Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

Nº 2010-03

Economías Infinitas Regulares

Enrique Covarrubias
Banco de México

Marzo 2010

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Economías Infinitas Regulares*

Enrique Covarrubias[†]
Banco de México

Resumen

La principal contribución de este trabajo es ubicar a las economías infinitas suaves en el marco de la variedad de equilibrio y la proyección natural à la Balasko. Demostramos que las economías infinitas suaves tienen un conjunto de equilibrio que tiene la estructura de una variedad diferencial de Banach y que la proyección natural es suave. Definimos economías regulares y críticas, y precios regulares y críticos, y demostramos que el conjunto de economías regulares coincide con el conjunto de economías cuya función de exceso de demanda sólo contiene precios regulares. Determinación genérica de equilibrios se obtiene como corolario.

Palabras Clave: Equilibrio general, economías infinitas, elección intertemporal, incertidumbre.

Abstract

The main contribution of this paper is to place smooth infinite economies in the setting of the equilibrium manifold and the natural projection map à la Balasko. We show that smooth infinite economies have an equilibrium set that has the structure of a Banach manifold and that the natural projection map is smooth. We define regular and critical economies, and regular and critical prices, and we show that the set of regular economies coincides with the set of economies whose excess demand function has only regular prices. Generic determinacy of equilibria follows as a by-product.

Keywords: General equilibrium, infinite economies, intertemporal choice, uncertainty.

JEL Classification: D5, D50, D51, D80, D90.

*El presente trabajo se llevó a cabo principalmente durante el periodo cuando el autor estaba afiliado al Departamento de Economía de la Universidad de Copenhague y parcialmente durante su visita a la Universidad de Oxford. El autor agradece a Yves Balasko, Leo Butler, Tarek Coury, Carlos Hervés-Beloso, Glenys Luke, Andreu Mas-Colell, John Quah, Michael Singer, Mich Tvede, y a los participantes de los seminarios en Edimburgo, Vigo, Warwick, el XVI Encuentro Europeo de la Teoría del Equilibrio General (Coventry, Inglaterra), así como el Encuentro sobre la Teoría del Equilibrio General (Copenhague, Dinamarca). Cualquier error o mala interpretación en este trabajo es responsabilidad del autor. Se agradece el apoyo a través de una beca para estudios de posgrado por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: ecovarrubias@banxico.org.mx.

1. Introducción

Para las economías de intercambio puro con un número finito de agentes y bienes, es bien sabido que todas las dotaciones iniciales que definen una economía poseen un equilibrio competitivo, y que *casi todas* las dotaciones iniciales dan lugar a un número finito de equilibrios. Además, la estructura del conjunto de equilibrio ha sido estudiada a detalle y, junto con el estudio sistemático del mapeo de proyección (Balasko, 1988), se sabe que el conjunto de equilibrio es conexo, simplemente conexo, es una variedad diferencial suave, es difeomorfo al espacio de las dotaciones iniciales, etc. Sin embargo, existen muchos ejemplos en la literatura económica donde el espacio de consumo es de dimensión infinita; normalmente estos modelos surgen cuando el consumo es una función de un parámetro $m \in M$, donde M podría significar un tiempo discreto infinito ($M = \mathbb{N}$), un tiempo continuo ($M = [0, T]$), los estados de la naturaleza ($M = [0, 1]$), la ubicación espacial ($M = \mathbb{R}^3$), las características del producto (M un conjunto compacto), etc.

Al intentar estudiar las economías infinitas, la literatura se ha encontrado con retos que parecen venir en al menos cuatro tipos:¹ (i) las preferencias estrictamente monótonas podrían no ser continuas o podrían no ser representadas en muchos espacios de consumo; (ii) las funciones de demanda no existen o no son continuas a menos que un conjunto específico de consumo sea elegido; (iii) el espacio de precios es demasiado grande; y (iv) el espacio

¹Para un recuento de las economías infinitas referimos al lector al trabajo de Mas-Colell y Zame (1991).

de consumo o el espacio de precios (o ambos) tienen la propiedad de tener un interior vacío lo que hace imposible el uso de herramientas de la topología diferencial.

Por ejemplo, el trabajo reciente de Hervés-Beloso y Monteiro (2009) ha demostrado que si consideramos preferencias representables o preferencias continuas estrictamente monótonas en un espacio de consumo con un continuo de bienes, el conjunto de consumo debería ser un subconjunto del espacio de funciones continuas (o de funciones integrables).

Para las funciones de demanda individual, Araujo (1988) muestra que cuando el conjunto de bienes es un espacio de Banach arbitrario, la función de demanda existirá solamente si el espacio de bienes es reflexivo. También muestra que aunque la función de demanda existe, será C^1 si y sólo si el espacio de bienes en efecto es un espacio de Hilbert. Estos resultados sugieren que a menos que utilicemos ℓ_2 o L_2 como el espacio de consumo, existe poca esperanza de estudiar la determinación en un marco general.

Otra posibilidad, como ha sido demostrado por Kehoe y colaboradores (1989), es estudiar la determinación de los equilibrios en economías con un doble infinito de agentes y bienes, donde el conjunto de bienes es escogido como un espacio de Hilbert. La desventaja de este enfoque, como ellos mismos lo describen, es que el dominio de precios (y de manera implícita, el conjunto de consumo) tiene un interior vacío. Esto significa que hasta cierto punto ellos permiten precios y consumo negativos.

Otro planteamiento es asumir utilidades separables. De cierta manera,

permitir utilidades separables es equivalente a descomponer un problema de optimización de dimensiones infinitas en una secuencia infinita pero de problemas de dimensión finita. La ventaja es que con separabilidad solamente un pequeño subconjunto del espacio entero de precios puede soportar equilibrios y, por lo tanto, no existe una verdadera pérdida de información por descartar aquellos elementos del espacio de precios que de cualquier modo no soportan equilibrios. Este enfoque ha sido seguido, por ejemplo, por Mas-Colell (1991), Chichilnisky y Zhou (1998), así como por Crès y colaboradores (2009).

