Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

Nº 2008-03

**Una Aproximación Analítica a la Teoría Racional de
Opciones de Merton**

Rocío Elizondo
Banco de México

Pablo Padilla
IIMAS, UNAM

Marzo 2008

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Una Aproximación Analítica a la Teoría Racional de Opciones de Merton^{*}

Rocío Elizondo[†]
Banco de México

Pablo Padilla[‡]
IIMAS, UNAM

Resumen

En los años 70, Merton desarrolló una teoría basada en argumentos económicos y financieros para estudiar las propiedades del precio de una opción. La herramienta principal en sus demostraciones fue el principio de dominancia de portafolios. En el contexto donde el precio de una reclamación contingente satisface una ecuación diferencial parcial, nosotros damos demostraciones analíticas de la teoría racional de opciones de Merton para el caso de una opción. Para demostrar estos resultados, utilizamos diferentes versiones del principio del máximo, así como los métodos de planos móviles y de deslizamiento. Nuestra aproximación facilita extender la teoría a modelos no lineales.

Palabras Clave: Merton, teoría racional, estimación de opciones, Black-Scholes, principio del máximo.

Abstract

In the early 70s Merton developed a theory based on economic arguments to study the properties of option and warrant prices. The main tool in his proofs was the portfolio dominance principle. In the context where the price of a contingent claim satisfies a partial differential equation we provide analytical proofs of Merton's rational option pricing theory. We use several versions of the maximum principle as well as the sliding and the moving planes methods to prove our results. Our approach enables us to extend the theory to nonlinear models.

Keywords: Merton, rational theory, option pricing, Black-Scholes, maximum principle.

JEL Classification: C02, G10, G11.

^{*}Nosotros agradecemos a Carlos Capistrán, Jesús Castañeda, Daniel Chiquiar, Lai Kwong y a los árbitros de la revista Analysis and Applications por sus muy útiles comentarios y sugerencias, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP, UNAM) por su apoyo financiero. La pre impresión de este artículo fue sometido para consideración en Analysis and Applications 2007 World Scientific Publishing Company, www.worldscinet.com/aa/aa.shtml).

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: melizondo@banxico.org.mx.

[‡] Departamento de Matemáticas y Mecánica. Email: pablo@mym.iimas.unam.mx.

1. Introducción

La teoría racional de opciones de Merton, TROM, se basa en fundamentos que permiten establecer algunas propiedades de los precios de las opciones, a partir de supuestos débiles que proporcionan validez universal [14]. Para que el alcance de éstos sea exitoso, los teoremas resultantes llegarán a ser condiciones necesarias que serán satisfechas por alguna teoría racional de opciones. Los supuestos son de tipo económico y financiero de dominación de portafolios.

En este artículo, desarrollamos un análisis similar para la teoría racional de opciones de Merton [14], pero nosotros usamos técnicas de ecuaciones diferenciales parciales. En particular, el principio del máximo ([5], [8] y [18]), así como el método de deslizamiento y de planos móviles [2] son usados para obtener propiedades de monotonía de los precios de opciones, así como para establecer principios de comparación. Las demostraciones existentes dependen de argumentos económicos y financieros (dominancia de portafolios).

Nuestros resultados no sólo son de relevancia teórica por proporcionar demostraciones analíticas, sino que son importantes en la práctica, es decir, cuando se implementan esquemas numéricos (ver [10]). Además, dichos resultados nos permiten extender la teoría de Merton a modelos no lineales. Esto ha llegado a ser importante en la práctica ([6] y [16]). En particular, modelos no lineales aumentan cuando se estiman algunos bonos y al generalizar aproximaciones estándar, es decir, el modelo de Black-Scholes-Merton. En estos casos, fórmulas de representación o técnicas de funciones de Green no son posibles aplicar. Sin embargo, nuestra técnica está disponible para establecer resultados cualitativos similares o iguales.

En lo que sigue, recordaremos los principales supuestos de la teoría racional de opciones de Merton como son presentados en [14].

Para plantear las restricciones sobre los precios de opciones, definimos la dominancia entre valores o portafolios de éstos: se considera a un valor (portafolio) A como dominante sobre un valor (portafolio) B , en una fecha conocida en el futuro, si el pago en A es mayor que el pago en B para algunos posibles estados de la naturaleza, entendiendo por éstos las condiciones que pueden darse en el mercado y es al menos igual al pago de B en todos los posibles estados de la naturaleza.

Dichos supuestos están dados por:

- a) En mercados perfectos, no hay costos de transacción, la habilidad de pedir

prestado y ventas en corto sin restricción son permitidas, la existencia de un valor dominado sería equivalente a la existencia de una oportunidad de arbitraje.

