Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2009-17

**Correlaciones de Alta y Baja Frecuencia en Mercados
de Valores Globales**

Robert Engle
New York University

José Gonzalo Rangel
Banco de México

Diciembre 2009

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Correlaciones de Alta y Baja Frecuencia en Mercados de Valores Globales*

Robert Engle[†]
New York University

José Gonzalo Rangel[‡]
Banco de México

Resumen: Este estudio modela la variación de alta y baja frecuencia en correlaciones globales de valores bursátiles, usando una muestra amplia de 43 países que incluye mercados desarrollados y emergentes, durante el periodo 1995-2008. Estos dos tipos de variación se modelan utilizando el modelo semi-paramétrico Factor-Spline-GARCH de Rangel y Engle (2008). Esta estructura se extiende y modifica para incorporar el efecto de múltiples factores y abordar el problema de no-sincronía en los mercados internacionales. Nuestro análisis empírico sugiere que la dinámica de las correlaciones globales, que se mueve despacio, puede ser descrita por las especificaciones que utilizan el modelo Factor-Spline-GARCH, usando ya sea datos semanales o diarios. El análisis muestra que el componente de baja frecuencia de las correlaciones globales ha aumentado durante la reciente crisis financiera; sin embargo, este aumento no ha estado distribuido de manera uniforme entre los distintos países. Los países que mostraron mayor crecimiento en sus correlaciones con el resto del mundo fueron principalmente mercados emergentes.

Palabras Clave: Correlaciones condicionales dinámicas, variación de alta y baja frecuencia, mercados globales, no-sincronía.

Abstract: This study models high and low frequency variation in global equity correlations using a comprehensive sample of 43 countries that includes developed and emerging markets, during the period 1995-2008. These two types of variations are modeled following the semi-parametric Factor-Spline-GARCH approach of Rangel and Engle (2008). This framework is extended and modified to incorporate the effect of multiple factors and to address the issue of non-synchronicity in international markets. Our empirical analysis suggests that the slow-moving dynamics of global correlations can be described by the Factor-Spline-GARCH specifications using either weekly or daily data. The analysis shows that the low frequency component of global correlations increased in the current financial turmoil; however, this increase was not equally distributed across countries. The countries that experienced the largest increase in correlations were mainly emerging markets.

Keywords: Dynamic conditional correlations, high and low frequency variation, global markets, non-synchronicity.

JEL Classification: C32, C51, C52, G12, G15.

---

*Les agradecemos a Carlos Capistrán, Ron Gallant, Carla Ysusi y a quienes participaron en la edición 2009 de la conferencia “Volatilities and Correlations in Stressed Markets”, celebrada en Nueva York, así como en el Seminario de Investigación del Banco de México, por sus útiles discusiones y comentarios. Las opiniones expresadas en este artículo son las de los autores y no necesariamente reflejan el punto de vista del Banco de México.

[†] Department of Finance, Stern School of Business, New York University. Email: rengle@stern.nyu.edu.

[‡] Dirección General de Investigación Económica. Email: jgrangel@banxico.org.mx.

I. Introducción

El presente artículo presenta un marco de trabajo para separar los componentes dinámicos de corto y largo plazo de la estructura de correlación de los rendimientos internacionales de los valores bursátiles. La evolución de esta estructura juega un papel importante en la comprensión y evaluación de los impactos de la globalización financiera, no sólo en la asignación de portafolios y las prácticas de administración de riesgos, sino también en la estabilidad del sector financiero. Esto es especialmente importante en el contexto de la actual crisis financiera mundial, que probablemente conducirá a cambios regulatorios mayores y a la reorganización del sistema financiero internacional.

Si bien se reconoce que las correlaciones cambian con el tiempo, la atención se ha centrado principalmente en la dinámica de las correlaciones condicionales de alta frecuencia — que describe mejor los patrones de correlación de corto plazo —, al tiempo que se ha dejado de lado el componente lento de baja frecuencia que por lo general se asocia con la dinámica de largo plazo. Este artículo presenta una nueva medida de las correlaciones globales de baja frecuencia basadas en el modelo Factor-Spline-GARCH de Rangel y Engle (2008), mismo que aporta un marco semiparamétrico para extraer los componentes suavizados de correlación de baja frecuencia a partir de datos financieros de alta frecuencia mediante la explotación de una estructura de factores para la valuación de activos. El análisis de Rangel y Engle (2008) se enfoca en el mercado estadounidense y se basa en un marco de valuación de activos que sigue el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM, por sus siglas en inglés) de un solo factor. El presente artículo amplía esta especificación mediante el uso de una configuración multifactorial basada en la Teoría de la Valuación por Arbitraje (APT, por sus siglas en inglés) dentro de un contexto global. Como resultado, el componente de correlación de largo plazo está impulsado por las volatilidades de baja frecuencia de tres factores regionales globales (América del Norte, Europa y Asia) y las volatilidades idiosincráticas (específicas de cada país). El componente de correlación de alta frecuencia incorpora los efectos de ponderaciones de los factores que cambian en el tiempo y factores latentes no observables dentro de este contexto global. Las transacciones bursátiles no-sincronizadas que se llevan a cabo en todo el mundo han limitado el uso de los datos de alta frecuencia en los análisis de correlación. En el presente artículo, también se incorpora un paso de sincronización (basado en el marco de trabajo de Burns, Engle y Mezrich (1998)) que nos permite explotar la información de los datos diarios para estimar los dos componentes de correlación de diferentes plazos.

Este artículo es similar al reciente estudio que llevaron a cabo Bekaert, Hodrick y Zhang (2008), no obstante que nuestro marco de trabajo especifica de manera paramétrica las ecuaciones dinámicas que describen la variación en el tiempo de la volatilidad de los factores, las volatilidades idiosincráticas (específicas de cada país) y las ponderaciones. No se basa en estimaciones múltiples de regresiones móviles (*rolling*). El presente estudio es también el primero en incorporar de manera conjunta los comportamientos de correlación tanto de corto como de largo plazo en los mercados internacionales, incluyendo un gran número de países con distintos grados de desarrollo económico. El análisis empírico arroja más luz sobre la manera en que la estructura de correlación cambia en los mercados desarrollados y en vías de desarrollo. Asimismo, examina el alcance de esta evolución en el reciente periodo de dificultades financieras que comenzó con la contracción del crédito de agosto de 2007 y que se ha desarrollado durante todo 2008. Las correlaciones de este periodo de crisis se comparan con las del periodo previo a la crisis. Consecuente con la evidencia existente sobre la respuesta asimétrica de las correlaciones con los mercados bajistas sumamente volátiles (p. ej. Longin y Solnik (1995, 2001)), se halla que las correlaciones de baja frecuencia han aumentado sustancialmente durante la crisis financiera actual, pero el efecto no se ha distribuido de modo uniforme entre los países. Los mercados emergentes han mostrado mayores aumentos en su correlación con el resto del mundo debido a la dominancia del riesgo sistemático elevado sobre la creciente volatilidad idiosincrática observada durante este periodo.

Las correlaciones de baja frecuencia que se presentan en este artículo son relativamente fáciles de estimar a pesar de la dimensionalidad del sistema. La naturaleza suave de dichos componentes simplifica la comparación entre la evolución de las correlaciones y las variables económicas fundamentales lentas. Por ejemplo, el componente de baja frecuencia puede asociarse con las variables macroeconómicas, lo cual es conveniente para el análisis de políticas. De hecho, en la literatura se ha encontrado que la volatilidad del mercado es un componente importante de las correlaciones en el mercado estadounidense (véase Engle (2007)) y que la volatilidad de largo plazo específica para cada país responde a los cambios en las condiciones macroeconómicas locales (véase Engle y Rangel (2008)). En general, el componente de alta frecuencia aporta un nuevo marco para que los profesionales y los encargados de formular políticas puedan evaluar los comovimientos de largo plazo, lo cual es útil para la diversificación internacional y la regulación de los mercados globales.

En el presente artículo, se mantiene un equilibrio entre la disponibilidad de los datos y el número de países analizados. Se estiman las correlaciones de baja frecuencia para 43 países,

entre los que se incluyen tanto economías desarrolladas como mercados emergentes, mediante datos diarios del periodo que va de enero de 1995 a diciembre de 2008. El año inicial se seleccionó de modo que se incluyera a China en nuestro análisis, ya que este mercado emergente ha adquirido una enorme influencia en años recientes y comenzó a divulgar datos diarios de su mercado bursátil en 1995.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: La Sección II describe la especificación del modelo multifactorial Spline-GARCH para correlaciones de alta y baja frecuencia (en lo sucesivo, modelo FSG-CCD) y analiza sus principales propiedades. La Sección III describe los datos y el problema de la actividad bursátil asincrónica en los mercados internacionales. La Sección IV presenta los resultados de la estimación y analiza los patrones empíricos de las correlaciones globales. Por último, la Sección V presenta las conclusiones.

II. El modelo

La especificación del modelo sigue la versión multivariante del modelo FSG-CCD de Rangel y Engle (2008). En esta configuración, los rendimientos del capital se describen mediante la Teoría de la Valuación por Arbitraje (APT) de Ross (1976), en donde K factores dominantes caracterizan los movimientos sistemáticos de los rendimientos de los valores bursátiles. Su variación residual es específica por activos (idiosincrática). Por lo tanto, el proceso de rendimiento del activo i se describe de la siguiente manera³:

$$r_{it} = \beta_i F_t + u_{it} \quad (1.1)$$

en donde $F_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_t)'$ es un vector de los factores dominantes, $\beta_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,k})'$ es un vector de las ponderaciones de los factores y u_{it} denota el rendimiento idiosincrático del activo i . Bajo una estructura no-condicional de factores perfecta, se satisfacen los siguientes supuestos:

$$cov(u_{i,t}, u_{j,t}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \sigma_{u,i}^2, & \text{si } i = j \end{cases}, E(u_{i,t}) = 0 \quad \forall i \quad (1.2)$$

$$cov(u_{i,t}, f_{k,t}) = 0, \text{ para cada } i, k \quad (1.3)$$

---

³ Para simplificar la notación, los rendimientos se consideran rendimientos inesperados. Por ejemplo, si R_{it} denota el rendimiento observado, entonces el rendimiento inesperado se define como $r_{i,t} = R_{i,t} - E_{t-1}(R_{i,t})$

Por consiguiente, el riesgo se divide en riesgo sistemático y riesgo idiosincrático. Es estándar elegir factores ortogonales con media cero, sin pérdida de generalidad.⁴ Por ende, podemos agregar el siguiente supuesto:

$$\text{cov}(f_{i,t}, f_{j,t}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \sigma_{f,i}^2, & \text{si } i = j \end{cases}, E(f_{i,t}) = 0 \forall i \quad (1.4)$$

Por lo tanto, el modelo de factores estándar impone la siguiente estructura en la matriz de covarianza de los rendimientos:

$$\text{cov}(r_{i,t}, r_{j,t}) = \beta_i \Sigma_F \beta_j' + \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \sigma_{f,i}^2, & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.5)$$

en donde Σ_F denota la varianza no-condicional del vector de factores, cuyos elementos se describen en (1.4). A partir de esta estructura podemos escribir la matriz de covarianza no-condicional de un vector de rendimientos $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, \dots, r_{N,t})$ como:

$$\text{cov}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t') = B \Sigma_F B' + \Sigma_u \quad (1.6)$$

en donde $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)'$ y Σ_u denotan la varianza no-condicional de los términos idiosincráticos, cuyos elementos se definen en (1.2). La expresión anterior resume las restricciones no-condicionales impuestas por la estructura factorial. Sin embargo, mantener dichas restricciones de manera condicional impone ponderaciones de factores constantes y descarta los impactos de los factores latentes que pudieran aparecer repentinamente en algunos periodos de tiempo. Como se argumenta en Engle (2009) y Rangel y Engle (2008), al tomarse en cuenta las desviaciones temporales de las condiciones (1.2)-(1.4) se pueden incorporar los efectos de la variación en el tiempo de las ponderaciones de los factores, así como los efectos de los factores latentes no observados en el comportamiento dinámico de las correlaciones de los valores bursátiles.