Aún otro acercamiento sería utilizar el “método de Negishi”. Hablando de manera general, consiste en sustituir el estudio de los equilibrios de precios (que toman valores en un conjunto de dimensión infinita) por los pesos de bienestar asociados con las asignaciones de equilibrio (que toman valores en un espacio de dimensión finita si se tiene un número finito de agentes). Dicho enfoque ha sido utilizado, por ejemplo, por Balasko (1997a, 1997b, 1997c) para estudiar el modelo del horizonte infinito. El enfoque de punta consiste en utilizar el método de Negishi con una versión más débil de diferenciabilidad. Shannon (1999), así como Shannon y Zame (2002) introducen la noción de concavidad cuadrática y demuestran que la continuidad de Lipschitz del mapeo de exceso de gasto es suficiente para obtener determinación genérica. Puesto que la naturaleza de regularidad para las funciones de Lipschitz es más débil que para economías suaves, el conjunto de economías regulares no es abierto, ni tampoco es la intersección de una familia contable de conjuntos abiertos. En cambio, ellos utilizan un análogo teórico a la medida completa

de Lebesgue para espacios de dimensiones infinitas.²

En el presente documento proponemos ubicar las economías infinitas suaves en un marco *à la Balasko*. Esto es, como en dimensiones finitas, estudiamos el conjunto de equilibrio entero, demostrando que en realidad es una variedad diferencial, y combinándolo con un estudio del mapeo de proyección. Aunque Shannon y Zame (2002) consideran espacios y preferencias de bienes más generales, nuestro marco nos permitirá estudiar más que solamente determinación, mediante la posibilidad de estudiar la variedad entera de equilibrio. La razón técnica detrás de esto surge de descartar un gran subconjunto del espacio de precios que de cualquier modo no puede sportar equilibrios. Esto nos permitirá utilizar los análogos para dimensiones infinitas de los resultados de cálculo de varias variables, tales como los teoremas de la función inversa e implícita, el teorema del valor regular, y el teorema de Sard. Por lo tanto, podemos comparar los equilibrios de precios de economías que varían. Además, nuestro enfoque nos permite, entre otras cosas, mostrar que el conjunto del equilibrio es una variedad diferencial, definir los conceptos de economías regulares y críticas, y precios regulares y críticos, así como relacionar estos dos conceptos entre ellos y con el caso de dimensión finita. La determinación se obtiene como corolario.

El presente documento tiene la siguiente estructura. En la sección 2, men-

²Sin embargo, el método de Negishi presenta una advertencia: requiere que el primer teorema de bienestar aplique, lo que significa que no puede ser aplicado a modelos económicos que no llevan a situaciones de optimalidad, tales como economías con mercados financieros incompletos.

cionamos un par de ejemplos que llevan a economías infinitas. El primer ejemplo (con $M = [0, 1]$) es una economía de intercambio con incertidumbre, el segundo ($M = [0, T]$) es una economía con tiempo continuo. En la sección 3 revisamos material básico de la teoría de Fredholm. La propiedad de ser Fredholm es una propiedad que las funciones necesitan satisfacer para que resultados del cálculo diferencial y de topología puedan generalizarse a dimensiones infinitas. En la sección 4 definimos el mercado y estudiamos propiedades de las preferencias, el consumo, los precios, así como de las funciones de demanda individual. Posteriormente, en la sección 5 estudiamos las propiedades de las funciones de exceso de demanda agregada y mostramos dos resultados técnicos: que la función de exceso de demanda es un campo vectorial sobre el espacio de precio normalizado (de dimensión infinita) y que es un mapeo de Fredholm.

Las secciones 6 y 7 incluyen los resultados principales donde demostramos la existencia de un paralelo casi perfecto entre economías finitas y economías suaves de dimensión infinita. Aquí mostramos que el conjunto de equilibrio tiene la estructura de una variedad diferencial, definimos economías regulares y críticas, precios críticos y regulares y estudiamos la relación entre estos conceptos. Finalmente, mostramos como corolario la determinación de equilibrios.

2. Ejemplos de economías con un espacio de consumo de dimensión infinita

Con el propósito de fijar ideas, queremos describir en la presente sección dos ejemplos que de forma natural llevan a espacios de consumo con dimensiones infinitas. En la sección 4 explicaremos cómo estos ejemplos se ubican en un marco más general, en el que estudiamos economías regulares y críticas, así como precios regulares y críticos. Otros ejemplos se pueden ver en Mas-Colell y Zame (1991).

2.1. Un ejemplo de economías con incertidumbre

El siguiente ejemplo es un caso particular de Mas-Colell (1991) y Crès y colaboradores (2009), en el que consideramos una economía con dos periodos de tiempo $t = 0, 1$ con mercados financieros completos e incertidumbre en el segundo periodo de tiempo. El conjunto de estados es $M = [0, 1]$ y el mapeo C^1 , $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, es la densidad del conjunto de estados M . Suponemos que se tiene un número finito $i = 1, \dots, I$ de consumidores y un número finito n de bienes en cada periodo de tiempo y en cada estado. Una canasta de consumo es un par $x_i = (x_i^0, x_i^1)$ donde $t = 0$ el consumo es un vector $x_i^0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ y en $t = 1$ es un mapeo $x_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ de clase C^1 . Suponemos que los agentes están equipados con una dotación en $t = 0$ de la forma $\omega_i^0 \in \mathbb{R}_{++}^n$ y la dotación inicial en $t = 1$ de la forma $\omega_i^1 : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ de clase C^1 . Las preferencias se representan por la utilidad dependiente del tiempo y estado

de la forma

$$U_i(x_i) = u_i(x_i^0) + \int_M u^i(x_i^1(s)) \pi(s) ds.$$

Mas-Colell (1991) y Crès y colaboradores (2009) muestran que si $(p, x_1, \dots, x_I)$ es un equilibrio, entonces p y x_i para cada i son todos ellos mapeos continuos de M a $\mathbb{R}_{++}^n$. En otras palabras, los precios, el consumo y las dotaciones son elementos del mismo espacio $C(M, \mathbb{R}_{++}^n)$.