- b) Si uno supone "racionalidad de mercado simétrico" [13] y además el inversionista prefiere ganar más que menos, entonces algún inversionista preferirá comprar el valor B en lugar de comprar el valor A .
- c) La tasa a la que se obtiene un préstamo se llama tasa pasiva y la tasa a la que se concede éste es la tasa activa. En este caso, ambas tasas son iguales y están representadas por r , la tasa libre de riesgo.

Consideramos cuatro tipos de instrumentos financieros: opciones "europeas" o "americanas" de compra o venta .

Denotamos por

S : el precio del activo subyacente.

E : el precio de ejercicio.

T : el tiempo de ejercicio o maduración.

r : la tasa libre de riesgo.

σ : la volatilidad del activo subyacente.

El principio básico considerado por Merton consiste en proporcionar una condición necesaria que asigne a las opciones un precio tal que no sea un valor ni dominado ni dominante.

Los principales resultados que Merton presenta son los siguientes:

- 1) El ejercicio temprano para una opción de venta americana puede ser óptimo.
- 2) El valor de una opción "americana" es mayor o igual al valor de una opción "europea", en otras palabras, el valor de la opción "americana" domina al valor de la opción "europea".
- 3) Si consideramos dos opciones de compra "europeas" o "americanas" que difieren solo en el tiempo de expiración, entonces la opción con tiempo de expiración más largo tiene un valor mayor que la otra.

- 3) Si consideramos dos opciones de compra "americanas" o "europeas" que difieren solo en el precio de ejercicio, entonces la opción con precio de ejercicio más grande tiene el valor más chico que la otra.
- 5) El ejercicio temprano de una opción de compra "americana" no es óptimo. En este caso el valor de una opción de compra "americana" es el mismo que su contraparte "europea".

Este artículo está estructurado de la siguiente forma: en la sección dos, recordaremos algunas herramientas estándar referentes al principio del máximo. En la sección tres demostramos los resultados de Merton, utilizando el principio del máximo, la ecuación de Fokker-Planck, así como los métodos de planos móviles y de deslizamiento, en lugar de usar argumentos económicos y financieros. Finalmente, en la sección cuatro, presentamos las conclusiones y algunas consecuencias para futuras investigaciones.

2. Preliminares

En esta sección planteamos, por completez, la versión precisa del principio del máximo que se usará en las demostraciones de nuestros resultados. La mayoría de ellos son estándar y como referencia tenemos [8] para más detalles.

2.1. Principios del Máximo para Operadores Parabólicos

2.1.1. Principio débil del máximo

Consideremos un operador L de la forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu, \quad (1)$$

donde los coeficientes a^{ij} , b^i y c son continuos. Siempre supondremos la condición de parabolicidad uniforme y también que $a^{ij} = a^{ji}$ ($i, j=1, \dots, n$). Consideramos a U como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Denotamos a $U_T = (0, T] \times U$ para algún tiempo fijo $T > 0$. Hay que recordar que la frontera parabólica es $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$.

Teorema 1 (*Principio débil del Máximo para $c \equiv 0$*)
Consideremos que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c \equiv 0$ en U_T .¹

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2)$$

entonces

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (3)$$

entonces

$$\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Teorema 2 (*Principio débil del máximo para $c \geq 0$*)
Supongamos que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c \geq 0$ en U_T .

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (4)$$

entonces

$$\max_{\bar{U}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (5)$$

entonces

$$\min_{\bar{U}_T} u \geq \min_{\Gamma_T} u^-.$$

Nota 1 En particular, si $u_t + Lu = 0$ en U_T , entonces

$$\max_{\bar{U}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

¹ C_1^2 significa que la primera derivada con respecto a la variable de tiempo, t , es continua y la segunda derivada con respecto a la variable de espacio también es continua.

Como consecuencia de los resultados anteriores surge el siguiente lema, el cual será muy útil para las próximas demostraciones.

Lema 1 Sean u^1 y u^2 , dos soluciones que satisfacen la ecuación

$$u_t + Lu = 0 \quad \text{en} \quad U_T, \quad (6)$$

y cumplen la condición

$$u^1 \leq u^2 \quad \text{en} \quad \Gamma_T,$$

entonces

$$u^1 \leq u^2 \quad \text{en} \quad U_T.$$

Los resultados correspondientes pueden ser fácilmente adaptados a ecuaciones hacia atrás (backwards).