Siguiendo esta intuición, se incorporan los efectos mencionados al relajar las condiciones (1.2)-(1.4) y modelar la dinámica de las covarianzas condicionales entre factores y rendimientos idiosincráticos, incluyendo la covariación dinámica dentro del grupo de factores y dentro del grupo de términos idiosincráticos. Esta estrategia y la estructura factorial de (1.1) conducen a la siguiente especificación de la varianza condicional en el momento t (dado en el conjunto de datos Φ_{t-1} que incluye toda la información disponible hasta el momento $t - 1$):

---

⁴ La ortogonalización de los factores solo facilita la interpretación no-condicional de las ponderaciones de los factores, pero no tiene otros efectos sobre el modelo.

$$cov_{t-1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t) = B\Sigma_{F,t}B' + Bcov_{t-1}(F_t, \mathbf{u}_t) + cov_{t-1}(\mathbf{u}_t, F_t)B' + \Sigma_{u,t} \quad (1.7)$$

en donde $\Sigma_{F,t} \equiv cov_{t-1}(F_t, F_t)$ y $\Sigma_{u,t} \equiv cov_{t-1}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t)$. No es necesario que estas matrices de covarianza condicionales sean diagonales. Incluso si los factores no están correlacionados de manera no-condicional (y satisfacen (1.4)), pueden estar correlacionados de manera condicional. Esta desviación de las restricciones no-condicionales es transitoria siempre y cuando la covarianza condicional se revierta a una media dada por la restricción en (1.4). De manera similar, los términos idiosincráticos podrían satisfacer (1.2), pero se permite que se correlacionen condicionalmente y que dichas correlaciones se reviertan en media hacia su expectativa no-condicional. Un caso en el que solo el primer y último términos de la ecuación (1.7) aparecen en la especificación de la covarianza corresponde a un modelo de covarianza que captura el efecto dinámico de los factores latentes no observados. Cuando agregamos los dos términos en la parte media de (1.7), que captan la covariación dinámica entre factores y términos idiosincráticos, tenemos una especificación que puede capturar los impactos tanto de la variación en el tiempo de la ponderación de los factores como los factores latentes no observados.⁵

Para especificar el modelo, es necesario parametrizar todos los términos de la ecuación (1.7). Seguimos el modelo FSG-CCD de Rangel y Engle (2008), que combina el marco de trabajo Spline-GARCH de Engle y Rangel (2008) y la estructura factorial dada en (1.1) para separar un componente de correlación de baja frecuencia de los términos de correlación de alta frecuencia. Específicamente, bajo normalidad condicional, el modelo factorial de (1.1) puede escribirse en su forma condicional de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_t | F_t, \Phi_{t-1} \sim N(BF_t, H_{u,t}), \quad F_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, H_{F,t}), \quad (1.8)$$

donde

$$H_{u,t} = \Sigma_{u,t} R_{r,r,t} \Sigma_{u,t} \quad y \quad H_{F,t} = \Sigma_{F,t} R_{f,f,t} \Sigma_{F,t},$$

$$R_{r,r,t} \quad y \quad R_{f,f,t} \quad \text{son matrices de correlación,}$$

$$\Sigma_{u,t} \quad y \quad \Sigma_{F,t} \quad \sim \text{el modelo Spline-GARCH diagonal,} \quad (1.9)$$

---

⁵ Este resultado se deriva de la aplicación de la Proposición 1 de Rangel y Engle (2008) al caso multifactorial. Si $cov_{t-1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t) = B\Sigma_{F,t}B' + \Sigma_{u,t}$, la especificación captura el efecto temporal de los factores latentes. Si esta covarianza incluye todos los términos de (1.7), el modelo incorpora tanto la variación en el tiempo de las ponderaciones de los factores como los factores latentes no observables. Como se explica en esta proposición, la variación en el tiempo de las ponderaciones es temporal desde un nivel constante, el cual está dado por la matriz B en el caso multifactorial.

Bajo esta configuración, $\Sigma_{u,t} = \Gamma_{u,t} D_t^2$ y $\Sigma_{F,t} = \Gamma_{F,t} G_t^2$ donde $\Gamma_{u,t} = \text{diag}\{\tau_{i,t}\}$, $D_t = \text{diag}\{g_{i,t}^{1/2}\}$, para $i = 1, 2, \dots, N$, $\Gamma_{F,t} = \text{diag}\{\tau_{f,j,t}\}$, y $G_t = \text{diag}\{g_{f,j,t}^{1/2}\}$, para $j = 1, 2, \dots, K$. A la usanza de Engle y Rangel (2008), las $\tau_{i,t}$ se especifican como curvas *spline* cuadráticas exponenciales y las $g_{i,t}$ son procesos GARCH asimétricos (con media unitaria). Elemento por elemento, tenemos:

$$\begin{aligned} u_{i,t} &= r_{i,t} - \beta_i' F_t = \sqrt{\tau_{i,t} g_{i,t} \varepsilon_{i,t}}, \quad i = 1, \dots, N \\ \tau_{f,j,t} &= \sqrt{\tau_{f,j,t} g_{f,j,t} \varepsilon_{f,j,t}}, \quad j = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (1.10)$$

en donde los componentes de varianza de alta y baja frecuencia de los términos idiosincráticos se definen como:

$$\begin{aligned} g_{i,t} &= \left(1 - \theta_i - \phi_i - \frac{\gamma_i}{2}\right) + \theta_i \frac{u_{i,t-1}^2}{\tau_{i,t-1}} + \gamma_i \frac{u_{i,t-1}^2 I_{r_{i,t-1} < 0}}{\tau_{i,t-1}} + \phi_i g_{i,t-1}, \\ \tau_{i,t-1} &= c_i \exp\left(w_{i0}t + \sum_{s=1}^{k_i} w_{is}((t - t_{s-1})_+)^2\right), \quad \text{para } i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.11)$$

y los componentes de varianza de los factores son:

$$\begin{aligned} g_{f,j,t} &= \left(1 - \theta_{f,j} - \phi_{f,j} - \frac{\gamma_{f,j}}{2}\right) + \theta_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2}{\tau_{f,j,t-1}} + \gamma_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2 I_{f_{j,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_{f,j} g_{f,j,t-1}, \\ \tau_{f,j,t-1} &= c_{f,j} \exp\left(w_{f,j0}t + \sum_{s=1}^{k_{f,j}} w_{f,j,s}((t - t_{s-1})_+)^2\right), \quad \text{para } j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.12)$$

El modelo se completa al agregar dinámica a la covariación entre factores e innovaciones idiosincráticas. Caracterizamos esta dinámica mediante el modelo de de correlación condicional dinámica (DCC, por sus siglas en inglés) de Engle (2002). Específicamente, el vector $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{N,t}, \varepsilon_{f,1,t}, \dots, \varepsilon_{f,K,t})' \sim DCC$, y su estructura de correlación pueden expresarse como una matriz de correlación particionada:

$$V_{t-1}(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} R_{r,r,t} & R_{r,f,t} \\ R_{f,r,t} & R_{f,f,t} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

en donde $R_{r,r,t}$ describe las correlaciones entre innovaciones idiosincráticas, $R_{r,f,t}$ caracteriza las covarianzas entre innovaciones idiosincráticas y factoriales, y $R_{f,f,t}$ describe la correlación entre innovaciones factoriales. Por lo tanto, el modelo entero parametriza la matriz de covarianza condicional de los rendimientos en la ecuación (1.7) como:

$$\text{cov}_{t-1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t) = B\Gamma_{f,t}^{1/2}G_tR_{f,f,t}G_t\Gamma_t^{1/2}B' + BR_{f,r,t}D_t\Gamma_t^{1/2} + \Gamma_t^{1/2}D_tR_{r,f,t}B' + \Gamma_t^{1/2}D_tR_{r,r,t}D_t\Gamma_t^{1/2}, \quad (1.14)$$

Asimismo, la siguiente expresión define la covarianza de baja frecuencia:

$$\gamma_{t-1} = B\Gamma_{f,t}B' + \Gamma_t^{1/2}\bar{R}_{r,r}\Gamma_t^{1/2}, \quad (1.15)$$

en donde $\bar{R}_{r,r}$, es la correlación no-condicional de las innovaciones idiosincráticas. El supuesto de que los factores y los términos idiosincráticos no están correlacionados de manera no-condicional se mantiene al imponer la restricción $\bar{R}_{r,f} = 0$. Por esta razón, los dos términos ubicados en la parte media de (1.14) se desvanecen en la ecuación de baja frecuencia. El primer y último términos se derivan del supuesto de que los factores no están correlacionados de manera no-condicional $\bar{R}_{f,f} = I_{k \times k}$ y la propiedad de que las varianzas unitarias de GARCH se revierten a una media de uno ($E(G_t) = I_{k \times k}$ y $E(D_t) = I_{N \times N}$). Rangel y Engle (2008) demostraron, en el caso unifactorial, que la media del componente de correlación de alta frecuencia se revierte a una media dada por el término de baja frecuencia que es variable en el tiempo. La generalización de este resultado en el caso multifactorial es sencilla a partir de las propiedades antes mencionadas. Por lo tanto, la correlación de alta frecuencia, que se define como:

$$\text{corr}_{t-1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t) = \text{diag}\{\text{cov}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t)\}^{-1/2} \text{cov}_{t-1}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t) \text{diag}\{\text{cov}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t)\}^{-1/2}, \quad (1.16)$$

se revierte en media hacia la siguiente función suavizada variable en el tiempo que sirve mejor para describir la conducta de correlación a largo plazo:

$$LFR_t = \text{diag}\left\{B\Gamma_{f,t}B' + \Gamma_t^{1/2}\bar{R}_{r,r}\Gamma_t^{1/2}\right\} \left(B\Gamma_{f,t}B' + \Gamma_t^{1/2}\bar{R}_{r,r}\Gamma_t^{1/2}\right) \text{diag}\left\{B\Gamma_{f,t}B' + \Gamma_t^{1/2}\bar{R}_{r,r}\Gamma_t^{1/2}\right\}^2, \quad (1.17)$$

Las ecuaciones (1.14)-(1.17) resumen la dinámica de alta y baja frecuencia de la estructura de correlación de los rendimientos de los valores bursátiles. Aplicamos este modelo para describir estos dos tipos de dinámica en los mercados internacionales. Sin embargo, la aplicación debe considerar el típico problema de datos no-sincronizados en los mercados internacionales. La siguiente sección presenta dos estrategias para aplicar el marco Factor-Spline-GARCH a los datos no sincronizados.

III. Los datos y el problema de las transacciones asincrónicas

En todo el mundo, las transacciones no-sincronizadas representan un problema empírico que surge cuando se emplean datos internacionales a altas frecuencias. La práctica común sugiere la utilización de datos semanales como la frecuencia más alta para evitar el problema de la sincronización. Sin embargo, dado que los datos diarios (o incluso datos con una frecuencia más alta) están disponibles para muchos países, sería deseable explotar toda la información disponible al medir, modelar y pronosticar correlaciones globales.

a) Métodos de sincronización

Algunos artículos se han enfocado directamente en el problema de no-sincronía. Los sesgos que surgen cuando los precios de cierre no están actualizados (y también los enfoques de corrección del sesgo) se han examinado en Scholes y Williams (1977) y en Lo y MacKinlay (1990). Burns, Engle y Mezrich (1998) introducen un modelo estadístico para “sincronizar” los datos de los rendimientos asociados con la valuación de activos que no se miden al mismo tiempo. Específicamente, este último estudio sugiere sincronizar los datos primero y luego ajustar el modelo de correlación a los datos sincronizados.

El problema de la no-sincronía en el contexto internacional puede ilustrarse con un ejemplo de tres mercados bursátiles cuyos horarios de apertura y cierre son distintos, pero fijos, y se conoce la diferencia en los husos horarios (p. ej. Estados Unidos, Europa y Asia). La figura 1 ilustra este problema. Si queremos sincronizar los rendimientos con respecto del mercado que opera más tarde, podemos restar la parte no sincronizada y sumarle el componente sincronizado faltante a los rendimientos de los mercados que operan más temprano. Por ejemplo, si nos enfocamos en este ejemplo, el rendimiento sincronizado de Europa (en términos de los Estados Unidos) sería:

$$S_{Et} = r_{Et} - \xi_{t-1} + \xi_t, \quad (1.18)$$

en donde r_{Et} es el rendimiento observado en el día t y ξ_t denota el rendimiento que habríamos observado desde la hora de cierre del mercado 2 (Europa en el día t) hasta la hora de cierre del mercado 3, Estados Unidos, el mismo día. El problema es que ξ_t no es observable. Burns, Engle y Mezrich (1998) estiman este componente no observado por medio de la proyección lineal del rendimiento no sincronizado observado de toda la información disponible hasta el

momento de la sincronización. Por lo tanto, a partir de (1.18) el rendimiento sincronizado estimado es:

$$\hat{s}_{2t} = r_{2t} - \hat{\xi}_{t-1} + \hat{\xi}_t, \quad \text{donde} \quad \hat{\xi}_t = E_t(r_{2,t+1} | \{r_{1t}, r_{2t}, r_{3t}\}, \Phi_t) \quad (1.19)$$

En el caso de N activos no sincronizados, estas ecuaciones pueden representarse como un sistema en el que el vector de los rendimientos no sincronizados, $S_t = (s_{1,t}, \dots, s_{N,t})'$, sigue un vector de promedios móviles de primer orden (VMA(1)) con una matriz de covarianza variable en el tiempo:

$$S_t = v_t + Mv_{t-1} + V_{t-1}(v_t) = H_{v,t}, \quad (1.20)$$

y el rendimiento sincronizado, junto con su varianza, se estiman como:

$$\hat{S}_t = (I + \hat{M})v_t, \quad V_{t-1}(\hat{S}_t) = (I + \hat{M})\hat{H}_{v,t}(I + \hat{M}), \quad (1.21)$$

en donde I es la matriz de identidad $N \times N$ y $\hat{M}$ es el coeficiente estimado del modelo VMA(1).