2.2. Una economía con tiempo continuo

Supongamos que en una economía el consumo de n bienes se lleva a cabo de manera continua a través del tiempo $t \in [0, T]$. Entonces, la función continua $x^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$ representa el consumo de n bienes por el agente i en el tiempo t . Como alternativa, $x(t)$ puede representar una tasa continua instantánea de consumo.

3. Teoría de Índice de Fredholm

Debido a que la teoría de Fredholm no se utiliza ampliamente en la literatura económica, en esta sección proporcionamos algunas definiciones básicas, en las que la referencia clásica es el trabajo de Smale (1965). Antes de presentar las definiciones formales, pretendemos aclarar la motivación de manera bastante informal.

3.1. Motivación

Supongamos que consideramos un mapeo lineal T entre cualquiera dos espacios vectoriales V y W . Podemos preguntar, qué condiciones tendría que satisfacer T para ser una función biyectiva, esto es, un mapeo que es al mismo tiempo inyectivo y suprayectivo. En caso de que T fuera biyectiva, esto también significaría que T es invertible.

Existen dos resultados básicos de álgebra lineal que contestarían esta pregunta. Primero, recordemos que el kernel de T , o $\ker T$, consiste en aquellos puntos de V que están mapeados al cero en W bajo T . Para que T sea inyectiva, requeriríamos que $\ker T = \{0\}$. De manera similar, recordemos que el rango de T , o $\text{range } T$, consiste de todos aquellos puntos que aparecen en la imagen bajo T en W . Para que T sea suprayectiva, requeriríamos que $\text{range } T = W$.

En realidad, estas dos condiciones son bastante restrictivas. Los operadores de Fredholm fueron introducidos, ya que, en términos generales, son “casi invertibles”: “casi inyectivos” y “casi suprayectivos”. Esto quiere decir que $\ker T$ es un subespacio de dimensión finita de V (no únicamente el punto $\{0\}$ pero tampoco un conjunto de dimensión infinita) y el rango de T “falla” el conjunto entero W solamente por un subespacio de dimensión finita.

Al expandir más estas nociones, dos mapeos lineales $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow V$ son “pseudoinversos” uno en relación con el otro si $ST = I + G_1$ y $TS = I + G_2$, donde I es la identidad y G_1 y G_2 son dos mapeos con rango de dimensión finita. En otras palabras, aunque ST y TS no son la

identidad, ellos no logran serlo solamente por una “perturbación compacta” de la identidad. Puede ser demostrado que $T : V \rightarrow W$ tendrá pseudoinversa únicamente si T es un operador de Fredholm. Los mapeos de Fredholm representan la noción no lineal del operador de Fredholm.

3.2. Definiciones

Si V y W son espacios lineales y $T : V \rightarrow W$ es un mapeo lineal, definimos el **kernel** de T , denotado por $\ker T$, como el conjunto de puntos en V mapeados al cero y el **rango** es la imagen de V bajo T en W . Además, si Y es un subespacio lineal de W , decimos que dos puntos w_1 y w_2 de W son **equivalentes módulo** Y , denotado por $w_1 = w_2(\text{mod}Y)$ si $w_1 - w_2 \in Y$. Denotamos por W/Y el conjunto de clases de equivalencia. Si además se tiene una estructura lineal, lo llamamos el **espacio cociente** y definimos $\text{codim}Y := \dim W/Y$.

Un **operador lineal de Fredholm** es un mapeo lineal continuo $L : E_1 \rightarrow E_2$ de un espacio de Banach a otro con las propiedades que:

1. $\dim \ker L < \infty$;
2. $\text{range } L$ es cerrado;
3. $\text{coker } L = E_2/\text{range}L$ tiene dimensión finita.

El **índice de un operador L de Fredholm** es un número entero dado por $\dim \ker L - \dim \text{coker}L$. Los operadores de Fredholm con índice cero

son particularmente relevantes puesto que las perturbaciones compactas de la identidad son operadores de Fredholm con índice cero, y, conversamente, cualquier operador de Fredholm con índice cero difiere de una perturbación compacta de la identidad únicamente por un homeomorfismo lineal.

Un mapeo de Fredholm es un mapeo $f : M \rightarrow V$ de clase C^1 entre variedades diferenciales localmente como espacios de Banach, tales que para cada $x \in M$ la derivada $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$ es un operador de Fredholm. **El índice de un mapeo de Fredholm** f en el punto $x \in M$ se define como el índice de $Df(x)$. Puede ser demostrado que si M es conexo, esta definición no depende de x . De nuevo, los mapeos de Fredholm con índice cero son de especial interés ya que cualquier difeomorfismo entre espacios de Banach es un mapeo de Fredholm con índice cero.

Un mapeo izquierdo de Fredholm³ es un mapeo entre variedades de Banach, de clase por lo menos C^1 , cuya derivada en cada punto tiene imagen cerrada y el kernel de dimensión finita.

Un mapeo es σ -**propio** si su dominio es la unión contable de conjuntos, restringida a cada uno de los cuales la función es propia.

³Algunos autores lo llaman **mapeo semi Fredholm**.