3. Principales Resultados para Opciones de Compra Europeas y Americanas

La ecuación diferencial parcial de Black-Scholes para una opción de compra europea es (ver [20])

$$\frac{\partial C_{Eu}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{Eu}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} - rC_{Eu} = 0, \quad (7)$$

donde C_{Eu} es el precio de una opción de compra europea, con función de pago $C_{Eu}(T, S) = \max(S - E, 0)$ y condiciones de frontera $C_{Eu}(t, 0) = 0$ y $C_{Eu}(t, S) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty$.

Análogamente, la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana es

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_A}{\partial S} - rC_A \leq 0, \quad (8)$$

donde C_A es el precio de una opción de compra americana, con función de pago $C_A(t, S) = \max(S - E, 0)$, condiciones de frontera $C_A(t, 0) = 0$ y $C_A(t, S) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty$ y condición de frontera libre $C_A(t, S) \geq \max(S - E, 0)$.

Nota 2 Para el precio de una opción de compra europea o americana, $V(S, t) \rightarrow S$ cuando $S \rightarrow \infty$, la cual es la condición de frontera estándar. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, consideramos la condición de frontera $V(\bar{S}, t) = \bar{S}$ para alguna $\bar{S}$ fija y suficientemente grande. Podríamos aplicar el principio del máximo en dominios no acotados, pero imponiendo suposiciones técnicas adicionales. Desde el punto de vista práctico, es importante tomar en cuenta dicha condición para la implementación de métodos numéricos.

Un primer resultado trivial que se desprende del principio del máximo es el siguiente:

Lema 2 $C_{Eu}(T, S) \geq 0$ y $C_A(t, S) \geq 0$, el cual encierra la positividad de los precios (para su demostración ver [7]).

Análogamente a las definiciones anteriores, consideramos la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes para una opción de compra europea con pago de dividendos en su activo subyacente, dada por

$$\frac{\partial C_{ED}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{ED}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C_{ED}}{\partial S} - rC_{ED} = 0, \quad (9)$$

con función de pago $C_{ED}(T, S) = \max(S - E, 0)$.

Y para una opción de compra americana, cuyo activo subyacente paga dividendos, la igualdad de la ecuación (9) cambia a desigualdad. En este caso, tenemos la condición de frontera libre $C_{AD}(t, S) \geq \max(S - E)$.

Lema 3 Una opción de compra americana en ausencia de oportunidades de arbitraje debe satisfacer

$$C_A(t, S) \geq \max(S - E, 0). \quad (10)$$

Demostración

Esta desigualdad siempre se ha demostrado mediante argumentos económicos y financieros de la siguiente forma:

Sea la paridad entre una opción de compra y de venta dada por

$C_{Eu} = P_{Eu} + S - VP(E)$, donde VP corresponde al valor presente. Entonces

$$\begin{aligned} C_{Eu} &= P_{Eu} + S - VP(E) + E - E \\ &= (S - E) + \{E - VP(E)\} + P_{Eu} \\ &\geq S - E. \quad (\text{si el segundo y tercer término son positivos}) \end{aligned}$$

Ahora deseamos demostrar el mismo lema utilizando el principio del máximo. Para este ejemplo damos la demostración en detalle, pero para los resultados consecuentes omitiremos algunos detalles en argumentos similares.

Queremos demostrar que $C_A(t, S) \geq \max(S - E, 0)$ y ya sabemos que $C_A \geq 0$. Por lo tanto, tenemos que verificar que $C_A(t, S) \geq S - E$.

Consideremos la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana (8).

Por argumentos de regularidad estándar [9], $C_A(t, S) \in C_1^2(U_t) \cap C(\bar{U}_t)$ y $\Gamma_t = \bar{U}_t - U_t$.

Haciendo el cambio de variable $\tau = T - t$. Entonces la ecuación (8) es transformada en

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial \tau} - L_{BS}(C_A) \\ = \frac{\partial C_A}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C_A}{\partial S} + rC_A \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

o,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-C_A)}{\partial \tau} - L_{BS}(-C_A) \\ = \frac{\partial(-C_A)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(-C_A)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial(-C_A)}{\partial S} + r(-C_A) \leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

si $r \geq 0$, la desigualdad satisface las condiciones para aplicar el principio débil del máximo con $c = r \geq 0$ (ecuación (4)). Entonces de la ecuación (12), queremos verificar aplicando el principio del máximo que

$$(S - E) - C_A \leq 0.$$

Sea $u = (S - E) - C_A$, entonces se tiene que mostrar que

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq 0.$$

Substituyendo el valor de u , se obtiene

$$\begin{aligned} (S - E)_\tau + (-C_A)_\tau - L_{BS}(S - E) - L_{BS}(-C_A) &\leq -rS + rS - rE \\ &\leq -rE \leq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

pues $r \geq 0$ y $E \geq 0$.