La estructura factorial que se presenta en la Sección II puede combinarse con este enfoque de sincronización para estimar las correlaciones de alta y baja frecuencia a partir de los datos diarios. Sin embargo, la estimación requiere de un paso adicional de sincronización que podría introducir errores de estimación sustanciales. En el presente artículo se examinan dos estrategias para implementar un paso de sincronización en la estimación de las correlaciones. La primera estrategia, denominada “Sincronización 1”, es la más sencilla. Aplica el marco de trabajo de Burns, Engle y Mezrich (1998) a los rendimientos observados antes de estimar el modelo factorial. Específicamente, sincronizamos primero los rendimientos y factores mediante (1.20) y (1.21). Luego, estimamos el modelo FSG-DCC de la Sección II mediante el enfoque GMM de dos pasos que se describe en Rangel y Engle (2008).

La segunda estrategia, denominada “Sincronización 2”, construye estimaciones consistentes de las ponderaciones de los factores y luego aplica el método de sincronización como un paso intermedio de la estimación FSG-DCC. Específicamente, los rendimientos y factores observados no sincronizados pueden modelarse como un VMA (1) de la forma:

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} F_t \\ \mathbf{r}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{F,t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{r,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{F,r} \\ A_{rF} & A_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{F,t-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{r,t-1} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

donde A_{FF} , $A_{F,r}$, A_{rF} y A_{rr} son matrices de coeficientes de las dimensiones $(K \times K)$, $(K \times N)$, $(N \times K)$ y $(N \times N)$, respectivamente. Entonces, como se ilustra en (1.21), el vector de factores sincronizados y rendimientos es:

$$s_t = \begin{pmatrix} \tilde{F}_t \\ \tilde{r}_t \end{pmatrix} = \left\{ I + \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{Fr} \\ A_{rF} & A_{rr} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{F,t} \\ \epsilon_{r,t} \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

Ahora, suponiendo que los rendimientos sincronizados sigan la estructura factorial de (1.1), las ponderaciones de los factores se definen por $\tilde{B} = \text{cov}(\tilde{r}_t, F_t) \Sigma_{\tilde{F}}^{-1}$. Elemento por elemento, $\tilde{\beta}_{i,k} = \frac{\text{cov}(\tilde{f}_{k,t}, \tilde{r}_{i,t})}{\text{var}(\tilde{f}_{k,t})}$.

Asimismo, a la usanza de Scholes y Williams (1977), la siguiente proposición caracteriza las ponderaciones de los factores sincronizadas en términos de los coeficientes no sincronizados.

Proposición 1: *Considérese el proceso de rendimiento de la ecuación (1.1) y supóngase que el vector de los factores y rendimientos sigue el proceso VMA(1) de la ecuación (1.22). Entonces las ponderaciones de los factores sincronizadas asociadas con el sistema sincronizado definido por (1.23) y la estructura factorial de (1.1) toman la siguiente forma:*

$$\tilde{\beta}_{i,k} = (\beta_{i,k} + \beta_{i,k}^+ + \beta_{i,k}^-) \frac{\text{Var}(f_{k,t})}{\text{Var}(\tilde{f}_{k,t})}, k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, N, \quad (1.24)$$

donde $\beta_{i,k} = \frac{\text{cov}(f_{k,t}, r_{it})}{\text{Var}(\tilde{f}_{k,t})}$, $\beta_{i,k}^+ = \frac{\text{cov}(f_{k,t+1}, r_{it})}{\text{Var}(\tilde{f}_{k,t+1})}$ y $\beta_{i,k}^- = \frac{\text{cov}(f_{k,t+1}, r_{i,t-1})}{\text{Var}(\tilde{f}_{k,t-1})}$; y $\{f_{k,t}\}_{k=1}^K$ denotan rendimientos y factores sincronizados.

La prueba de esta proposición se presenta en el Apéndice y su principal implicación para nuestro análisis es que las “verdaderas” ponderaciones de los factores pueden estimarse consistentemente si se añaden al sistema adelantos y retrasos de los factores no sincronizados.⁶ Por consiguiente, en vez de estimar (1.1), el primer paso para estimar la “Sincronización 2” consiste en estimar las ponderaciones de los factores, las innovaciones idiosincráticas y sus volatilidades a partir del siguiente sistema no sincronizado de rendimientos inesperados:

---

⁶ Se supone que $\text{Var}(f_{k,t}) = \text{Var}(\tilde{f}_{k,t})$. Esto es consistente con Scholes y Williams (1977) si los factores están serialmente no correlacionados.

$$\mathbf{r}_t = B\mathbf{F}_t + B^-\mathbf{F}_{t-1} + B^+\mathbf{F}_{t+1} + \mathbf{u}_t \quad (1.25)$$

A partir de este paso se obtienen estimaciones de la matriz sincronizada de ponderaciones ($\tilde{B}_s = \hat{B} + \hat{B}^- + \hat{B}^+$), estimaciones de los rendimientos idiosincráticos no sincronizados ($\hat{\mathbf{u}}_t$) y de sus volatilidades Spline-GARCH. El segundo paso requiere de la sincronización del vector $(\mathbf{F}_t', \hat{\mathbf{u}}_t')$ mediante el enfoque de Burns, Engle y Mezrich (1998). A partir de este paso se obtiene un estimador de la matriz de sincronización y un vector de factores sincronizados y rendimientos idiosincráticos, $(\tilde{\mathbf{F}}_t', \tilde{\mathbf{u}}_t')$. En el tercer paso, ajustamos un modelo DCC para este vector sincronizado. Como en (1.7), la estructura de correlación del sistema sincronizado toma la forma:

$$\text{cov}_{t-1}(\tilde{\mathbf{r}}_t, \tilde{\mathbf{r}}_t) = B\Sigma_{\tilde{\mathbf{F}},t}\tilde{B}' + \tilde{B}\text{cov}_{t-1}(\tilde{\mathbf{F}}_t, \tilde{\mathbf{u}}_t') + \text{cov}_{t-1}(\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{F}}_t')\tilde{B}' + \Sigma_{\tilde{\mathbf{u}},t}, \quad (1.26)$$

Mediante las estimaciones obtenidas en los tres pasos anteriores, tenemos todos los ingredientes para derivar formas sincronizadas de las ecuaciones (1.14) y (1.17) y estimar otra versión “sincronizada” del modelo FSG-DCC.

Una diferencia importante entre los dos métodos de sincronización descritos anteriormente es que si bien el primer enfoque arrastra los posibles errores de estimación derivados del ajuste del modelo VMA en (1.21) desde el paso inicial, el segundo método introduce estos términos de ruido en un paso intermedio que no afecta la estimación consistente de las ponderaciones de los factores. Si el error de estimación asociado con el modelo VMA es pequeño, entonces los dos enfoques deberían producir resultados muy similares. Evaluamos estos métodos de sincronización de manera empírica al evaluar su capacidad de ajustarse a las medidas de correlación de referencia libres de sesgos derivados de datos no-sincronizados.

b) Datos

Estudiamos los rendimientos diarios de los mercados de valores bursátiles de 43 países, entre los que se incluyen economías tanto desarrolladas como emergentes. Todos los rendimientos se expresan en dólares estadounidenses. El cuadro 1 muestra los países y la información de su clasificación de desarrollo, sus intercambios y sus índices de mercado. La composición de la muestra se basó en la disponibilidad de los datos. Los datos de los valores bursátiles se obtuvieron de Datastream, Global Financial Data y Bloomberg. Los datos del mercado de divisas se obtuvieron de Datastream y Bloomberg. El periodo de muestra comienza

en febrero de 1995 y termina en diciembre de 2008. El año inicial se seleccionó de modo que se incluyera a China en nuestro análisis, ya que este mercado emergente ha adquirido una enorme influencia en años recientes y comenzó a divulgar datos diarios de su mercado bursátil en 1995. Por consiguiente, la muestra consta de 3,612 observaciones diarias.

También se llevaron a cabo análisis mediante datos semanales para formar modelos de referencia que estén alineados con otros enfoques que usan datos de más baja frecuencia para así evadir el problema de la no-sincronía (p. ej. Dumas et al. (2003) y Bekaert et al. (2008)). Los datos semanales incluyen 723 observaciones.

En cuanto a los factores, se emplearon factores económicos observados que incorporan rendimientos de los mercados globales en tres regiones principales: Estados Unidos, Europa y Asia. Para Estados Unidos (factor 1), empleamos el índice S&P500. Para Europa (factor 2) y Asia (factor 3), empleamos el índice MSCI Europe y el índice MSCI Pacific (sin incluir a Japón), respectivamente. Los tres índices se miden en dólares estadounidenses. Representan el riesgo de mercado de regiones cuyas transacciones bursátiles no están sincronizadas. Por lo tanto, siguen los patrones descritos en la figura 1 y deben incluirse en los procesos de sincronización descritos anteriormente.

IV. Resultados empíricos

Nuestro análisis empírico explora patrones de alta y baja frecuencia de las correlaciones en los mercados de capitales internacionales. Procedemos a estimar tres variaciones del modelo FSG-DCC que se describen en la Sección II. La primera es el modelo FSG-DCC basado en datos semanales; la segunda es el modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la “Sincronización 1”; y la última es el modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la “Sincronización 2”.⁷ Además, computamos una medida de correlación de referencia que no se deriva de ningún modelo. A la usanza de Bekaert, Hodrick y Zhang (2008), estimamos la matriz de correlación muestral para cada semestre de la muestra mediante datos semanales.⁸ Si las correlaciones tienen poca variación en sus frecuencias, esto debería hacerse evidente en la secuencia de las correlaciones muestrales a 6 meses. Por lo tanto, comparamos sus patrones temporales con el componente de baja frecuencia de las correlaciones FSG-DCC. También

---

⁷ La “Sincronización 1” y la “Sincronización 2” se describen en la Sección III.

⁸ Bekaert, Hodrick y Zhang (2008) usan esta medida de la correlación muestral a 6 meses para evaluar ciertas especificaciones factoriales.

empleamos este punto de referencia para evaluar los métodos de sincronización mediante una métrica del error absoluto medio (EAM).

a) Evidencia derivada de los datos semanales

Primero analizamos el comportamiento de la correlación global a partir de los rendimientos semanales de los valores bursátiles. Los resultados de la estimación del modelo FSG-DCC se muestran en el cuadro 2. Los primeros tres renglones corresponden a los factores. Su volatilidad muestra una persistencia significativa que fluctúa entre 0.7 y 0.78, los efectos ARCH no son estadísticamente significativos, y los efectos del apalancamiento asimétrico son fuertes y significativos al nivel de 5%. En cuanto a las estimaciones por país, las últimas tres columnas dentro de la sección de los parámetros asociados a la media muestran las ponderaciones estimadas de los factores (betas). A excepción de China y Venezuela, al menos una de las ponderaciones es estadísticamente significativa para cada país. En cuanto a la sección de los parámetros de volatilidad, el coeficiente de persistencia es significativo para todos los países y su promedio es de 0.725; el efecto ARCH es significativo al nivel de 10% para 23 casos y su promedio es de 0.083; y el efecto asimétrico es significativo a este nivel para 25 casos y su promedio es de 0.058. El número de nodos fluctúa entre 1 y 5, y su promedio es de 2.2. La parte inferior del cuadro 2 presenta las estimaciones de los parámetros DCC asociadas con el segundo paso de la estimación FSG-DCC. Los dos parámetros se estiman mediante el enfoque de verosimilitud compuesta de Engle, Shephard y Sheppard (2008). Ambos son significativos al nivel de 5%.