4. Mercado

4.1. Preferencias y consumo

Siguiendo con los ejemplos de la sección 2, asumimos que el **espacio de bienes** es $C(M, \mathbb{R}^n)$ donde M , el espacio de parámetros, es un subconjunto compacto de algún $\mathbb{R}^m$. El **conjunto de consumo** $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$ es por lo tanto el cono positivo de $C(M, \mathbb{R}^n)$. Consiste de las funciones en $C(M, \mathbb{R}^n)$ que tienen una imagen en $\mathbb{R}_{++}^n$. Nótese que X tiene un interior no vacío.

Suponemos que se tienen $i = 1, \dots, I$ agentes y que sus preferencias son fijas y se representan por una función de utilidad separable

$$U_i(x) = \int_M u^i(x(t), t) dt$$

donde $u^i(x(t), t) : \mathbb{R}_{++}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 estrictamente monótona, cóncava en donde $\{y \in \mathbb{R}_{++}^n : u^i(y, t) \geq u^i(x, t)\}$ es cerrada. Esto implica que $U_i(x)$ es estrictamente monótona, cóncava y dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet.

Caben dos comentarios. Primero, que Mas-Colell (1991) tiene un marco similar al propuesto por nosotros, y él señaló entonces, así como lo hacemos nosotros aquí, que la no-separabilidad fue uno de los principales obstáculos para una teoría general de economías regulares con un número infinito de bienes. Mientras que Shannon y Zame (2002) superaron esta dificultad para la cuestión de determinación, sigue siendo problemática para el estudio de

la variedad de equilibrio. En efecto, las principales contribuciones a nuestra comprensión de la variedad infinita de equilibrio (por ejemplo, Balasko 1997a, 1997c) asume separabilidad. El segundo comentario es que un doble infinito de bienes y agentes es causa de resultados fuertes de indeterminación. Aunque son meramente especulativos en esta etapa, sería posible extender el presente trabajo para considerar un continuo de agentes, análogo a Kehoe y colaboradores (1989). Este enfoque podría incluir la comprensión de qué condiciones podríamos llegar a necesitar para garantizar que “la función de exceso de demanda promedio” sea de Fredholm.

4.2. Precios

Estrictamente hablando, un precio $p : C(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y lineal que asigna valores reales a elementos de $C(M, \mathbb{R}^n)$, y que asigna valores no negativos a cualquier elemento de $C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$. En otras palabras, un precio es un elemento del cono positivo del espacio dual del conjunto de bienes. Sin embargo, puede ser demostrado que con utilidades separables, si el precio p soporta equilibrios, entonces $p \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$, es decir, los precios del equilibrio, consumo y dotaciones iniciales todos son elementos del mismo espacio X . Ver, por ejemplo, Mas-Colell (1991), Chichilnisky y Zhou (1988) o Crès y colaboradores (2009).

Si f y g son dos elementos de $C(M, \mathbb{R}^n)$, el producto interno sobre $C(M, \mathbb{R}^n)$ está dado por $\langle f, g \rangle = \int_M \langle f(t), g(t) \rangle dt$, de tal forma que si p

y x denotan precio y consumo respectivamente, el **valor** de x está dado por

$$\langle p, x \rangle = \int_M \langle p(t), x(t) \rangle dt.$$

Finalmente, como en dimensiones finitas, normalizamos los precios y definimos el **espacio de precios** como

$$S = \{p \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n) : \|p\|^2 = \langle p, p \rangle = 1\}.$$

4.3. Funciones de demanda individual

La función de demanda individual del agente i es un mapeo $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$ donde $f_i(p, y)$ es la solución única al problema de optimización

$$\max_{\langle p, x \rangle = y} U_i(x)$$

Denotemos por u_x la derivada parcial de u respecto a x . Se demuestra en Chichilnisky y Zhou (1998) que, dadas las suposiciones acerca de las funciones de utilidad hechas en 4.1, las funciones de demanda individual de todos los agentes satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\langle p, f_i(p, y) \rangle = y$ para cualquier $p \in S$ y para cualquier $y \in (0, \infty)$;
2. $u_x^i(f_i(p, y), t) = \lambda p$ para algún $\lambda > 0$;
3. $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$ es un difeomorfismo (es decir, f_i y su inversa son

continuamente diferenciables); como tal, $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$ es un mapeo de Fredholm de índice cero.

5. Dos propiedades de las funciones de exceso de demanda agregada

Recordemos que hemos fijado las preferencias de forma que los únicos parámetros que definen una economía son las dotaciones iniciales. De aquí en adelante, denotamos una economía por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_I) \in \Omega = X^I$. Para una economía fija $\omega \in \Omega$ su **función de exceso de demanda agregada** es un mapeo $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ definido por

$$Z_\omega(p) = \sum_{i=1}^I (f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) - \omega_i).$$

También definimos $Z : \Omega \times S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ mediante la evaluación

$$Z(\omega, p) = Z_\omega(p).$$

Definición 1. Decimos que $p \in S$ es un **equilibrio** de la economía $\omega \in \Omega$ si $Z_\omega(p) = 0$. Denotamos **el conjunto de equilibrio** por

$$\Gamma = \{(\omega, p) \in \Omega \times S : Z(\omega, p) = 0\}.$$

Para examinar la estructura de las funciones de exceso de demanda agre-

gada primero demostramos un resultado bien conocido, que la función de exceso de demanda define un campo vectorial en el espacio de precios.⁴

Teorema 1. *La función de exceso de demanda $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ de la economía $\omega \in \Omega$ es un campo vectorial en S .*

Demostración. Puesto que f_i satisface la propiedad de que $\langle p, f_i(p, y) \rangle = y$ para cualquier $p \in S$ y para cualquier $y \in (0, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle p, Z_\omega(p) \rangle &= \langle p, \sum_{i=1}^I (f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) - \omega_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^I \langle p, f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) \rangle - \sum_{i=1}^I \langle p, \omega_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^I \langle p, \omega_i \rangle - \sum_{i=1}^I \langle p, \omega_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Para poder usar técnicas de topología diferencial en dimensiones infinitas, necesitamos que nuestros mapeos sean de Fredholm. Ahora demostramos que éste es el caso para la función de exceso de demanda.

