Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2007-07

**Política Fiscal Óptima en una Economía Pequeña y
Abierta y la Estructura de los Mercados Financieros
Internacionales**

Josué Fernando Cortés Espada
Banco de México

March 2007

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Política Fiscal Óptima en una Economía Pequeña y Abierta y la Estructura de los Mercados Financieros Internacionales

Josué Fernando Cortés Espada[†]
Banco de México

Abstract

This paper characterizes the behavior of debt and tax rates in a small open economy under both complete and incomplete markets. First, I show that when the government follows an optimal fiscal policy and agents have access to complete markets, the value of the government's debt portfolio is negatively correlated with government spending, and positively correlated with productivity and output, while output, labor, consumption and the tax rate are uncorrelated with government spending shocks. The stochastic processes followed by these variables inherit the serial-correlation properties of the stochastic process of the productivity shock. Second, I show that if agents can only buy and sell one-period risk-free bonds, public debt shows more persistence than other variables, and it is negatively correlated with productivity and output, and positively correlated with government spending. Moreover, the tax rate is positively correlated with government spending, while consumption is negatively correlated.

Keywords: Complete markets, Incomplete markets, Optimal fiscal policy.

JEL Classification: E60, F34, F41, G15 and H21.

Resumen El presente artículo caracteriza el comportamiento de la deuda pública y de la tasa impositiva bajo mercados completos e incompletos en una economía pequeña y abierta. En primer lugar, se demuestra que cuando el gobierno sigue una política fiscal óptima y los agentes tienen acceso a mercados completos, el valor del portafolio de deuda del gobierno está negativamente correlacionado con el gasto público y positivamente correlacionado con la productividad y el producto, mientras que el producto, el trabajo, el consumo y la tasa impositiva no están correlacionados con el gasto público. Los procesos estocásticos que siguen estas variables heredan las propiedades estadísticas del proceso estocástico que sigue la productividad. En segundo lugar, se demuestra que si los agentes tienen acceso a mercados incompletos, la deuda pública es más persistente que la otras variables y está negativamente correlacionada con la productividad y el producto, y positivamente correlacionada con el gasto público. Adicionalmente, la tasa impositiva está positivamente correlacionada con el gasto público, mientras que el consumo está negativamente correlacionado.

Palabras Clave: Mercados completos, Mercados incompletos, Política fiscal óptima.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Correo Electrónico: jfcortes@banxico.org.mx.

1 Introducción

En este artículo se caracteriza el comportamiento de la deuda y de la tasa impositiva en una economía pequeña y abierta bajo mercados financieros completos e incompletos utilizando la metodología de Ramsey de imposición dinámica óptima. Desde el artículo de Lucas y Stokey (1983), han surgido una serie de artículos que han caracterizado la política fiscal óptima basados en la metodología de Ramsey. Sin embargo, la mayor parte de estos artículos han centrado su atención en economías cerradas. En el presente artículo, por el contrario, se estudian las propiedades de la política fiscal óptima en una economía pequeña y abierta bajo dos estructuras distintas en el mercado de activos. Se utiliza la metodología de Ramsey para resolver la política fiscal óptima. En esta metodología, el planificador escoge la asignación que maximiza la utilidad del agente representativo sujeto a que esta asignación pueda ser implementada como un equilibrio competitivo. Las principales contribuciones del artículo son las siguientes: Primero, se demuestra que cuando el gobierno sigue una política fiscal óptima en una economía pequeña y abierta, y los agentes tienen acceso a mercados financieros completos, el valor del portafolio de deuda del gobierno es una función invariante de los choques que afectan a la economía. Por lo tanto, el valor del portafolio de deuda del gobierno hereda las propiedades estadísticas de los choques que generan las fluctuaciones de la economía. Adicionalmente, el valor del portafolio de deuda del gobierno está negativamente correlacionado con el gasto de gobierno y positivamente correlacionado con la productividad y el producto, mientras que el producto, el consumo, las horas de trabajo y la tasa impositiva no están correlacionadas con el gasto público. Los procesos estocásticos