Si aplicamos el principio del máximo, tenemos:

$$\max_{\bar{U}_\tau}((S - E) - C_A) \leq \max_{\Gamma_\tau}((S - E) - C_A)^+ = 0,$$

dado que tenemos en la frontera las siguientes condiciones:

i) Si $S > E$

$$\Rightarrow C_A = S - E \Rightarrow (S - E) - C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}((S - E) - C_A)^+ = 0.$$

ii) Si $S < E$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow (S - E) - C_A = S - E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(S - E)^+ = 0.$$

iii) Si $S = 0$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow (S - E) - C_A = -E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-E)^+ = 0.$$

iv) Si S es suficientemente grande

$$\Rightarrow C_A \sim S \Rightarrow (S - E) - C_A \sim -E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-E)^+ = 0.$$

El análisis anterior muestra que

$$\max_{\bar{U}_\tau}((S - E) - C_A) \leq 0$$

$$\Rightarrow (S - E) - C_A \leq 0 \text{ en } \bar{U}_\tau \quad y \quad C_A \geq (S - E).$$

Esto completa nuestra demostración. $\diamond$

La interpretación financiera de este hecho nos proporciona un resultado muy importante: el ejercicio temprano para una opción de compra americana, cuyo activo subyacente no paga dividendo, no es óptimo, es decir, el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de compra europea.

Si consideramos ahora el caso de una opción de compra americana, cuyo activo paga dividendos, también recobramos y extenderemos algunos resultados importantes.

Sea la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana con un activo que paga dividendos

$$\frac{\partial C_{AD}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{AD}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C_{AD}}{\partial S} - rC_{AD} \leq 0, \quad (14)$$

Análogamente a la demostración anterior, consideramos el cambio de variable $\tau = T - t$ y $u = (S - E) - C_{AD}$, por lo tanto obtenemos

$$u_\tau - L_{BSD}(u) \leq -rS + SD_0 + rS - rE \leq SD_0 - rE.$$

En este caso, no podemos aplicar directamente el principio del máximo, ya que en general, no sabemos el signo de $SD_0 - rE$. Por tal motivo, no podemos garantizar que $C_{AD} \geq S - E$ se mantenga siempre. Financieramente ésto quiere decir que el ejercicio temprano sí puede ocurrir.

La idea principal de usar el principio del máximo es que podemos decir con precisión cuando el ejercicio temprano es posible.

Si $SD_0 < rE$ implica que $u_\tau - L_{BSD}(u) \leq 0$ y por el principio del máximo obtenemos la desigualdad $C_{AD} \geq S - E$. De acuerdo a la última demostración, ésto nos dice que el ejercicio temprano no ocurre.

Por consistencia, verificaremos que el ejercicio temprano para una opción de venta americana, P_A , no puede ser excluido con nuestra metodología. Procederemos por contradicción y trataremos de mostrar que $P_A - (E - S) \geq 0$.

Sea $u = P_A - (E - S)$ y $\tau = T - t$

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq -rS - rE + rS \leq -rE \leq 0.$$

Si aplicamos el principio del máximo, obtenemos la desigualdad

$$\max_{\bar{U}_\tau}(P_A - (E - S)) \leq \max_{\Gamma_\tau}(P_A - (E - S))^+.$$

Verificamos la frontera

i)

$$Si \quad S > E \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_\tau}(S - E)^+ = S - E.$$

ii)

$$Si \quad S < E \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_\tau}(P_A - (E - S))^+ = 0.$$

iii)

$$Si \quad S = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_\tau}(S)^+ = S.$$

iv)

$$Si \quad S \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_\tau}(S)^+ = S.$$

Si los términos en la frontera no tienen un signo definido, entonces no podemos garantizar que se satisface la desigualdad $P_A \geq \max(E - S, 0)$. Esto nos dice que una opción de venta americana puede, en principio, ser ejercida en cualquier periodo de tiempo antes de expirar.

Ahora, nos gustaría demostrar el Lema 3 de una forma diferente. Para hacer ésto, consideremos el siguiente teorema.

Teorema 3 *Si el activo subyacente no paga dividendos, el valor de una opción de compra europea es el mismo que el valor de una opción de compra americana, es decir, el ejercicio temprano para una opción de compra americana no ocurre.*

Antes de dar la demostración, algunos hechos necesitan ser presentados. Para ésto nos referimos a [7].