La figura 2 ilustra los rasgos dinámicos de los componentes de correlación de baja frecuencia poniendo como ejemplo los casos de Alemania y Japón. La línea punteada representa el componente de alta frecuencia (CAF) y la línea suavizada describe el de baja frecuencia (CBF). La dimensionalidad del problema complica la ilustración de todas las correlaciones del sistema. En su lugar, ilustramos los principales patrones de correlaciones mediante promedios de corte transversal. Por ejemplo, supongamos que $\hat{\rho}_{i,j,t}^{(m)}$ es la correlación estimada de los valores bursátiles tomada del modelo m , asociada con los mercados i y j , en el momento t . Luego, la correlación promedio del mercado i se define como $\bar{\rho}_{i,t}^{(m)} = \sum_{j,j \neq i}^N \hat{\rho}_{i,j,t}^{(m)}$, y la correlación global promedio en el momento t es $\bar{\rho}_t^{(m)} = \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_{i,t}^{(m)}$.

La figura 3 presenta correlaciones globales promedio del FSG-DCC (CAF y CBF) semanal, y las de las correlaciones de la muestra de 6 meses. Ilustra la manera en que las correlaciones de la muestra de 6 meses se sitúan en torno al proceso CBF más suave. El CAF global describe un comportamiento de correlación de más corto plazo en los mercados globales. En general, esta figura ilustra que, en distintos grados de suavidad, las tres series muestran evidencia de patrones variables en el tiempo en correlaciones globales que van de 0.25 a 0.48 en el caso del CBF, de 0.17 a 0.69 en el caso de la muestra de 6 meses, y de 0.22 a 0.75 en el caso del CAF. Sus principales rasgos sugieren que las correlaciones de los valores bursátiles aumentaron lentamente durante el periodo 1995–2001; luego mostraron una ligera caída de 2001 a 2004; y finalmente, mostraron un aumento sustancial durante los últimos dos años de la muestra (2006–2008). Esto es consistente con la evidencia empírica existente acerca de la respuesta asimétrica de las correlaciones a los mercados bajistas sumamente volátiles (p. ej. Ang y Bekaert (2002), Ang y Chen (2002) y Longin y Solnik (1995, 2001)). Para explicar este comportamiento en términos de la estructura factorial de nuestro modelo, las figuras 4 y 5 ilustran los patrones dinámicos de las volatilidades idiosincráticas promedio y sistemáticas, respectivamente.⁹ La estructura factorial sugiere que los aumentos en las volatilidades idiosincráticas están asociados con declives en las correlaciones (*ceteris paribus*) y que los aumentos en las volatilidades de los factores conducen a aumentos en las correlaciones (*ceteris paribus*). Las figuras 4 y 5 sugieren que las volatilidades idiosincráticas, medidas a partir ya sea del modelo Spline-GARCH o de las muestras de 6 meses, se han movido en línea con las volatilidades de los factores, lo cual también es consistente con los estudios empíricos recientes que han encontrado un fuerte comovimiento entre estas volatilidades (p.ej. Campbell et al. (2001) y Guo y Savickas (2006, 2008)). Con base en estos patrones dinámicos y las implicaciones del modelo factorial, podemos argumentar que los dos efectos de volatilidad han tenido impactos opuestos en las correlaciones globales. Por ejemplo, durante los últimos dos años de la muestra, las volatilidades idiosincráticas promedio van al alza, pero no tanto como las volatilidades de los factores. En general, el aumento en las volatilidades de los factores parece dominar el efecto idiosincrático que ocasiona el aumento observado en las correlaciones globales de los valores bursátiles.

---

⁹ El promedio de las volatilidades idiosincráticas se define como: $\bar{\sigma}_{u,t} = \sum_{i=1}^N \sigma_{u,i,t}$ donde $\sigma_{u,i,t}$ es la volatilidad condicional de la innovación idiosincrática en (1.1).

b) Evidencia obtenida de los datos diarios

Una meta adicional del presente estudio es explorar el desempeño empírico de distintas estrategias que permiten el uso de información a frecuencias más altas para estimar las correlaciones dinámicas en un contexto internacional. En este apartado, empleamos datos diarios y aplicamos las estrategias de sincronización que se describen en la Sección III. El cuadro 3 muestra los resultados de la estimación del modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la “Sincronización 1”. En cuanto a los factores, todos los efectos GARCH son significativos y mayores que los del cuadro 2. Esto es consistente con la evidencia empírica anterior que muestra que la persistencia de la volatilidad tiende a disminuir con la agregación en el tiempo en los modelos tipo ARCH (p. ej. Chou (1988)). Los efectos ARCH y asimétricos tienden a ser menores, lo cual también es consistente con esta evidencia empírica sobre los efectos ARCH y la agregación en el tiempo. Todos los efectos asimétricos son significativos y dominan los términos ARCH. En cuanto a los parámetros de la media de los países, al menos una de las estimaciones de las ponderaciones de los factores es estadísticamente significativa para cada país. En términos de la varianza idiosincrática, el parámetro de persistencia es altamente significativo para todos los casos y su media es de 0.80, lo cual es sustancialmente mayor que la del caso semanal. Todos los coeficientes de volatilidad asimétricos son positivos y significativos, excepto los de Italia, Polonia y Venezuela, y el promedio correspondiente es de 0.07. Los términos ARCH son significativos en casi todos los casos (las excepciones son Irlanda y España) y su promedio es de 0.056. Estos promedios son ligeramente menores que los que se basan en datos semanales. El número promedio de nodos asociados con las funciones *spline* es de 4.82, más del doble del valor promedio de la estimación semanal. La parte inferior del cuadro 3 presenta las estimaciones DCC que impulsan el comportamiento dinámico de las correlaciones entre las innovaciones idiosincráticas y factoriales. Ambos coeficientes DCC son estadísticamente significativos. El efecto persistente es mayor que el del caso semanal y el efecto actualizador es ligeramente menor.

El cuadro 4 muestra los resultados de la estimación del modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la “Sincronización 2”. Estos resultados asociados con los factores son muy similares a los del cuadro 3. Aunque sucede lo mismo con las estimaciones por país, hay claras diferencias en términos de su significancia estadística. En este caso, de entre los coeficientes asociados a la media, al menos dos ponderaciones de factores son significativas para cada

caso.¹⁰ Los efectos GARCH y ARCH siempre son altamente significativos. El efecto asimétrico es estadísticamente insignificante solamente en cuatro casos. En cuanto a los valores promedio de estos efectos, la principal diferencia respecto del cuadro 3 es que el efecto ARCH promedio es ligeramente mayor y el número promedio de nodos es ligeramente menor. En términos de los parámetros DCC de la segunda etapa, el coeficiente de persistencia tiende a ser mayor y el coeficiente actualizador es menor.

Además de las diferencias en términos de la magnitud y la significancia estadística, evaluamos el ajuste empírico de estas dos especificaciones FSG-DCC siguiendo el enfoque EAM de Bekaert, Hodrick y Zhang (2008). Específicamente, promediamos los valores diarios ajustados de correlaciones (de baja frecuencia) durante periodos de cinco días y formamos correlaciones semanales. Luego, comparamos estas correlaciones estimadas semanales de baja frecuencia con las del modelo de correlación de referencia basado en datos semanales mediante la siguiente métrica de EAM:

$$EAM_{CORR} = \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{\tilde{t}=1}^{\tilde{T}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N |\tilde{\rho}_{i,j,t}^{(de\ referencia)} - \tilde{\rho}_{i,j,\tilde{t}}^{(FSG-DCC)}| \right), \quad (1.27)$$

donde $\tilde{t}$ se refiere a la nueva unidad de tiempo agregado en donde el punto de referencia varía y $\tilde{T}$ denota el número total de periodos.¹¹ Si un modelo factorial sincronizado tiene la estructura adecuada, debería capturar la mayor parte posible de la variación de baja frecuencia en las correlaciones globales que se presentan en la figura 3. Empleamos los dos modelos semanales que se muestran en esta figura para comparar el modelo FSG-DCC sincronizado. Asimismo, para esclarecer los beneficios de la utilización de un esquema de sincronización, agregamos una especificación FSG-DCC que hace caso omiso del problema de los datos no-sincronizados. A este modelo le llamamos el FSG-DCC no sincronizado. El cuadro 5 presenta los estadísticos EAM. Con respecto del punto de referencia de la muestra de 6 meses, los dos modelos sincronizados muestran un desempeño similar: se acercan al FSG-DCC semanal, que no está afectado por el sesgo de no-sincronía. En contraste, el EAM asociado con el FSG-DCC no sincronizado dista mucho de estos valores (es casi 12% más grande). El panel inferior muestra los resultados obtenidos mediante el punto de referencia FSG-DCC semanal.

---

¹⁰ Marcamos una ponderación sincronizada como estadísticamente significativa si al menos uno de los coeficientes no sincronizados (asociados con los factores contemporáneos, adelantados y atrasados) es estadísticamente significativo (véase la ecuación (1.24)).

¹¹ La ecuación (1.27) es una versión equitativamente ponderada del estadístico $ABSE_{CORR}$ empleado por Bekaert, Hodrick y Zhang (2008).

En este caso, domina el FSG-DCC diario basado en la “Sincronización 2”. Asimismo, su EAM es 45% menor que el del modelo no sincronizado.

Estos estadísticos de ajuste dentro de la muestra parecen favorecer de manera moderada el modelo FSG-CCD diario basado en la “Sincronización 2”.¹² Las figuras 6 y 7 presentan un ejemplo de los componentes de correlación y volatilidad de este modelo para un grupo de cuatro países en distintos usos horarios que incluyen un mercado emergente (Brasil) y tres mercados desarrollados (Francia, Japón y el Reino Unido). La figura 6 muestra las correlaciones de alta y baja frecuencia correspondientes junto con las correlaciones de ventanas móviles (basadas en un periodo de 100 días). La figura 7 ilustra los patrones de alta y baja frecuencia en las volatilidades idiosincráticas de estos países. Hay una clara tendencia al alza en las correlaciones de baja frecuencia dentro del grupo de economías desarrolladas. En contraste, la tendencia de correlación con respecto a Brasil muestra un patrón descendente durante 2008. Estos efectos pueden explicarse al ver el comportamiento de las volatilidades idiosincráticas en la figura 7. Si bien para los países desarrollados los componentes de baja frecuencia de las volatilidades idiosincráticas muestran un comportamiento que no va en aumento, Brasil muestra una notoria tendencia al alza en su volatilidad idiosincrática de largo plazo durante los últimos dos años.

El comportamiento agregado del modelo diario sincronizado se ilustra más detalladamente en la figura 8, que resume los resultados de la estimación del cuadro 4. Éstos incluyen las ponderaciones de los factores de cada país, así como los agregados de tiempo de las correlaciones de baja frecuencia y las volatilidades idiosincráticas. La figura también muestra agregados de correlaciones móviles (basadas en datos semanales y un periodo de tiempo de un año) para ilustrar nuevamente la bondad del ajuste del modelo diario. Los países más correlacionados son las economías desarrolladas y el grupo menos correlacionado está conformado por mercados emergentes. De manera consistente con una estructura factorial, también se hace patente que los países con niveles más elevados de volatilidades idiosincráticas tienden a tener correlaciones más bajas con el resto del mundo. Esto se da por construcción cuando observamos los agregados de correlación de baja frecuencia del modelo FSG-DCC. Sin embargo, las correlaciones promedio de ventanas móviles que no corresponden a ningún modelo están muy cerca de las correlaciones basadas en un modelo. Esto indica que

---

¹² Sin embargo, podría ser importante hacer más pruebas de predicción extramuestrales para seguir abordando el problema de la selección de modelos. Dejamos estos ejercicios para investigaciones futuras y, al enfocarnos en los resultados intramuestrales, ilustramos el desempeño de los modelos sincronizados mediante la especificación basada en la “Sincronización 2”.

una estructura factorial aporta un buen marco de trabajo para explicar un comportamiento de correlación global.

c) Las dificultades del mercado y las correlaciones globales

Las dificultades de los mercados financieros que hemos observado desde agosto de 2007 han producido aumentos importantes en las volatilidades sistemáticas y en las correlaciones globales (véanse las figuras 3-5). La volatilidad idiosincrática también ha aumentado —lo que contrarrestó parte de los impactos sistemáticos— pero sus niveles siguen por debajo de los que se observaron en 1998 (véase la figura 4). Como se mencionó anteriormente, el reciente aumento en las correlaciones puede atribuirse mayormente a la dominancia del componente sistemático. La figura 9 ilustra este aumento en las correlaciones alrededor de dos puntos, que puede verse como puntos de inflexión en la crisis financiera actual. Uno corresponde al inicio de la contracción del crédito el 6 de agosto de 2007 y el otro a la bancarrota del banco de inversión Lehman Brothers el 15 de septiembre de 2008. La figura muestra que las correlaciones promedio tanto de alta como de baja frecuencia (a partir del modelo FSG-DCC sincronizado) han aumentado en cerca del 20% a partir del inicio de la contracción del crédito y hasta una semana antes de la quiebra de Lehman. Sin embargo, mientras que la correlación promedio de baja frecuencia mostró un aumento de tan sólo el 5% desde la quiebra de Lehman hasta diciembre de 2008, el componente de alta frecuencia aumentó en un 29% durante este periodo.