Teorema 2. *La función de exceso de demanda $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ de la economía $\omega \in \Omega$ es un mapeo de Fredholm con índice cero.*

⁴En el lenguaje de fibrados vectoriales, si denotamos por TS el fibrado tangente a S y TS_0 su sección cero, el Teorema 1 sostiene que podemos interpretar Z_ω como una sección de TS y un equilibrio como un punto donde esta sección se cruza con TS_0 .

La prueba del Teorema 2 es bastante computacional y por lo tanto la dejamos para el apéndice. Podemos mencionar, sin embargo, que la prueba consiste en dos partes. La primera pretende demostrar que si Df_i denota la derivada de Frèchet de $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$, entonces Df_i puede ser descrita como la suma de un operador invertible más un operador de rango finito, y por lo tanto, es un mapeo de Fredholm con índice cero. La segunda parte consiste en la computación explícita de la derivada de Frèchet de la función de exceso de demanda $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$, denotada por DZ_ω , en términos de las derivadas Df_i y nuevamente demostrar que puede ser descrita como la suma de un operador invertible más un operador de rango finito.

6. El conjunto de equilibrio

6.1. Valores regulares de Z

En la presente sección pretendemos demostrar que el conjunto de equilibrio Γ es una variedad diferencial. Nuestro resultado es una extensión del trabajo de Balasko (1988) para dimensiones infinitas. Demostraremos que Γ es una variedad diferencial en dos etapas: primero, en el Teorema 3, demostramos que 0 es un valor regular de la función de exceso de demanda Z . Entonces, utilizaremos este hecho en el Teorema 4 para demostrar que Γ en efecto es una variedad (de hecho, una variedad diferencial de Banach), y también que la proyección del conjunto de equilibrio al espacio de parámetro Ω es suave.

Teorema 3. *Supongamos que TS denota el fibrado tangente al espacio de precios S . Entonces, la derivada del mapeo $Z : \Omega \times S \rightarrow TS$ es un mapeo suprayectivo. En particular, tiene a 0 como un valor regular.*

También dejamos la prueba para el apéndice puesto que es bastante computacional.

6.2. Transversalidad

Necesitamos dos definiciones finales para demostrar que Γ es una variedad, pero primero recordemos que los “componentes” de un espacio topológico son los “elementos” en los que el espacio puede romperse. Precisamente, dado un espacio topológico $\mathcal{T}$, uno define una relación de equivalencia estableciendo que $t_1 \sim t_2$ si existe un subespacio conexo de $\mathcal{T}$ que contiene a t_1 y a t_2 . Las clases de equivalencia se llaman **componentes** de $\mathcal{T}$.

Adicionalmente, se dice que el subespacio cerrado F de un espacio de Banach E **se divide** si existe un subespacio cerrado $G \subset E$ tal que $E = F \oplus G$.

Definición 2. *(Abraham and Robbin, 1967, p.45) Sean X y Y variedades de clase C^1 , y sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo C^1 , y $W \subset Y$ una subvariedad. Se dice que f es **transversal a W en un punto $x \in X$** , en símbolos $f \pitchfork_x W$, si y sólo si, donde $y = f(x)$, o $y \notin W$, o si $y \in W$ entonces*

1. *la imagen inversa $(T_x f)^{-1}(T_y W)$ se divide; y,*
2. *la imagen $(T_x f)(T_x X)$ contiene un componente cerrado a $T_y W$ en $T_y Y$.*

Decimos que f es **transversal a** W , en símbolos $f \pitchfork W$, si y sólo si $f \pitchfork_x W$ para cada $x \in X$.

Definición 3. (Quinn, 1970) Una **representación C^∞ de mapeos** $\rho : A : M \rightarrow N$ consiste de las variedades de Banach A, M, N junto con una función $\rho : A \rightarrow C^\infty(M, N)$ de tal forma que el mapeo de evaluación

$$Ev_\rho : A \times M \rightarrow N, \quad (a, m) \mapsto \rho_a(m)$$

es C^∞ .

Estas dos nociones son relevantes porque Quinn (1970) demuestra que si tenemos un mapeo C^∞ , $F : W \rightarrow N$ que es transversal a Ev_ρ , y si formamos el diagrama de *pullback*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & W \\ h \downarrow & & F \downarrow \\ A \times M & \xrightarrow{Ev_\rho} & N \\ \pi_A \downarrow & & \\ A & & \end{array} \quad (1)$$

donde $P = (Ev_\rho \times F)^{-1}(\Delta_N)$ y Δ_N denota la diagonal en $N \times N$, entonces P es una variedad de Banach C^∞ , y $\pi_A \circ h$ es un mapeo C^∞ .

6.3. El conjunto de equilibrio es una variedad de Banach

Finalmente, estamos listos para demostrar que el conjunto de equilibrio Γ efectivamente es una variedad de Banach.

Teorema 4. *El conjunto de equilibrio Γ es una variedad C^∞ de Banach. La llamaremos **la variedad de equilibrio**. Además, el mapeo de proyección $pr_\Omega : \Omega \times S|_\Gamma \rightarrow \Omega$ es un mapeo de clase C^∞ .*

Demostración. Empecemos notando que $Z : \Omega \times S \rightarrow TS$ es una representación C^∞ de mapeos como se definió anteriormente. Notemos también que la inclusión $T_0S \rightarrow TS$ es un mapeo C^∞ . También sabemos del Teorema 3 que DZ es suprayectivo, de tal forma que tiene a 0 como un valor regular. Entonces, podemos formar un diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & T_0S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \times S & \xrightarrow{Z} & TS \\ pr_\Omega \downarrow & & \\ \Omega & & \end{array}$$

y como en el diagrama (1) de la Definición 3 obtenemos que Γ es una variedad de Banach de clase C^∞ y la proyección es un mapeo de clase C^∞ . $\square$

7. Economías regulares y críticas

En la presente sección definimos las nociones de economías infinitas regulares y críticas y de precios infinitos regulares y críticos. Recordemos que si f es un mapeo C^1 de un subconjunto abierto conexo de un espacio de Banach X hacia otro espacio de Banach Y , y Df denota la derivada de Frèchet de f , entonces $x \in X$ es un **punto regular** para f si $Df(x)$ es un mapeo suprayectivo lineal. Si $x \in X$ no es regular, x entonces se llama un **punto singular**.