De alguna forma hemos ya probado este resultado, demostrando que la opción de compra americana satisface la condición $C_A \geq \max(S - E)$, pero ahora queremos demostrar este teorema usando otras herramientas que serán útiles en otros contextos. Es bien conocido que para una opción de compra

europaea V , la solución de la ecuación de Black-Scholes puede ser expresada usando la fórmula de Feynman-Kac [17]:

$$V(t, S) = E \left[g \left(X_T^{t,S} \right) \exp \left(- \int_t^T r(X_\tau^{t,S} d\tau, \tau) \right) \right], \quad (15)$$

donde V puede ser el valor de una opción de compra o venta, $g(\cdot)$ es la función de pago y para $\tau \in [0, t]$ el proceso $X_\tau^{t,S}$ está definido considerando $X_\tau^{t,S} \equiv S$ y para $\tau \in [t, T]$ el proceso $X_\tau^{t,S}$ es definido como la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_\tau^{t,S} = r \left(X_\tau^{t,S}, \tau \right) X_\tau^{t,S} dt + \sigma \left(X_\tau^{t,S}, \tau \right) dB_\tau \quad \text{con} \quad X_\tau^{t,S} = S. \quad (16)$$

La esperanza en (15) es considerada con respecto a la medida neutral al riesgo.

Este es el teorema fundamental de la valuación de opciones, el cual afirma que el precio libre de arbitraje puede ser obtenido como un valor esperado con respecto a la medida neutral al riesgo.

De igual forma, ésta puede ser escrita como un valor esperado, no con respecto a la medida neutral al riesgo, sino con respecto a la medida física, con un factor de descuento apropiado (la fórmula de Samuelson [3]). Sin embargo, la densidad de la medida física satisface la ecuación de Fokker-Planck, la cual puede ser escrita una vez que la dinámica de S está determinada por una ecuación diferencial estocástica (ver [15]).

De hecho, una formulación análoga puede ser derivada para una opción de compra americana (para más detalles ver [7] y [19]). Hay que recordar que la ecuación para una opción de compra europea está dada por (7).

De acuerdo a la fórmula de Samuelson, el precio de una opción de compra europea al tiempo antes de expirar t y al tiempo de ejercicio T es

$$C_{Eu}(t, S, T) = e^{-r(T-t)} E_p^{t,S} \left(g \left(\frac{S_{(T-t)}}{E(S_{(T-t)})} S_0 e^{r(T-t)} \right) \right),$$

donde $g(\cdot)$ es la función de pago; $E_p(S_t) = e^{\mu(T-t)} S_0$, μ es la tasa media en el crecimiento del activo subyacente y E_p es el valor esperado al tiempo t con respecto a la medida física.

Si el precio de una opción de compra americana es escrita en términos de una opción de compra europea, se obtiene la siguiente fórmula

$$C_A(t, S, T) = E_p^{t,S} (C_A(\tau, S, t)/\tau) = \int_0^t \rho(\tau, S) C_{Eu}(\tau, S, t) d\tau, \quad (17)$$

con $C_{Eu}(t, S, T)$, como antes, una opción de compra europea con tiempo de ejercicio T , tiempo antes de expirar t , y $\rho(t, S)$ es la medida física correspondiente, que da la probabilidad de que el ejercicio temprano ocurra al tiempo t , cuando el activo subyacente es S^2 . Es importante mencionar que hemos usado el hecho de que las opciones europeas y americanas, cuyos activos subyacentes no pagan dividendos, son idénticas.

Sabemos que $\rho(t, S)$ satisface la siguiente ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial \rho}{\partial S} \quad (\text{ver también [7]}), \quad (18)$$

con condiciones de frontera $\rho(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $\rho(t, S) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$, y la condición inicial $\rho(0, S) = \delta(S - S_0)$ con S_0 el activo subyacente inicial.

Demostración del teorema 3

Usando esta aproximación, podemos verificar fácilmente que $C_A(t, S) \leq C_{Eu}(t, S)$.

$$\begin{aligned} C_A(t, S) &= \int_0^t \rho(\tau, S) C_{Eu}(\tau, S) d\tau \quad (\text{por el Teorema 4, ver abajo}) \\ &\leq \int_0^t \rho(\tau, S) C_{Eu}(t, S) d\tau \\ &= C_{Eu}(t, S) \int_0^t \rho(\tau, S) d\tau \quad (C_{Eu}(t, S) \text{ no depende de } \tau, \\ &\leq C_{Eu}(t, S) \quad (\text{por ser } \rho \text{ una función de densidad} \\ &\quad \text{de probabilidad que integra a uno}) \end{aligned}$$

La desigualdad opuesta, $C_A \geq C_{Eu}$, es un hecho en general (ver [14]) y se sigue fácilmente del principio del máximo (ver [8]). La demostración es análoga a la mostrada en el lema 2.