Una pregunta obligada es si dichos aumentos en las correlaciones globales se distribuyen equitativamente entre países. Esto puede explorarse si observamos los cambios en la correlación de cada país con el resto del mundo, desde el periodo anterior a la contracción del crédito hasta diciembre de 2008.¹³ La figura 10 muestra esta distribución de cambios en las correlaciones promedio de baja frecuencia. A pesar de que la correlación promedio aumentó para todos los países (excepto Canadá), la distribución dista de ser uniforme. Cerca de 13 de los 43 países experimentaron un aumento en las correlaciones de más del 30%. A excepción de Nueva Zelanda, Japón y Austria, se trata de mercados emergentes. En contraste, un grupo de 17 países experimentaron aumentos moderados en sus correlaciones con el resto del mundo en porcentajes que están por debajo del 20%. Solo tres de estos países son mercados emergentes

---

¹³ Las correlaciones previas a la contracción del crédito se obtienen de las estimaciones de correlación de los datos diarios basados en el modelo FSG-CCD, la “Sincronización 2” y un periodo de muestra de febrero de 1995 al 3 de agosto de 2007. Nos enfocamos en el último año de esta muestra y calculamos la correlación promedio para cada país con el resto del mundo.

(Argentina, Brasil y Rusia). Por lo que respecta a los cambios en las correlaciones promedio de alta frecuencia, la figura 11 presenta su distribución. En este caso, diecinueve países muestran un aumento promedio del 50% en sus correlaciones. Como en el caso anterior, la mayoría de ellos son mercados emergentes (15 de 19). El caso de Venezuela merece una mención especial, ya que experimentó un aumento de casi 200% en su correlación de alta frecuencia promedio con el mundo durante el otoño de 2008.

Para entender mejor los resultados de la figura 10, es conveniente ver los cambios en las volatilidades idiosincráticas de baja frecuencia durante el reciente periodo de crisis (véase la figura 12). Entre el grupo de 13 países que experimentaron aumentos en su correlación promedio de baja frecuencia con el mundo, nueve de ellos tuvieron aumentos apenas moderados (de menos del 30%) en sus volatilidades idiosincráticas de largo plazo. Por lo que respecta al grupo de 17 países con cambios de correlación moderados, diez de ellos experimentaron aumentos importantes (de más del 60%) en sus volatilidades idiosincráticas de largo plazo. Estos resultados sugieren que los efectos sistemáticos han dominado las reacciones de baja frecuencia en la mayoría de las economías emergentes durante la crisis financiera actual. Desde luego, los resultados de la figura 11 conllevan interacciones más complejas entre volatilidades sistemáticas e idiosincráticas variables en el tiempo, betas variables en el tiempo, factores latentes no observados y correlaciones dinámicas entre factores.

V Comentarios finales

El presente estudio modela la variación de alta y baja frecuencia en correlaciones globales de valores bursátiles mediante el empleo de una muestra amplia de 43 países que incluye mercados desarrollados y emergentes, durante el periodo 1995–2008. El enfoque del modelo modifica y extiende el modelo Factor-Spline-GARCH (FSG-CCD) de Rangel y Engle (2008) al incorporar la interacción dinámica de múltiples factores e introducir explícitamente un paso de sincronización en el proceso de estimación para corregir por sesgos derivados de las transacciones bursátiles no-sincronizadas en los mercados internacionales.

Esta versión multifactorial tiene las mismas propiedades del modelo unifactorial de Rangel y Engle (2008). Específicamente, el componente de correlación de alta frecuencia explota la estructura de valuación de factores y las interacciones dinámicas entre factores y los términos idiosincráticos para incorporar el efecto de las betas variables en el tiempo y los

factores latentes no observables sobre el comportamiento de la correlación de corto plazo. El modelo maneja correlaciones condicionales entre los factores que pueden ser no triviales, incluso para factores que no están correlacionados de manera no-condicional. El componente de baja frecuencia también explota la forma funcional impuesta tanto por la estructura factorial como por el comportamiento a largo plazo de las volatilidades sistemáticas e idiosincráticas. Estos rasgos caracterizan el comportamiento de la correlación de largo plazo y determinan el nivel de la media al cual las correlaciones de alta frecuencia se revierten .

El contexto internacional en el que se implementa este modelo trae a colación el problema de las transacciones bursátiles no-sincronizadas en los mercados internacionales. Este artículo explora distintas alternativas para abordar este problema, incluyendo el enfoque estándar en el cual se emplean datos de menor frecuencia y otras dos estrategias que sincronizan explícitamente los componentes del modelo factorial. Estas estrategias adaptan el marco de trabajo de Burns, Engle y Mezrich (1998) para poder aplicarlo en la configuración factorial e implementarlo dentro de los pasos de estimación del modelo FSG-DCC.

Por lo que hace al ajuste empírico, los resultados muestran que el modelo FSG-DCC semanal describe bien todas la características dinámicas empíricas de las correlaciones globales que se obtienen de un punto de referencia no derivado de ningún modelo. Además, los modelos FSG-DCC diarios sincronizados se evalúan en cuanto a su habilidad de ajustar comportamientos de correlación de baja frecuencia, los cuales se caracterizan mediante el uso de las medidas de correlación no sesgadas semanales. Los resultados sugieren que los dos esquemas de sincronización reducen sustancialmente el sesgo de la no-sincronía. Asimismo, si bien sus valores ajustados se acercan a las medidas semanales, retienen características dinámicas importantes (tales como la persistencia y los impactos asimétricos) que normalmente se debilitan por el efecto de la agregación en el tiempo.

Entre los hallazgos empíricos, encontramos que las correlaciones globales muestran una variación importante de baja frecuencia durante el periodo de la muestra. Consecuente con la evidencia existente sobre la respuesta asimétrica de las correlaciones internacionales ante mercados bajistas sumamente volátiles, el componente de correlación global agregado de largo plazo ha aumentado sustancialmente durante los últimos dos años a causa de un efecto dominante de la volatilidad sistemática. El aumento en la correlación durante este periodo no se ha distribuido equitativamente entre países. Algunos países, casi todos mercados emergentes, han experimentado mayores aumentos en sus comovimientos con el resto del

mundo. Esto se explica parcialmente mediante el comportamiento de su volatilidad idiosincrática en relación con las volatilidades de los factores sistemáticos. Estos países muestran aumentos relativamente bajos de sus volatilidades idiosincráticas que, no obstante, no logran contrarrestar el aumento de la volatilidad global sistemática.

Figuras y cuadros

Figura 1

Periodos de transacciones bursátiles asincrónicas

Notas: Esta figura ilustra el problema de las transacciones bursátiles no-sincronizadas en tres mercados, que se identifican como US, E y A. El panel superior muestra los horarios no sincronizados de apertura y cierre de cada mercado. El panel inferior describe los rendimientos observados no-sincronizados y las fracciones faltantes no observadas asociadas con los horarios de transacción bursátil desfasados.

Figura 2

Correlaciones de alta y baja frecuencia entre Alemania y Japón (a partir de datos semanales)

Notas: Esta figura presenta las correlaciones ajustadas del modelo FSG-DCC entre Alemania y Japón. La estimación se basa en datos semanales. Las siglas CAF significan “Correlación de Alta Frecuencia” y CBF denota la “Correlación de Baja Frecuencia”.

Figura 3

Correlaciones globales promedio a través del tiempo (a partir de datos semanales)

Notas: Esta figura presenta el promedio de corte transversal de las correlaciones de valores bursátiles a partir del modelo FSG-DCC y el modelo de correlación de la muestra a 6 meses. Este promedio se define como $\bar{\rho}_t^{(m)} = \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_{i,t}^{(m)}$, donde $\bar{\rho}_{i,t}^{(m)}$ es la correlación promedio del país i (en el momento t) con el resto del mundo, según el modelo m . Específicamente, $\bar{\rho}_t^{(m)} = \sum_{j \neq i}^N \hat{\rho}_{i,j,t}^{(m)}$, donde $\hat{\rho}_{i,j,t}^{(m)}$ es la correlación entre el país i y el país j en el momento t , estimada a partir del modelo m . Las estimaciones se basan en datos semanales. El periodo de muestra abarca de febrero de 1995 a diciembre de 2008.

Figura 4

Promedio de la volatilidad idiosincrática de baja frecuencia (a partir de datos semanales)

Notas: Esta figura presenta el promedio de corte transversal de las volatilidades idiosincráticas a partir del modelo FSG-DCC y el modelo de volatilidad de la muestra a 6 meses. Este promedio se define como $\bar{\sigma}_{u,t} = \sum_{i=1}^N \sigma_{u,i,t}^{(m)}$, donde $\sigma_{u,i,t}^{(m)}$ es la volatilidad idiosincrática del país i en el momento t computado a partir del modelo m . Las estimaciones se basan en datos semanales. El periodo de muestra abarca de febrero de 1995 a diciembre de 2008.

Figura 5

Volatilidad de los factores

Notas: Esta figura presenta las volatilidades de alta y baja frecuencia de los factores empleadas en la estimación FSG-DCC. El periodo de muestra abarca de febrero de 2005 a diciembre de 2008. Las estimaciones se basan en observaciones semanales.

Figura 6

Correlaciones de valores bursátiles de medias móviles y del modelo FSG-DCC sincronizado (a partir de datos diarios)

Notas: Esta figura muestra las estimaciones de correlación del modelo FSG-DCC. La estimación emplea los rendimientos diarios de los índices bursátiles que se describen en el cuadro 1. El periodo de muestra abarca de febrero de 1995 a diciembre de 2008. Los datos se obtuvieron de Datastream, Global Financial Data y Bloomberg. CAF significa “Correlación de Alta Frecuencia”, CBF se refiere a la “Correlación de Baja Frecuencia” y “Móvil” corresponde a las correlaciones de ventanas móviles observadas en un periodo de 100 días.

Figura 7

Volatilidades idiosincráticas de alta y baja frecuencia

Notas: Esta figura muestra las estimaciones de la volatilidad del modelo Spline-GARCH. La estimación emplea los rendimientos diarios de los índices bursátiles que se describen en el cuadro 1. El periodo de muestra abarca de febrero de 1995 a diciembre de 2008. Los datos se obtuvieron de Datastream, Global Financial Data y Bloomberg. Las siglas VAF significan “Volatilidad de Alta Frecuencia” y VBF denota la “Volatilidad de Baja Frecuencia”.

Figura 8

Estructura de correlación a partir del modelo FSG-DCC (y la Sincronización 2): Correlaciones promedio de ventanas móviles y de baja frecuencia, volatilidades idiosincráticas promedio y ponderaciones de los factores

Notas: Esta figura resume los resultados de la estimación del modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la “Sincronización 2” (véase el cuadro 4). Muestra los promedios de las correlaciones de baja frecuencia de cada país respecto del resto del mundo durante todo el periodo de muestra (febrero de 1995 a diciembre de 2008). También muestra las correlaciones de ventanas móviles promedio no derivadas de ningún modelo y basadas en un periodo de 100 días. La figura presenta volatilidades idiosincráticas promedio para cada país durante todo el periodo de la muestra. Las barras verticales corresponden a las ponderaciones de los factores estimadas y sincronizadas asociadas con los tres mercados globales (Estados Unidos, Europa y Asia).