De manera similar, los valores singulares y los valores regulares y de f se definen a través de considerar los conjuntos $f^{-1}(y)$. Si $f^{-1}(y)$ tiene un punto singular, y se llama un **valor singular**, de otra manera y es un **valor regular**.

Definición 4. Decimos que una economía infinita suave es **regular** (resp. **crítica**) si y sólo si ω es un valor regular (resp. crítico) de la proyección $pr : \Gamma \rightarrow \Omega$.

Definición 5. Sea Z_ω la función de exceso de demanda de la economía ω . Se dice que un sistema de precios $p \in S$ es un sistema **de precios de equilibrio regular** si y sólo si $Z_\omega(p) = 0$ y $DZ_\omega(p)$ es suprayectivo.

Nos gustaría hacer una comparación del conjunto de economías regulares con aquellas economías cuya función de exceso de demanda tiene sólo precios regulares. En dimensiones finitas estos dos conjuntos son iguales. Quinn

(1970) nos dir que estos dos conjuntos coinciden; precisamente, en el diagrama (1) de la Definicin 3, $\rho_a \in F$ si y slo si a es un valor regular de $\pi_A \circ h$. De esta manera, obtenemos:

Teorema 5. *Una economa $\omega \in \Omega$ es regular si y slo si todos los precios de equilibrio Z_ω son regulares.*

Demostracin. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & T_0S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \times S & \xrightarrow{Z} & TS \\ \text{\textit{pr}}_\Omega \downarrow & & \\ \Omega & & \end{array}$$

El resultado de Quinn dice que la funcin de exceso de demanda Z_ω es transversal al cero si y slo si 0 es un valor regular de $\text{\textit{pr}}_\Omega$. $\square$

7.1. Determinacin

Ahora nos gustara comprender qu tan grande es el conjunto de economas que arroja una funcin de exceso de demanda, con todos los precios de equilibrio siendo regulares. Para esto, necesitamos un resultado de Quinn quien tambin ha probado que un teorema de densidad transversal se mantiene en dimensiones infinitas.

Teorema 6. *(Quinn, 1970) Sea $\rho : A : M \rightarrow N$ una representacin C^∞*

de mapeos izquierdos de Fredholm, M separable, y $F : W \rightarrow N$ un mapeo izquierdo σ -propio de Fredholm de clase C^∞ . Si además

1. F es transversal a Ev_ρ ; y
2. cada ρ_a satisface que para cada $m \in M$ y $w \in W$ tal que $\rho_a(m) = F(w)$, implica que $(imT_m\rho_a) \cap (imT_wF)$ es de dimensión finita,

entonces el conjunto de puntos $a \in A$ con $\rho_a \pitchfork F$, es residual en A .

El teorema de densidad transversal de dimensión infinita puede ser utilizado para dar una prueba alternativa de que una economía genérica es regular.

Teorema 7. *El conjunto de economías regulares es residual en Ω . Esto es, el conjunto de economías $\omega \in \Omega$ que da lugar a una función de exceso de demanda Z_ω con sólo precios de equilibrio regulares, son residuales en Ω .*

Demostración. Observemos que la inclusión $T_0S \rightarrow TS$ dada por $p' \mapsto (p', 0)$ es σ -propia, puesto que su dominio consiste de un conjunto, restringido al cual la inclusión es propia ya que el mapeo de inclusión es continuo. Ahora, $T_0S \rightarrow TS$ también es izquierdo de Fredholm, porque la derivada del mapeo de inclusión es otra vez el mapeo de inclusión, lo que lo hace continuo (y así tiene una imagen cerrada) y tiene un kernel de dimensión finita.

También sabemos que $Z(\omega, p)$ tiene a 0 como un valor regular, puesto que $DZ(\omega, p)$ es suprayectivo.

Todo lo que necesitamos demostrar es que para cada $p \in S$ y $p' \in T_0S$, tal que $Z_\omega(p) = I(p')$, donde $I : T_0S \rightarrow TS$ es el mapeo de inclusión, tenemos que

$$(\text{im}T_pZ_\omega) \cap (\text{im}T_xI)$$

es de dimensión finita. Pero esto se deduce de inmediato si notamos que $Z_\omega(p) = I(p')$ siempre que p es un equilibrio, es decir, un cero del campo vectorial Z_ω . En este caso $(\text{im}T_pZ_\omega) = 0$ y $(\text{im}T_xI) = 0$. Por lo tanto, el Teorema 6 implica el resultado. $\square$

Referencias

- [1] Abraham, R. y Robbin, J. *Transversal Maps and Flows*. Benjamin, New York, 1967.
- [2] Accinelli, E. *About manifolds and determinacy in general equilibrium theory*. Estudios de Economía 30 (2003) 169-177.
- [3] Araujo, A. *The Non-Existence of Smooth Demand in General Banach Spaces*. Journal of Mathematical Economics 17 (1988) 309-319.
- [4] Balasko, Y. *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Academic Press Inc., 1988.
- [5] Balasko, Y. *The natural projection approach to the infinite horizon model*. Journal of Mathematical Economics 27 (1997a) 251-265.
- [6] Balasko, Y. *Pareto Optima, welfare weights, and smooth equilibrium analysis*. Journal of Economic Dynamics and Control 21 (1997b) 473-503.
- [7] Balasko, Y. *Equilibrium analysis of the infinite horizon model with smooth discounted utility functions*. Journal of Economic Dynamics and Control 21 (1997c) 783-829.
- [8] Chichilnisky, G. y Zhou, Y. *Smooth Infinite Economies*. Journal of Mathematical Economics 29 (1998) 27-42.

