a + b(f_t^{(N \rightarrow N+1)} - y_t^{(1)}) + \epsilon_{t+1}$.

	N	a	$e.e.(a)$	b	$e.e.(b)$	R^2 aju.
Datos	1	-0.002	0.134	0.919	0.167	0.118
	2	-0.179	0.263	1.232	0.217	0.128
	3	-0.512	0.367	1.507	0.255	0.139
	4	-0.046	0.566	0.932	0.315	0.033
H	1	0.2801	0.0949	0.1426	0.2031	-0.0024
	2	0.5315	0.1931	0.1881	0.2266	-0.0015
	3	0.7446	0.2839	0.2518	0.2404	0.0005
	4	0.9233	0.3639	0.2980	0.2501	0.0021
I	1	0.1271	0.0844	0.5586	0.1866	0.0365
	2	0.3446	0.1959	0.4540	0.2419	0.0121
	3	0.6014	0.3073	0.3862	0.2713	0.0051
	4	0.8225	0.5033	0.3916	0.2852	0.0044
I₂	1	0.0226	0.0688	-0.0120	0.1829	-0.0048
	2	0.1717	0.1256	-0.0120	0.1995	-0.0049
	3	0.3449	0.1772	0.0264	0.2097	-0.0049
	4	0.4918	0.2239	0.0515	0.2196	-0.0048
M	1	0.2847	0.1023	0.0302	0.2527	-0.0047
	2	0.6764	0.2292	-0.0706	0.2963	-0.0046
	3	1.0597	0.3518	-0.0934	0.3166	-0.0045
	4	1.4124	0.5664	-0.1180	0.3315	-0.0044