²En términos geométricos $\rho(t, S)$ es la probabilidad de que el proceso exista en el dominio a través de la frontera libre.

A continuación daremos una demostración alternativa aplicando el principio del máximo a ρ .

Consideremos la ecuación de Fokker-Planck (18) y de acuerdo al principio del máximo [Teorema 1], tenemos

a)

$$\max_{\bar{U}_t}(-\rho) \leq \max_{\Gamma_t}(-\rho)^+ = 0, \quad (19)$$

$$\Rightarrow \quad -\rho \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \geq 0.$$

El resultado de esta desigualdad es $\rho \geq 0$, lo cual es cierto pues ρ es una función de densidad de probabilidad.

b) Y por otro lado también se cumple

$$\min_{\bar{U}_t}(-\rho) \geq \min_{\Gamma_t}(-\rho)^-. \quad (20)$$

Así en la frontera tenemos

1) Si $\rho = 1$,

$$\min_{\bar{U}_t}(-\rho) \geq -1 \quad \Rightarrow \quad -\max_{\bar{U}_t}(\rho) \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \max_{\bar{U}_t}(\rho) \leq 1.$$

2) Si $\rho = 0$,

$$\min_{\bar{U}_t}(-\rho) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\max_{\bar{U}_t}(\rho) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\bar{U}_t}(\rho) \leq 0.$$

Esto significa que en U_T la función es idénticamente cero, excepto tal vez en la tapa superior del cilindro parabólico cuando $t = T$.

Por otro lado, ya hemos demostrado anteriormente que $C_A(t, S) - (S - E) \geq 0$, es decir, la frontera del lado derecho no se alcanza porque el ejercicio temprano no ocurre (Lema 3).

Si la porción de la frontera donde ρ puede ser diferente de cero está en $\{t = T\}$ y $\int_{U_T} \rho = 1$, verificamos que esta medida es una delta de Dirac concentrada en $\{t = T\}$.

$$\rho(t, S) = \delta_{Dirac}(t, S) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq T, \\ 0 & \text{c.o.c.,} \end{cases} \quad (21)$$

De esta forma, obtenemos el precio de una opción de compra americana:

$$\begin{aligned} C_A(t, S) &= \int_0^t \rho(\tau, S) C_{Eu}(\tau, S) d\tau \\ &= \int_0^t \delta(S, \tau - t) C_{Eu}(\tau, S) d\tau \\ &= C_{Eu}(t, S) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de compra europea, si el ejercicio temprano no ocurre. $\diamond$

3.1. Otros Resultados de las Opciones de Compra Americanas

Mencionaremos otros resultados importantes acerca de opciones de compra europeas y americanas. Sus demostraciones no sólo dependen del principio del máximo, sino también de los llamados métodos de deslizamiento y de planos móviles [2].

Consideremos la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu,$$

en el rectángulo $[0, T] \times [0, L]$, con condiciones inicial y de frontera $u(0, x) = u_0(x)$ convexa y $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, $0 \leq t \leq T$, respectivamente.

Teorema 4 *Si u es una solución clásica, entonces u es monótona en t , i.e.,*

$$u(t, x) \geq u(t', x) \quad \text{si } t \geq t', \quad \forall x \in [0, L]$$

Demostración

Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que $u(t, x) < u(t', x)$, con $t \geq t'$ y sea

$$t^* = \sup\{t \mid u(t, x) \geq u(t', x), x \in [0, L]\}.$$

Si $t^* > 0$ entonces

$$u(t, x) \geq u(t', x) \quad \forall x \in [0, L] \quad y \quad 0 \leq t' \leq t \leq t^*.$$

Hay que notar que esto es verdadero si la condición inicial es convexa, lo cual puede ser verificado fácilmente en [7].

Se define

$$u^\tau = u(t + \tau, x), \quad \text{para } t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon],$$

con ε suficientemente pequeño, así que la medida de $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \times [0, L]$ es pequeña y el principio del máximo se mantiene [5]. τ también es considerada pequeña.

Entonces $u^\tau(t^* - \varepsilon, x) \geq u(t^* - \varepsilon, x)$, por definición de t^* .

Del principio del máximo se sigue que la desigualdad previa es válida en $[t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \times [0, L]$.

Esto implica que $u(t, x) \geq u(t', x)$, para $t' < t < t^* + \varepsilon$, lo cual es una contradicción. $\diamond$

Como un caso particular, se tiene el siguiente lema.