- [9] Crès, H., Markeprand, T. y Tvede, M. *Incomplete Financial Markets and Jumps in Asset Prices*. Discussion paper 09-12 (2009), Department of Economics, University of Copenhagen.
- [10] Hervés-Beloso, C. y Monteiro, P.K. *Strictly monotonic preferences on continuum of goods commodity spaces*. Journal of Mathematical Economics (2009) doi:10.1016/j.jmateco.2009.10.003.
- [11] Kehoe, T.J., Levine, D.K., Mas-Colell, A. y Zame, W.R. *Determinacy of Equilibrium in Large-Square Economies*. Journal of Mathematical Economics 18 (1989) 231-262.
- [12] Mas-Colell, A. *Indeterminacy in incomplete market economies*. Economic Theory 1 (1991) 45-61.
- [13] Mas-Colell, A. y Zame, W.R. *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces*. Handbook of Mathematical Economics, vol. IV (1991) ed. by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein, North Holland, Amsterdam.
- [14] Quinn, F. *Transversal Approximation on Banach Manifolds*. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 213–222 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [15] Shannon, C. *Determinacy of competitive equilibria in economies with many commodities*. Economic Theory 14 (1999) 29-87.
- [16] Shannon, C. y Zame, W.R. *Quadratic Concavity and Determinacy of Equilibrium*. Econometrica 70 (2002) 631-662.

- [17] Smale, S. *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*. American Journal of Mathematics 87 (1965) 861-866.

Apéndice

Demostración del Teorema 2

Demostración. Recordemos que el problema de los consumidores está dado por

$$\max_{x \in X} U_i(x) \quad \text{s.t.} \quad \langle p, x \rangle = w_i$$

donde

- $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$;
- $U_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por $U_i(x) = \int_M u^i(x(t), t) dt$;
- $u^i : \mathbb{R}_{++}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es, para cada i , una función estrictamente monótona, cóncava, de clase C^2 , donde $\{y \in \mathbb{R}_{++}^n : u^i(y, t) \geq u^i(x, t)\}$ es cerrado;
- En principio, p es un elemento del cono positivo del dual de $C(M, \mathbb{R}^n)$. Sin embargo, hemos explicado que con utilidades separables, de hecho p es un elemento de $X = C^{++}(M, \mathbb{R}^n)$;
- Aún más, normalizamos de tal forma que $p \in S$ donde

$$S = \{p \in C^{++}(M, \mathbb{R}^n) : \|p\| = 1\};$$

- $w_i = \langle p, \omega_i \rangle \in (0, \infty)$.

Notemos que $p \in S$ y $\omega_i \in X$, para cada i , son variables independientes (eso es, exógenamente determinadas) de este problema.

Ahora, por los supuestos que hicimos en la función de utilidad u^i (suavidad, concavidad, monotonidad), esto implica que para cada $p \in S$ y para cada $w_i \in (0, \infty)$ el problema de optimización tiene una solución única que denotaremos por $f_i(p, w_i)$ donde $f_i : S \times (0, \infty) \rightarrow X$.

Las condiciones de optimalidad de primer orden pueden ser escritas entonces de la siguiente forma:

$$w_i = \langle p, f_i(p, w_i) \rangle \quad (2)$$

$$DU_i(f_i(p, w_i)) = \lambda_i(p, w_i) \cdot p \quad (3)$$

donde DU_i denota la derivada de Fréchet de $U_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda_i : S \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es un multiplicador de Lagrange.

La estrategia es calcular las derivadas totales de las ecuaciones (2) y (3) y resolver para $Df_i(p, w_i)$. Explotaremos la simplicidad de $U_i(x)$ escrita en términos de u^i . Por consiguiente, primero escribimos las ecuaciones (2) y (3) como

$$w_i = \langle p, f_i(p, w_i) \rangle \quad (4)$$

$$u_x^i(f_i(p, w_i), t) = \lambda_i(p, w_i) \cdot p \quad (5)$$

Tomando las derivadas totales de ambos lados de las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$Dw_i = f_i(p, w_i) + \langle p, Df_i(p, w_i) \rangle$$

$$u_{xx}^i(f_i(p, w_i), t) \cdot Df_i(p, w_i) = \lambda_i(p, w_i) + p \cdot D\lambda_i(p, w_i)$$

donde escribimos $\langle p, Df_i(p, w_i) \rangle$ para denotar la transformación lineal Df_i compuesta con la transformación lineal p .

Simplificando y recordando, que $u^i(x)$ es cóncava, la transformación lineal (u_{xx}^i) es definida negativa y por lo tanto (u_{xx}^i) es invertible para cada t , por lo que tenemos

$$Dw_i = f_i(p, w_i) + \langle p, Df_i(p, w_i) \rangle \quad (6)$$

$$Df_i(p, w_i) = \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + (u_{xx}^i)^{-1} p \cdot D\lambda_i(p, w_i) \quad (7)$$

Al hacer la sustitución de la expresión de Df_i encontrada en (7) en Dw_i de la ecuación (6), y recordando que p es lineal, obtenemos

$$\begin{aligned} Dw_i &= f_i(p, w_i) + \langle p, Df_i(p, w_i) \rangle \\ &= f_i(p, w_i) + \langle p, \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + D\lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle \\ &= f_i(p, w_i) + \langle p, \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} \rangle + \langle p, D\lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle \\ &= f_i(p, w_i) + \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p + D\lambda_i(p, w_i) \langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D\lambda_i(p, w_i) = \frac{1}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} [Dw_i - f_i(p, w_i) - \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p] \quad (8)$$

donde el denominador $\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle$ no se hace cero puesto que p y $(u_{xx}^i)^{-1}$ son operadores positivos.