Figura 9

Promedio de las correlaciones globales de alta y baja frecuencia

Notas: Esta figura muestra los promedios de las correlaciones de los valores bursátiles de baja frecuencia para tres periodos distintos. Estas correlaciones se computan a partir del modelo FSG-DCC (con base en datos diarios sincronizados). Para el primer periodo (antes de la contracción del crédito), el promedio se computa con base en correlaciones de baja frecuencia registradas entre el 3 de agosto de 2006 y el 3 de agosto de 2007. Para el segundo periodo (de la contracción del crédito a la quiebra de Lehman), el promedio se computa con base en correlaciones de baja frecuencia registradas entre el 6 de agosto de 2007 y el 12 de septiembre de 2008. El último periodo considera las correlaciones registradas entre el 15 de septiembre y el 15 de diciembre de 2008.

Figura 10

Distribución de los cambios en los promedios de las correlaciones de baja frecuencia entre agosto de 2007 y diciembre de 2008

Notas: Esta figura muestra los cambios porcentuales en las correlaciones promedio de los valores bursátiles de baja frecuencia. Estas correlaciones se computan a partir del modelo FSG-DCC (con base en datos diarios sincronizados). Los cambios se asocian con correlaciones promedio en dos periodos. El primer periodo abarca del 3 de agosto de 2006 al 3 de agosto de 2007. El segundo periodo va del 15 de septiembre al 15 de diciembre de 2008.

Cambio porcentual

Figura 11

Distribución de los cambios en los promedios de las correlaciones de alta frecuencia entre agosto de 2007 y diciembre de 2008

Notas: Esta figura muestra los cambios porcentuales en las correlaciones promedio de los valores bursátiles de alta frecuencia. Estas correlaciones se computan a partir del modelo FSG-DCC (con base en datos diarios sincronizados). Los cambios se asocian con correlaciones promedio en dos periodos. El primer periodo abarca del 3 de agosto de 2006 al 3 de agosto de 2007. El segundo periodo va del 15 de septiembre al 15 de diciembre de 2008.

Cambio porcentual

Figura 12

Cambio en la volatilidad idiosincrática de agosto de 2007 a diciembre de 2008

Notas: Esta figura muestra los cambios porcentuales en los promedios de las volatilidades idiosincráticas de baja frecuencia. Estas volatilidades se computan a partir del modelo FSG-DCC (con base en observaciones diarias). Los cambios se asocian con volatilidades idiosincráticas promedio en dos periodos. El primer periodo abarca del 3 de agosto de 2006 al 3 de agosto de 2007. El segundo periodo va del 15 de septiembre al 15 de diciembre de 2008.

Cuadro 1

Países y mercados bursátiles

País	Clasificación	Mercado	Nombre del Índice Bursátil
Argentina	Emergente	Buenos Aires	MERVAL
Australia	Desarrollado	Australian	ASX
Austria	Desarrollado	Wiener Börse	ATX
Bélgica	Desarrollado	Euronext	CBB
Brasil	Emergente	Sao Paulo	BOVESPA
Canadá	Desarrollado	TSX Group	S&P/TSX 300
Chile	Emergente	Santiago	IGPAD
China	Emergente	Shanghai Stock Exchange	SSE-180
Colombia	Emergente	Bogota	IGBC
República Checa	Emergente	PSE	SE PX-50 Index
Dinamarca	Desarrollado	Copenhagen	KAX All-Share Index
Finlandia	Desarrollado	Helsinki	HEX
Francia	Desarrollado	Euronext	CAC-40
Alemania	Desarrollado	Deutsche Börse	DAX-30
Grecia	Desarrollado	Athens	Athens SE General Index
Hong Kong	Desarrollado	Hong Kong	Hang Seng Composite Index
Hungría	Emergente	Budapest	Budapest SE Index
India	Emergente	Mumbai	Mumbai SE-200 Index
Indonesia	Emergente	Jakarta	Jakarta SE Composite Index
Irlanda	Desarrollado	Irish	ISEQ Overall Price Index
Italia	Desarrollado	Borsa Italiana	Milan MIB General Index
Japón	Desarrollado	Tokyo	Nikkei 225
Corea	Emergente	Korea	KOSPI
Malasia	Emergente	Bursa Malaysia	KLSE Composite
México	Emergente	Mexico	IPC
Holanda	Desarrollado	Euronext	AEX
Nueva Zelanda	Desarrollado	New Zealand	New Zealand SE All-Share Capital Index
Noruega	Desarrollado	Oslo	Oslo SE All-Share Index
Perú	Emergente	Lima	Lima SE General Index
Filipinas	Emergente	Philippine	Manila SE Composite Index
Polonia	Emergente	Warsaw	Poland SE Index (Zloty)
Portugal	Desarrollado	Euronext	Portugal PSI General Index
Rusia	Emergente	Russian Exchange	Russia AKM Composite
Singapur	Desarrollado	Singapore	SES All-Share Index
Sudáfrica	Emergente	JSE South Africa	FTSE/JSE All-Share Index
España	Desarrollado	Spanish Exchanges (BME)	IBEX
Suecia	Desarrollado	Stockholmsbörsen	SAX All-Share index
Suiza	Desarrollado	Swiss Exchange	Switzerland Price Index
Taiwan	Emergente	Taiwan	Taiwan SE Capitalization Weighted Index
Tailandia	Emergente	Thailand	SET General Index
Turquía	Emergente	Istanbul	Istanbul SE IMKB-100 Price Index
Inglaterra	Desarrollado	London	FTSE-250
Venezuela	Emergente	Caracas	Caracas SE General Index

Cuadro 2

Resultados de la estimación: Modelo FSG-DCC basado en datos semanales

País	Parámetros de la media				Parámetros de la varianza			nodos
	μ_i	$\beta_{1,i}$	$\beta_{2,i}$	$\beta_{3,i}$	θ_i	γ_i	Φ_i	
Factor 1	0.0019 **				1.4E-05	0.170 **	0.782 **	3
Factor 2	0.0019 **				1.7E-07	0.225 **	0.698 **	3
Factor 3	0.0017 **				1.4E-02	0.182 **	0.771 **	2
Argentina	-0.0001	0.172 *	0.541 **	0.381 **	3.6E-02 *	0.034	0.887 **	5
Australia	0.0008 **	0.124 **	0.022	0.429 **	3.4E-02	-0.016	0.929 **	2
Austria	0.0011	0.052	0.358 **	0.230 **	4.9E-03	0.200 **	0.771 **	1
Bélgica	0.0004	0.214 **	0.605 **	-0.026	8.9E-02 *	0.067	0.669 **	3
Brasil	0.0026 **	0.500 **	0.377 **	0.357 **	1.1E-02	0.120 **	0.873 **	1
Canadá	0.0007	0.433 **	0.169 **	0.180 **	1.1E-01 **	-0.054	0.904 **	1
Chile	0.0012 **	0.132 **	0.090 **	0.188 **	1.7E-01 **	-0.032	0.815 **	1
China	0.0000	-0.137	0.132	0.073	4.1E-01 **	-0.298	0.275 **	2
Colombia	0.0033 **	0.153 **	0.150 *	0.153 **	1.7E-01 **	0.128 *	0.428 **	1
República Checa	0.0004	0.103 *	0.299 **	0.279 **	5.3E-02 **	0.088 **	0.844 **	1
Dinamarca	0.0013 **	0.121 **	0.440 **	0.115 **	3.9E-02 **	-0.044	0.964 **	3
Finlandia	0.0011	0.424 **	0.624 **	-0.036	1.2E-06	0.056	0.810 **	3
Francia	-0.0004	0.416 **	0.685 **	-0.094	6.0E-06	0.155 **	0.600 **	4
Alemania	0.0005	0.395 **	0.756 **	-0.094	2.9E-02	0.044	0.838 **	3
Grecia	0.0005	0.103	0.458 **	0.141 **	4.1E-02	0.031	0.675 **	2
Hong Kong	0.0001	0.124 **	-0.072	1.007 **	3.9E-02	0.095 *	0.773 **	2
Hungría	0.0016	0.167 **	0.243 **	0.270 **	1.4E-01 **	0.085	0.449 **	3
India	0.0019	-0.093	0.362 **	0.334 **	4.3E-02	0.061	0.767 **	2
Indonesia	0.0020 *	-0.104	0.041	0.702 **	2.9E-02	0.174 **	0.694 **	2
Irlanda	0.0009	0.292 **	0.298 **	0.063 *	2.0E-01 **	0.152 **	0.610 **	1
Italia	-0.0009	0.220 **	0.471 **	0.107 **	1.9E-01 **	0.021	0.548 **	2
Japón	-0.0016	0.222 **	0.160 **	0.446 **	5.1E-02 **	0.074 **	0.820 **	1
Corea	0.0001	0.288 **	-0.038	0.688 **	1.9E-01 **	-0.049	0.601 **	2
Malasia	-0.0003	-0.040	-0.073	0.544 **	4.1E-02 **	0.094 **	0.885 **	2
México	0.0028 **	0.592 **	0.154 **	0.258 **	5.4E-02 **	0.043 *	0.914 **	1
Holanda	-0.0002	0.365 **	0.632 **	-0.004	5.8E-02 **	0.084 **	0.747 **	3
Nueva Zelanda	0.0002	0.086 **	-0.007	0.231 **	1.3E-07	0.067 **	0.927 **	2
Noruega	0.0017 **	0.147 **	0.454 **	0.188 **	6.4E-02	0.060	0.775 **	2
Perú	0.0020 **	0.073	0.137 **	0.283 **	4.6E-01 **	-0.004	0.232 **	2
Filipinas	-0.0005	0.051	0.008	0.589 **	1.7E-05	0.103 **	0.792 **	2
Polonia	0.0005	0.298 **	0.279 **	0.366 **	9.2E-02 **	-0.005	0.803 **	2
Portugal	0.0004	0.077 **	0.397 **	0.080 **	9.5E-06	0.170 **	0.619 **	2
Rusia	0.0055 **	-0.059	0.493 **	0.341 **	1.8E-01 **	0.097 *	0.597 **	2
Singapur	-0.0006	0.075 *	-0.028	0.719 **	2.2E-07	0.053 **	0.957 **	2
Sudáfrica	0.0016 **	0.120 **	0.371 **	0.267 **	3.6E-02	0.142 **	0.733 **	2
España	0.0008	0.294 **	0.644 **	-0.029	2.8E-05	0.067 *	0.760 **	3
Suecia	0.0006	0.336 **	0.612 **	0.016	1.5E-02	0.107 *	0.709 **	3
Suiza	0.0005	0.297 **	0.511 **	-0.021	6.9E-02 *	0.144 **	0.632 **	3
Taiwan	-0.0002	0.004	0.114 *	0.444 **	9.6E-06	0.081 **	0.874 **	3
Tailandia	-0.0013	-0.123	0.071	0.648 **	1.6E-01 **	0.002	0.580 **	2
Turquía	0.0039 **	0.056	0.586 **	0.225 **	4.3E-02 *	-0.034	0.902 **	2
Inglaterra	-0.0004	0.253 **	0.596 **	-0.014	8.2E-02 **	0.007	0.822 **	1
Venezuela	0.0031 **	-0.001	0.050	0.073	3.6E-01 **	-0.278	0.299 **	3
Parámetros de Correlación (DCC)								
a				0.011 **				
b				0.942 **				

Notas sobre el cuadro 2: Este cuadro muestra las estimaciones de los parámetros del modelo FSG-DCC calculadas a partir de datos semanales. El periodo de la muestra comprende de enero de 1995 a diciembre de 2008. Todos los rendimientos están expresados en dólares estadounidenses. Los tres factores globales están asociados con los rendimientos de los mercados bursátiles de Estados Unidos, Europa y Asia, respectivamente.