Lema 4 *Dadas dos opciones de compra con el mismo precio del activo subyacente, S , el mismo precio de ejercicio, E , pero ejercidas en diferentes tiempos antes de expirar (tiempos reales), $t_2 > t_1$, deben satisfacer la siguiente desigualdad*

$$C(t_2, S, E,) \leq C(t_1, S, E) \tag{22}$$

Hay que observar que por el teorema 3, C puede ser una opción europea o americana.

Demostración

Sean $C(t_2, S, E)$ y $C(t_1, S, E)$ dos opciones con $t_2 > t_1$.

Consideremos los cambios de variables siguientes:

$$S = Ee^x, \quad t_i = T - \frac{\tau_i}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad C_A(t, S, E) = Ev(\tau_i, x), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

De acuerdo a este cambio de variables, la ecuación (7) es transformada en la siguiente ecuación de calor y aquí las τ 's corresponden a los tiempos de expiración

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v, \quad k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (23)$$

y la condición final es transformada en condición inicial de la siguiente forma

$$v(0, x) = \max(e^x - 1, 0),$$

la cual es convexa y su condición de frontera es

$$v(t, 0) = v(t, L) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Y por el teorema anterior, consideramos $t = \tau_1$, $t' = \tau_2$, $u(t, x) = v(\tau_1, x)$ y $u(t', x) = v(\tau_2, x)$. $\diamond$

Nota 3 Usando el principio del máximo, es fácil mostrar que para dos opciones de compra dadas con el mismo activo subyacente S , con el mismo precio de ejercicio E , pero con diferentes tiempos al expirar, $T_2 > T_1$, satisfacen $C(T_2, S) \geq C(T_1, S)$.

Lema 5 Dadas dos opciones de compra idénticas, europeas o americanas, excepto que una tiene un precio de ejercicio más grande que la otra, es decir, $E_2 > E_1$, se debe cumplir la siguiente desigualdad

$$C(t, S, E_2) \leq C(t, S, E_1). \quad (24)$$

Demostración

Demostraremos el lema para el caso de una opción de compra europea. El caso de una opción de venta americana es similar.

Sean dos opciones de compra europeas, $C_{Eu}(t, S, E_1)$ y $C_{Eu}(t, S, E_2)$ respectivamente. Ellas satisfacen la ecuación (7) con las siguientes condiciones de frontera:

- $C_{Eu}(t, 0, E_i) = 0$, para $i = 1, 2$
- $C_{Eu}(t, S, E_i) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty$, para $i = 1, 2$ y
- $C_{Eu}(T, S, E_i) = \max(S - E_i, 0)$, para $i = 1, 2$

Vamos a utilizar el Lema 1. Haciendo el cambio de variables, la ecuación (7) se transforma en la ecuación parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad -\infty < x_i < \infty \quad y \quad \tau > 0, \quad (25)$$

con $x_i = \log(S/E_i)$ para $i = 1, 2$ y condición inicial

$$u(0, x_i) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_i} - e^{(k_1-1)x_i}, 0).$$

Si aplicamos el Lema 1, tendremos que probar que para $x_2 < x_1$,

$$u(0, x_1) > u(0, x_2).$$

Primero, consideramos dos casos

- 1) Si $S \geq E_i \Rightarrow \frac{S}{E_i} \geq 1 \Rightarrow \ln(\frac{S}{E_i}) \geq 0$.
- 2) Si $S \leq E_i \Rightarrow \frac{S}{E_i} \leq 1 \Rightarrow \ln(\frac{S}{E_i}) \leq 0$.

Sin pérdida de generalidad, sólo consideramos el primer caso ($S \geq E_i$), porque para el segundo caso tenemos $\max(S - E_i, 0) = 0$.

Sea $E_1 < E_2$, $S \geq 0$ y $S \geq E_i$ para $i = 1, 2$, entonces

$$x_1 \geq x_2.$$

Si $k_1 = \frac{2r}{\sigma^2} > 0$

$$e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} \geq e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2}, \quad (26)$$

y aplicando cálculos directos, podemos probar que

$$-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1} \leq -e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}. \quad (27)$$

De las desigualdades (26) y (27) obtenemos la siguiente desigualdad

$$e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1} \geq e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}$$

De aquí tenemos

$$\max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1}, 0) \geq \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}, 0),$$

por lo tanto $u(0, x_1) \geq u(0, x_2)$ for $x_2 < x_1$.