Sustituyendo la expresi3n de $D\lambda_i$ encontrada en (8) en (7) obtenemos,

$$\begin{aligned} Df_i(p, w_i) &= \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + D\lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p \\ &= \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \\ &\quad + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} [Dw_i - f_i(p, w_i) - \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p]. \end{aligned}$$

Lo que hemos mostrado es que $Df_i(p, w_i)$ puede ser escrita como la suma del operador invertible

$$\lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} Dw_i$$

y el operador de rango finito

$$-\frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} [f_i(p, w_i) + \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} p].$$

Ahora, sea $w_i = \langle p, \omega_i \rangle$ y recordemos que $Z_\omega : S \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ está dada por

$$Z_\omega(p) = \sum_{i=1}^I (f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) - \omega_i)$$

y así $DZ_\omega : TS \rightarrow TC(M, \mathbb{R}^n)$ está dada por

$$\begin{aligned} DZ_\omega(p) &= \sum_{i=1}^I Df_i(p, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} Dw_i \right\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} [f_i(p, w_i) + \lambda_i(p, w_i)(u_{xx}^i)^{-1} p] \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, de nuevo notemos que $u^i(x)$ es cóncava, por lo que la transformación lineal (u_{xx}^i) es definida negativa y por lo tanto (u_{xx}^i) es invertible. Adicionalmente, la suma de transformaciones lineales definidas negativas es de nuevo definida negativa. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^I \left\{ -\frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} [f_i(p, w_i) + \lambda_i(p, w_i)(u_{xx}^i)^{-1} p] \right\}$$

tiene rango finito, y

$$\sum_{i=1}^I \left\{ \lambda_i(p, w_i) (u_{xx}^i)^{-1} + \frac{(u_{xx}^i)^{-1} p}{\langle p, (u_{xx}^i)^{-1} p \rangle} Dw_i \right\}$$

es invertible. Por lo tanto, DZ_ω se escribe como la suma de un operador invertible y un operador de rango finito lo que a su vez implica que Z_ω es un

mapeo de Fredholm con índice cero. □

Demostración del Teorema 3

Demostración. Notemos que por las propiedades de las funciones de demanda individual estudiadas en la sección 4.3, obtenemos que Z es diferenciable. Necesitamos calcular la derivada

$$DZ : T(\Omega \times S) \rightarrow T(TS).$$

Linearizando $Z(\omega, p)$ a primer orden en ϵ , ignorando los términos $O(\epsilon^2)$, y haciendo $w_i = \langle p, \omega_i \rangle$, obtenemos

$$\begin{aligned} & Z(\omega_1 + \epsilon k_1, \dots, \omega_I + \epsilon k_I, p + \epsilon h) \\ &= \sum f_i(p + \epsilon h, \langle p + \epsilon h, \omega_i + \epsilon k_i \rangle) - \sum (\omega_i + \epsilon k_i) \\ &= \sum f_i(p + \epsilon h, \langle p, \omega_i \rangle + \epsilon \langle p, k_i \rangle + \epsilon \langle h, \omega_i \rangle) - \sum \omega_i - \epsilon \sum k_i \\ &= \sum [f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) + \epsilon (D_{w_i} f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(\langle p, k_i \rangle) + \\ &+ \epsilon (D_{w_i} f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(\langle h, \omega_i \rangle) + \epsilon (D_p f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(h)] - \sum \omega_i - \epsilon \sum k_i \\ &= Z(\omega_1, \dots, \omega_I, p) + \\ &+ \epsilon \sum [(D_p f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(h) + (D_{w_i} f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(\langle p, k_i \rangle + \langle h, \omega_i \rangle) - k_i] \end{aligned}$$

Alternativamente, en forma matricial, $DZ_{(\omega,p)} =$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 0}^{i=1, \dots, I} \\ \hline \underbrace{(D_{w_i} f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(\langle p, - \rangle) - Id}_{i=1, \dots, I} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline \sum_i (D_p f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(-) + \\ + \sum_i (D_{w_i} f_i)_{(p, \langle p, \omega_i \rangle)}(\langle -, \omega_i \rangle) \end{array} \end{array} \right)$$

donde la *raya* simplemente indica que el lado izquierdo de la matriz actúa en $(k_1, \dots, k_I)$ mientras el derecho actúa en h .

Para calculablr el cokernel de la transformación, sea

$$DZ_{(\omega,p)}(k_1, \dots, k_I, h) = (Q, \dot{Q}) \in T(TS).$$

Necesitamos resolver para $(k_1, \dots, k_I, h)$. Primero observemos que $h = Q$.

La segunda línea entonces sería,

$$\sum \{[(D_{w_i} f_i)(\langle p, k_i \rangle) - (k_i)] + [(D_p f_i)(Q)] + [(D_{w_i} f_i)(\langle Q, \omega_i \rangle)]\} = \dot{Q}.$$

Entonces,

$$\sum [(D_{w_i} f_i)(\langle p, k_i \rangle) - (k_i)] = H(Q, \dot{Q}) \quad (9)$$

donde

$$H(Q, \dot{Q}) = \dot{Q} - \sum \{[(D_p f_i)(Q)] + [(D_{w_i} f_i)(\langle Q, \omega_i \rangle)]\}.$$

Pero para cada $i = 1, \dots, I$, el mapeo

$$k_i \mapsto (D_{w_i} f_i)(\langle p, k_i \rangle) - (k_i)$$

es suprayectivo. Y, por lo tanto, también lo es DZ .

□