La especificación del modelo es:

$$r_t | F_t, \Phi_{t-1} \sim N(BF_t, \Sigma_{u,t}), \quad F_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \Sigma_{F,t}), u_{i,t} = r_{i,t} - \mu_i \beta_i' F_t = \sqrt{\tau_{i,t} g_{i,t}} \varepsilon_{i,t},$$

$$F_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t})', f_{j,t} = \sqrt{\tau_{f,j,t} g_{f,j,t}} \varepsilon_{f,j,t}, j = 1, 2, 3, \quad \beta_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i})'$$

$$g_{i,t} = \left(1 - \theta_i - \phi_i - \frac{\gamma_i}{2}\right) + \theta_i \frac{u_{i,t-1}^2}{\tau_{i,t-1}} + \gamma_i \frac{u_{i,t-1}^2 I_{r_{i,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_i g_{i,t-1}$$

$$\tau_{i,t} = c_i \exp \left(w_{i,0} t + \sum_{s=1}^{k_i} w_{i,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \text{ para } i = 1, \dots, 43$$

$$g_{f,j,t} = \left(1 - \theta_{f,j} - \phi_{f,j} - \frac{\gamma_{f,j}}{2}\right) + \theta_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2}{\tau_{f,j,t-1}} + \gamma_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2 I_{f_{j,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_{f,j} g_{f,j,t-1}$$

$$\tau_{f,j,t} = c_{f,j} \exp \left(w_{f,j,0} t + \sum_{s=1}^{k_{f,j}} w_{f,j,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{43,t}, \varepsilon_{f,1,t}, \varepsilon_{f,2,t}, \varepsilon_{f,3,t})' \sim \text{Proceso DCC con parámetros } (a, b).$$

(**) denota una significancia estadística al nivel de 5%.

(*) denota una significancia estadística al nivel de 10%.

Cuadro 3

**Resultados de la estimación: Modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la
“Sincronización 1”**

País	Parámetros de la media				Parámetros de la varianza			
	μ_i	$\beta_{1,i}$	$\beta_{2,i}$	$\beta_{3,i}$	θ_i	γ_i	Φ_i	nodos
Factor 1	1.87E-04				6.1E-07	0.148 **	0.901 **	3
Factor 2	3.59E-04 **				1.6E-02 *	0.114 **	0.883 **	3
Factor 3	2.07E-04				5.1E-03	0.146 **	0.853 **	6
Argentina	-2.18E-04	0.308 **	0.343 **	0.175 **	3.7E-02 **	0.145 **	0.754 **	9
Australia	3.71E-06	0.016	0.156 **	0.322 **	2.5E-02 **	0.036 **	0.913 **	2
Austria	1.90E-04	-0.016	0.406 **	0.096 **	2.7E-02 **	0.087 **	0.868 **	2
Bélgica	1.28E-04	0.023	0.720 **	-0.096	4.9E-02 **	0.046 **	0.871 **	3
Brasil	-1.97E-04	0.584 **	0.274 **	0.195 **	4.3E-02 **	0.169 **	0.737 **	7
Canadá	3.93E-05	0.340 **	0.221 **	0.085 **	6.0E-02 **	0.090 **	0.663 **	11
Chile	4.89E-05	0.098 **	0.089 **	0.076 **	8.1E-02 **	0.079 **	0.787 **	5
China	-3.87E-04	-0.128	0.067	0.157 **	1.1E-01 **	0.055 **	0.712 **	10
Colombia	-1.22E-04	0.080 **	0.044	0.063 **	1.9E-01 **	0.132 **	0.527 **	11
República Checa	1.25E-04	0.016	0.340 **	0.117 **	4.7E-02 **	0.086 **	0.832 **	2
Dinamarca	9.82E-05	0.011	0.505 **	0.005	5.2E-02 **	0.043 **	0.829 **	3
Finlandia	6.87E-05	0.219 **	0.859 **	-0.165	3.3E-02 **	0.038 **	0.716 **	6
Francia	-2.14E-05	0.020	0.955 **	-0.144	3.1E-02 **	0.024 **	0.929 **	3
Alemania	8.43E-05	0.034 *	0.916 **	-0.128	5.0E-02 **	0.040 **	0.894 **	3
Grecia	-9.07E-05	0.011	0.498 **	0.068 **	9.7E-02 **	0.106 **	0.699 **	6
Hong Kong	-1.49E-04	-0.067	0.098 **	0.809 **	1.5E-02 **	0.062 **	0.912 **	3
Hungría	-6.76E-05	0.166 **	0.422 **	0.077 **	8.2E-02 **	0.056 **	0.809 **	2
India	2.65E-04	-0.118	0.269 **	0.240 **	6.9E-02 **	0.149 **	0.748 **	2
Indonesia	7.96E-05	-0.091	0.128 **	0.437 **	7.4E-02 **	0.162 **	0.657 **	6
Irlanda	1.84E-04	0.071 **	0.420 **	0.001	9.8E-03	0.088 **	0.788 **	4
Italia	-2.94E-05	-0.022	0.809 **	-0.098	5.7E-02 **	0.004	0.898 **	3
Japón	4.06E-05	-0.015	0.366 **	0.292 **	3.0E-02 **	0.042 **	0.916 **	3
Corea	1.38E-05	-0.006	0.293 **	0.415 **	3.2E-02 **	0.045 **	0.919 **	2
Malasia	-2.47E-05	-0.043	0.005	0.361 **	8.8E-02 **	0.073 **	0.613 **	11
México	-6.39E-05	0.509 **	0.202 **	0.081 **	3.8E-02 **	0.143 **	0.780 **	4
Holanda	-3.99E-06	0.044 **	0.890 **	-0.127	1.7E-02 **	0.076 **	0.925 **	1
Nueva Zelanda	7.30E-05	0.039 **	0.080 **	0.155 **	8.3E-02 **	0.087 **	0.592 **	6
Noruega	1.51E-04	0.046 **	0.510 **	0.051 **	3.7E-02 **	0.067 **	0.879 **	2
Perú	-3.96E-06	0.017	0.216 **	0.144 **	1.8E-01 **	0.068 **	0.680 **	2
Filipinas	-1.11E-04	-0.029	0.113 **	0.404 **	6.3E-02 **	0.112 **	0.826 **	2
Polonia	6.57E-05	0.107 **	0.409 **	0.196 **	4.8E-02 **	0.008	0.914 **	2
Portugal	7.55E-05	0.023	0.460 **	-0.020	3.0E-02 **	0.133 **	0.719 **	7
Rusia	-6.24E-05	0.147 **	0.305 **	0.162 **	6.6E-02 **	0.092 **	0.766 **	12
Singapur	-5.53E-05	-0.046	0.072 **	0.539 **	3.3E-02 **	0.081 **	0.810 **	6
Sudáfrica	-3.69E-05	0.061 **	0.392 **	0.156 **	6.9E-02 **	0.057 **	0.859 **	1
España	-7.44E-06	0.000	0.838 **	-0.088	1.8E-02	0.049 **	0.816 **	7
Suecia	1.91E-05	0.046 **	0.846 **	-0.105	2.9E-02 **	0.066 **	0.833 **	4
Suiza	1.01E-05	-0.017	0.719 **	-0.082	3.0E-02 **	0.074 **	0.875 **	3
Taiwan	-2.97E-05	-0.002	0.076 **	0.360 **	2.0E-02 **	0.090 **	0.884 **	3
Tailandia	2.61E-05	-0.097	0.131 **	0.434 **	8.4E-02 **	0.054 **	0.644 **	10
Turquía	-3.71E-04	0.013	0.438 **	0.290 **	6.5E-02 **	0.054 **	0.811 **	3
Inglaterra	-8.38E-05	-0.042	0.797 **	-0.077	4.3E-02 **	0.057 **	0.817 **	6
Venezuela	-3.21E-04	0.119 **	-0.058	0.047 **	2.5E-01 **	-0.103	0.663 **	10
Parámetros de Correlación (DCC)								
a				0.007 **				
b				0.985 **				

Notas sobre el cuadro 3: Este cuadro muestra las estimaciones de los parámetros del modelo FSG-DCC calculadas a partir de datos diarios. El periodo de la muestra comprende de enero de 1995 a diciembre de 2008. Todos los rendimientos están expresados en dólares estadounidenses. Los tres factores globales están asociados con los rendimientos de los mercados bursátiles de Estados Unidos, Europa y Asia, respectivamente. La especificación del modelo es:

$$r_t | F_t, \Phi_{t-1} \sim N(BF_t, \Sigma_{u,t}), \quad F_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \Sigma_{F,t}), \quad u_{i,t} = r_{i,t} - \mu_i \beta_i' F_t = \sqrt{\tau_{i,t} g_{i,t}} \varepsilon_{i,t},$$

$$F_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t})', \quad f_{j,t} = \sqrt{\tau_{f,j,t} g_{f,j,t}} \varepsilon_{f,j,t}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \beta_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i})'$$

$$g_{i,t} = \left(1 - \theta_i - \phi_i - \frac{\gamma_i}{2}\right) + \theta_i \frac{u_{i,t-1}^2}{\tau_{i,t-1}} + \gamma_i \frac{u_{i,t-1}^2 I_{r_{i,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_i g_{i,t-1}$$

$$\tau_{i,t} = c_i \exp \left(w_{i,0} t + \sum_{s=1}^{k_i} w_{i,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \quad \text{para } i = 1, \dots, 43$$

$$g_{f,j,t} = \left(1 - \theta_{f,j} - \phi_{f,j} - \frac{\gamma_{f,j}}{2}\right) + \theta_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2}{\tau_{f,j,t-1}} + \gamma_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2 I_{f_{j,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_{f,j} g_{f,j,t-1}$$

$$\tau_{f,j,t} = c_{f,j} \exp \left(w_{f,j,0} t + \sum_{s=1}^{k_{f,j}} w_{f,j,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{43,t}, \varepsilon_{f,1,t}, \varepsilon_{f,2,t}, \varepsilon_{f,3,t})' \sim \text{Proceso DCC con parámetros } (a, b).$$

(**) denota una significancia estadística al nivel de 5%.

(*) denota una significancia estadística al nivel de 10%.