Entonces, aplicando el Lema 1 tenemos

$$u(t, x_1) \geq u(t, x_2).$$

Así, queda demostrado que

$$C_{Eu}(t, S, E_2) \leq C_{Eu}(t, S, E_1) \text{ si } E_1 < E_2. \diamond$$

Finalmente, de acuerdo a Merton, Supongamos que una opción europea es equivalente a una posición larga en su activo común apalancado por un prestamo descontado con una obligación limitada, donde el deudor promete pagar E dólares al final de τ periodos, pero en el evento de incumplimiento es sólo obligado a extender el valor del activo en ese tiempo. Si el valor presente del préstamo es una función decreciente de la tasa de interés, entonces, para un precio del activo dado, el precio de una opción será una función creciente de la tasa de interés.

Sea $P(\tau)$ el precio de un préstamo (o bono) descontado sin riesgo (en términos de incumplimiento), el cual paga un dolar τ años a partir de ahora. Si suponemos que ahora y en el futuro las tasas de interés son positivas, entonces

$$1 = P(0) > P(t_1) > P(t_2) > \dots > P(t_n), \text{ para } 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Teorema 5 *Si el precio de ejercicio de una opción de compra europea es E y no paga dividendos y construimos el activo común sobre la vida de la opción, entonces*

$$C_{Eu}(t, S, E) \geq \max(0, S - EP(t)).$$

Demostración

La demostración es análoga al Lema 3.

4. Conclusiones

Como mencionamos en la introducción, y de las técnicas utilizadas en las demostraciones, es claro que básicamente todos los resultados pueden ser extendidos a modelos semilineales, así como a ecuaciones no lineales (ver [6] y [16]).

Otra dirección relevante de investigaciones futuras es considerar modelos que permiten pequeñas oportunidades de arbitraje, en cuyo caso nuestra aproximación permitirá considerar ecuaciones de la forma (7) con tasa de interés variable. En este contexto, una oportunidad de arbitraje se generaría si $r(t)$ fuera negativa en un periodo corto.

Sin embargo, las herramientas empleadas podrían ser aplicables siempre y cuando estas ventanas (pequeñas oportunidades de arbitraje) en el tiempo no fueran muy grandes [5]. A través de las mismas líneas, usando técnicas analíticas nos proporcionará una versión más cuantitativa de la teoría racional de opciones de Merton (ver la ecuación (14)).

Referencias

- [1] H.Ahn and P. Wilmott, On trading american options, OCIAM, Oxford University, OFRC Working Papers Series, Number 1999mf02.
- [2] H. Berestycki H. and L. Nirenberg, On the method of moving planes and the sliding method, Bol. Soc. Brasil. de Mat. 22 (1991), 1-37.
- [3] M. Bladt, T. H. Rydberg, An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions, Insurance: Mathematics and Economics. 22(1) (1998), 65-73.
- [4] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time* (Oxford University Press, 1998).
- [5] X. Cabré, On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations, Commun. Pure Appl. Math. 48 (1995) 539-570.
- [6] d-fine Christ Church College, Nonlinear Black Scholes Modelling: FDM vs FEM, Msc in Mathematical Finance Thesis, University of Oxford (2004).

- [7] R. Elizondo, Implementación de factores macroeconómicos a algunos modelos de productos derivados, PhD in Sciences Mathematics Thesis, IIMAS, UNAM (2008).
- [8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations* (American Mathematical Society, 1998).
- [9] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edn. (Springer-Verlag, 1983).
- [10] H. Han and X. Wu, A fast numerical method for the Black-Scholes equation of American options, SIAM. J. Numer. Anal. 41(6) (2003) 2081-2095.
- [11] R. A. Jarrow, Preferences, continuity and the arbitrage pricing theory, The Review of Financial Studies 1(2) (1988) 159-172.
- [12] F. Llenera-Garcés, Una nota sobre valoración de opciones Americanas y arbitraje, Investigaciones Económicas 24(I) (2000) 207-218.
- [13] H. M. Merton and F. Modigliani, Dividend Policy and Market Baluation: A Reply, The Journal of Business. 36(1) (1963) 116-119.
- [14] R. C. Merton, *Continuos-Time Finance*, 4th. edn. (Blackwell, 1995).
- [15] B. Øksndal, *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [16] M. Șîrbu and S. E. Shreve, A two person game for pricing convertible bonds, SIAM J. Control Optim. 45(4) (2006) 1508-1539.
- [17] J. M. Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications* (Springer-Verlag, 2001).
- [18] A. Tijonov and A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, (Editorial MIR, Moscu, 1983).
- [19] N. Uys, Optimal stopping problems and American option, MSc dissertation, University of Witwatersrand (2005).
- [20] P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computations*, (Oxford Financial Press, 1993).