Cuadro 4

**Resultados de la estimación: Modelo FSG-DCC basado en datos diarios y la
“Sincronización 2”**

País	Parámetros de la media				Parámetros de la varianza			
	μ_i	$\beta_{1,i}$	$\beta_{2,i}$	$\beta_{3,i}$	θ_i	γ_i	ϕ_i	nodos
Factor 1	1.46E-04				6.2E-08	0.157 **	0.894 **	3
Factor 2	3.59E-04 **				1.6E-02 *	0.114 **	0.883 **	3
Factor 3	2.07E-04				5.1E-03	0.146 **	0.853 **	6
Argentina	3.23E-04	0.311 **	0.318 **	0.328 **	6.0E-02 **	0.125 **	0.757 **	9
Australia	1.47E-04 *	0.198 **	0.021 **	0.358 **	2.7E-02 **	0.031 **	0.912 **	2
Austria	3.18E-04 **	0.153 **	0.268 **	0.125 **	4.6E-02 **	0.089 **	0.847 **	2
Bélgica	1.57E-04	0.325 **	0.469 **	-0.007 **	5.2E-02 **	0.031 **	0.890 **	3
Brasil	3.28E-04	0.587 **	0.223 **	0.377 **	3.6E-02 **	0.186 **	0.758 **	7
Canadá	1.24E-04	0.415 **	0.148 **	0.159 **	5.3E-02 **	0.081 **	0.795 **	9
Chile	2.47E-04 **	0.115 **	0.074 **	0.170 **	1.4E-01 **	0.055 **	0.721 **	6
China	-9.06E-05	-0.033	0.091 *	0.089 **	1.1E-01 **	0.056 **	0.725 **	10
Colombia	4.11E-04 **	0.017	0.080 **	0.104 **	2.3E-01 **	0.102 **	0.529 **	9
República Checa	2.83E-04 *	0.097 **	0.206 **	0.177 **	4.2E-02 **	0.114 **	0.812 **	2
Dinamarca	2.59E-04 **	0.195 **	0.320 **	0.074 **	6.4E-02 **	0.038 **	0.840 **	3
Finlandia	2.15E-04	0.533 **	0.591 **	-0.048 **	9.1E-02 **	0.083 **	0.590 **	4
Francia	-6.57E-05	0.421 **	0.680 **	-0.091 **	2.9E-02 **	0.023 **	0.953 **	1
Alemania	1.67E-04	0.463 **	0.653 **	-0.085 **	1.2E-01 **	0.012	0.671 **	8
Grecia	7.37E-05	0.169 **	0.336 **	0.162 **	1.2E-01 **	0.111 **	0.663 **	6
Hong Kong	9.42E-06	0.165 **	-0.079 **	0.979 **	2.6E-02 **	0.054 **	0.931 **	2
Hungría	4.73E-04 **	0.273 **	0.239 **	0.184 **	1.1E-01 **	0.041 **	0.786 **	3
India	5.87E-04 **	-0.077	0.198 **	0.355 **	8.1E-02 **	0.125 **	0.765 **	2
Indonesia	5.68E-04 **	0.080 **	-0.012	0.584 **	1.0E-01 **	0.213 **	0.572 **	6
Irlanda	3.07E-04 **	0.297 **	0.231 **	0.040 **	2.3E-02 **	0.090 **	0.732 **	4
Italia	-6.45E-05	0.332 **	0.441 **	0.004 **	1.1E-01 **	0.020	0.750 **	7
Japón	-2.80E-04	0.294 **	0.148 **	0.292 **	3.2E-02 **	0.076 **	0.918 **	1
Corea	-1.81E-05	0.315 **	0.034 **	0.522 **	3.7E-02 **	0.062 **	0.904 **	2
Malasia	2.71E-05	0.034 **	-0.093 **	0.466 **	6.2E-02 **	0.106 **	0.792 **	6
México	5.14E-04 **	0.513 **	0.139 **	0.285 **	3.3E-02 **	0.134 **	0.794 **	6
Holanda	-5.26E-05	0.412 **	0.567 **	-0.009 **	2.5E-02 **	0.063 **	0.926 **	1
Nueva Zelanda	4.13E-05	0.157 **	-0.026 **	0.198 **	8.7E-02 **	0.042 **	0.790 **	2
Noruega	4.11E-04 **	0.237 **	0.300 **	0.152 **	5.3E-02 **	0.058 **	0.805 **	8
Perú	4.89E-04 **	0.003 **	0.165 **	0.224 **	2.3E-01 **	0.076 **	0.651 **	1
Filipinas	-1.58E-04	0.186 **	0.076 **	0.494 **	7.8E-02 **	0.121 **	0.787 **	2
Polonia	2.66E-04	0.276 **	0.289 **	0.296 **	6.9E-02 **	0.006	0.881 **	2
Portugal	1.89E-04 *	0.144 **	0.302 **	0.044 **	9.4E-02 **	0.141 **	0.635 **	7
Rusia	1.35E-03 **	0.124 **	0.223 **	0.352 **	8.2E-02 **	0.059 **	0.778 **	8
Singapur	-9.65E-05	0.049 *	-0.027	0.676 **	2.6E-02 **	0.072 **	0.850 **	6
Sudáfrica	2.82E-04 **	0.150 **	0.311 **	0.250 **	6.6E-02 **	0.064 **	0.841 **	3
España	1.40E-04	0.321 **	0.618 **	-0.023 **	5.2E-02 **	0.030 **	0.864 **	3
Suecia	5.80E-05	0.379 **	0.617 **	-0.017 **	4.9E-02 **	0.089 **	0.774 **	4
Suiza	7.18E-05	0.302 **	0.505 **	-0.029 **	3.4E-02 **	0.064 **	0.882 **	3
Taiwan	-1.00E-04	0.233 **	0.036	0.381 **	2.6E-02 **	0.082 **	0.878 **	3
Tailandia	-1.99E-04	-0.013	0.004	0.626 **	7.3E-02 **	0.064 **	0.712 **	10
Turquía	7.36E-04 **	0.191 **	0.391 **	0.350 **	7.3E-02 **	0.060 **	0.789 **	3
Inglaterra	-1.26E-04	0.245 **	0.581 **	0.010 **	2.9E-02 **	0.018 **	0.957 **	1
Venezuela	4.62E-04 **	0.144 **	0.058 *	-0.016 *	2.2E-01 **	-0.061	0.675 **	10
Parámetros de Correlación (DCC)								
a				0.005 **				
b				0.989 **				

Notas sobre el cuadro 4: Este cuadro muestra las estimaciones de los parámetros del modelo FSG-DCC calculadas a partir de datos diarios. El periodo de la muestra comprende de enero de 1995 a diciembre de 2008. Todos los rendimientos están expresados en dólares estadounidenses. Los tres factores globales están asociados con los rendimientos de los mercados bursátiles de Estados Unidos, Europa y Asia, respectivamente.

La especificación del modelo es:

$$r_2 \mid F_t, \Phi_{t-1} \sim N(BF_t, \Sigma_{u,t}), \quad F_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0, \Sigma_{F,t}), u_{i,t} = r_{i,t} - \mu_i \beta_i' F_t = \sqrt{\tau_{i,t} g_{i,t}} \varepsilon_{i,t} \quad i = 1, \dots, 43,$$

$$F_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t})', f_{j,t} = \sqrt{\tau_{f,j,t} g_{f,j,t}} \varepsilon_{f,j,t}, j = 1, 2, 3, \quad \beta_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i})'$$

$$g_{i,t} = \left(1 - \theta_i - \phi_i - \frac{\gamma_i}{2}\right) + \theta_i \frac{u_{i,t-1}^2}{\tau_{i,t-1}} + \gamma_i \frac{u_{i,t-1}^2 I_{r_{i,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_i g_{i,t-1}$$

$$\tau_{i,t} = c_i \exp \left(w_{i,0} t + \sum_{s=1}^{k_i} w_{i,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \quad \text{para } i = 1, \dots, 43$$

$$g_{f,j,t} = \left(1 - \theta_{f,j} - \phi_{f,j} - \frac{\gamma_{f,j}}{2}\right) + \theta_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2}{\tau_{f,j,t-1}} + \gamma_{f,j} \frac{f_{j,t-1}^2 I_{f_{j,t-1} < 0}}{\tau_{f,j,t-1}} + \phi_{f,j} g_{f,j,t-1}$$

$$\tau_{f,j,t} = c_{f,g} \exp \left(w_{f,j,0} t + \sum_{s=1}^{k_{f,j}} w_{f,j,s} ((t - t_{s-1})_+)^2 \right), \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{43,t}, \varepsilon_{f,1,t}, \varepsilon_{f,2,t}, \varepsilon_{f,3,t})' \sim \text{Proceso DCC con parámetros } (a, b).$$

(**) denota una significancia estadística al nivel de 5%.

(*) denota una significancia estadística al nivel de 10%.

Cuadro 5

Comparación de los modelos de correlación con respecto a medidas de correlación de baja frecuencia basadas en datos semanales

Comparación de modelos de correlación con respecto a las correlaciones de baja frecuencia basadas en datos semanales		
Modelo	EAM (Referencia: Correlación muestral de 6 meses)	EAM (Referencia: FSG-DCC semanal)
FSG-DCC (Diario con sincronización 1)	158.47	44.01
FSG-DCC (Diario con sincronización 2)	158.48	42.85
FSG-DCC Diario ignorando asincronía	177.16	78.34
FSG-DCC (Semanal)	154.40	

Notas sobre el cuadro 5: Este cuadro muestra los estadísticos del Error Absoluto Medio (EAM) que se definen en (1.27) como:

$EAM_{CORR} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\tilde{T}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j>1}^N |\tilde{\rho}_{i,j,t}^{(de\ referencia)} - \tilde{\rho}_{i,j,t}^{(FSG-DCC)}| \right)$ donde los modelos de referencia son los modelos que se detallan en cada renglón y los modelos FSG-DCC son las especificaciones de la primera columna.

Apéndice 1

Prueba de la Proposición 1:

Consideremos el proceso de rendimiento de (1.1) y el sistema del vector conjunto de los factores y rendimientos sincronizados de (1.23). Entonces, la matriz de varianza-covarianza de este vector toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 Var(s_t) &= \left\{ I_{k+n} + \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{Fr} \\ A_{rF} & A_{rr} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Sigma_F & \Sigma_{Fr} \\ \Sigma_{rF} & \Sigma_r \end{pmatrix} \left\{ I_{k+N} + \begin{pmatrix} A'_{FF} & A'_{rF} \\ A'_{Fr} & A'_{rr} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} I_k + A_{Fr} & A_{Fr} \\ A_{rF} & I_r + A_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_F & \Sigma_{Fr} \\ \Sigma_{rF} & \Sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_K + A'_{FF} & A'_{rF} \\ A'_{Fr} & I_r + A'_{rr} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Sigma_F + A_{FF}\Sigma_F + A_{Fr}\Sigma_{rF} & \Sigma_{Fr} + A_{FF}\Sigma_{Fr} + A_{Fr}\Sigma_r \\ A_{rF}\Sigma_F + \Sigma_{rF} + A_{rr}\Sigma_{rF} & A_{rF}\Sigma_{Fr} + \Sigma_{rr} + A_{rr}\Sigma_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_K + A'_{FF} & A'_F \\ A'_{Fr} & I_r + A'_{rr} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

donde A_{FF} , A_{Fr} , A_{rF} y A_{rr} son matrices de coeficientes de las dimensiones $(K \times K)$, $(K \times N)$, $(N \times K)$ y $(N \times N)$, respectivamente. Por lo tanto, el término de covarianza sincronizado, $cov(\tilde{r}_t, \tilde{F}_t')$, está dado por la submatriz $N \times K$ del extremo inferior izquierdo en (1.28):

$$\begin{aligned}
 cov(\tilde{r}_t, \tilde{F}_t') &= A_{rF}\Sigma_F + A_{rF}\Sigma_F A'_{FF} + \Sigma_{rF} + \Sigma_{rF} A'_{FF} + A_{rr}\Sigma_{rF} \\
 &\quad + A_{rr}\Sigma_{rF} A'_{FF} + A_{rF}\Sigma_{Fr} A'_{Fr} + \Sigma_{rr} A'_{Fr} + A_{Fr}\Sigma_{rr} A'_{Fr}
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ahora, a partir del sistema no sincronizado de (1.22):

$$\begin{aligned}
 r_t &= \epsilon_{r,t} + A_{rF}\epsilon_{F,t-1} + A_{rr}\epsilon_{r,t-1} \\
 F_t &= \epsilon_{F,t} + A_{FF}\epsilon_{F,t-1} + A_{Fr}\epsilon_{r,t-1}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

y los términos de los factores de adelanto y atraso de un periodo son:

$$\begin{aligned}
 F_{t+1} &= \epsilon_{F,t+1} + A_{FF}\epsilon_{F,t} + A_{FF}\epsilon_{r,t} \\
 F_{t-1} &= \epsilon_{F,t+1} + A_{FF}\epsilon_{F,t-2} + A_{FF}\epsilon_{r,t-2}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Por consiguiente, a partir de (1.30) y (1.31), podemos derivar:

$$\begin{aligned}
 cov(\tilde{r}_t, \tilde{F}_t') &= \Sigma_{rF} + A_{rF}\Sigma_F A'_{FF} + A_{rF}\Sigma_{Fr} A'_{Fr} + A_{rr}\Sigma_{rF} A'_{FF} + A_{rr}\Sigma_{rr} A'_{Fr}, \\
 cov(\tilde{r}_t, \tilde{F}_t') &= A_{rF}\Sigma_F + A_{rr}\Sigma_{rF}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{r}}_t, \tilde{F}_t) = \sum_{rF} A'_{FF} + \sum_{rr} A'_{Fr}$$

Entonces, es fácil obtener

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{r}}_t, \tilde{F}_t) = \text{cov}(\mathbf{r}_t, F_t) + \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t+1}) + \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t-1}), \quad (1.33)$$

Esta expresión puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\mathbf{r}}_t, \tilde{F}_t) &= \text{cov}(\mathbf{r}_t, F_t) \text{Var}(F_t)^{-1} \text{Var}(F_t) + \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t+1}) \text{Var}(F_{t-1})^{-1} \text{Var}(F_{t-1}) \\ &\quad + \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t-1}) \text{Var}(F_{t+1})^{-1} \text{Var}(F_{t+1}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

y, bajo el supuesto de que $\text{Var}(F_t) = \text{Var}(F_{t-1}) = \text{Var}(F_{t+1})$,

$$\tilde{B} \equiv \text{cov}(\tilde{\mathbf{r}}_t, \tilde{F}_t) \text{Var}(\tilde{F}_t)^{-1} = \{B + B^- + B^+\} \text{Var}(F_t) \text{Var}(F_t)^{-1}, \quad (1.35)$$

donde:

$$B \equiv \text{cov}(\mathbf{r}_t, F_t) \text{Var}(F_t)^{-1}, \quad B^- \equiv \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t-1}) \text{Var}(F_{t-1})^{-1}, \quad \text{y } B^+ \equiv \text{cov}(\mathbf{r}_t, F'_{t+1}) \text{Var}(F_{t+1})^{-1}$$

Nótese que aun cuando las varianzas no-condicionales de los factores muestran una variación suavizada, (1.35) se mantiene como una aproximación muy precisa, ya que en dado caso $\text{Var}(F_{t-1}) \approx \text{Var}(F_t) \approx \text{Var}(F_{t+1})$.

Ahora, al tomar el elemento típico (i, k) de (1.35) obtenemos (1.24). Q.E.D.