que siguen el producto, las horas de trabajo, el consumo y la tasa impositiva heredan las propiedades estadísticas del choque a la productividad. El gobierno financia en este caso todas los choques al gasto público mediante pagos contingentes provenientes del exterior. Segundo, se demuestra que si los agentes tienen acceso únicamente a mercados financieros incompletos, la deuda pública exhibe una mayor persistencia que las otras variables de la economía. Adicionalmente, la deuda pública está negativamente correlacionada con la productividad y el producto, y positivamente correlacionada con el gasto público, debido a que la deuda sirve como un instrumento para suavizar las distorsiones impositivas a través del tiempo. Finalmente, la tasa impositiva está positivamente correlacionada con el gasto público, mientras que el consumo está negativamente correlacionado con el gasto de gobierno. La correlación negativa entre el gasto público y el consumo representa un costo en términos de bienestar ocasionado por la falta de mercados completos. El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se realiza una breve revisión de la literatura de política fiscal óptima. En la sección 3 se presenta el modelo con mercados completos y se analizan las propiedades dinámicas de la política fiscal óptima bajo mercados financieros completos. En la sección 4 se presenta el modelo con mercados incompletos y se analizan las propiedades dinámicas de la política fiscal óptima. En la sección 5 se presentan las conclusiones.

2 Revisión de la Literatura

Este artículo pertenece a la literatura de política fiscal óptima. Como se mencionó anteriormente, desde la publicación del artículo de Lucas y Stokey (1983) ha surgido una extensa

literatura sobre política fiscal óptima en economías dinámicas y estocásticas. Lucas y Stokey analizaron las propiedades de la política fiscal óptima en una economía cerrada con mercados completos utilizando la metodología de Ramsey de imposición dinámica óptima. Estos autores descubrieron que el gobierno puede mantener la tasa impositiva relativamente constante ante choques al gasto público mediante la emisión de deuda contingente en la realización del estado de la naturaleza. Por lo tanto, la deuda contingente sirve como un instrumento para suavizar las distorsiones impositivas a través del tiempo y de los estados de la naturaleza. Adicionalmente, Lucas y Stokey demostraron que en este contexto, la tasa impositiva y la deuda heredan las propiedades estadísticas de los choques que afectan a la economía. Chari, Christiano and Kehoe (1994) analizaron las propiedades cuantitativas de la política fiscal óptima en un modelo de ciclos reales con mercados completos. Estos investigadores demostraron que el gobierno puede mantener la tasa impositiva relativamente constante a lo largo del ciclo económico mediante impuestos contingentes al ingreso por concepto de intereses. Por otro lado, Aiyagari et al (2002) analizaron las propiedades de la política fiscal óptima en una economía cerrada con mercados incompletos. Estos autores demostraron que en este contexto, la deuda y la tasa impositiva son muy persistentes independientemente del proceso estocástico de los choques macroeconómicos. Ellos también encontraron que la deuda y la tasa impositiva crecen permanentemente en respuesta a un choque al gasto de gobierno. Angeletos (2002), y Buera y Nicolini (2002) consideraron una economía en la cual el gobierno puede emitir deuda indexada no-contingente de distintos plazos. Estos investigadores demostraron que los gobiernos pueden utilizar la estructura temporal de tasas de

interés para replicar la asignación de mercados completos. Sin embargo, Buera y Nicolini demostraron que el gobierno necesitaría tomar posiciones extremadamente largas y cortas en bonos de distintos plazos para replicar la asignación con mercados completos. Marcet y Scott (2000) compararon las implicaciones empíricas del modelo con mercados completos, el modelo con mercados incompletos y los datos de Estados Unidos. Estos autores demostraron que el modelo con mercados incompletos se ajusta mejor a los datos. Para el caso de una economía abierta, Riascos y Vegh (2004) desarrollaron un modelo en el cual el gasto público se determina de manera endógena. Estos autores demostraron que cuando los mercados financieros son completos, la correlación entre el el gasto público y el producto es cero, mientras que si los mercados son incompletos, la correlación entre el gasto público y el producto es positiva. En términos de la literatura existente, el presente artículo es más cercano al artículo de Riascos y Vegh (2004). Al igual que estos investigadores, en el presente artículo se estudian las propiedades de la política fiscal óptima en una economía pequeña y abierta. Sin embargo, el presente trabajo de investigación difiere en dos aspectos fundamentales del artículo antes mencionado. Primero, el objetivo del presente artículo consiste en caracterizar el comportamiento de la tasa impositiva y de la deuda pública bajo mercados completos y bajo mercados incompletos en una economía pequeña y abierta, mientras que el objetivo de Riascos y Vegh es analizar el carácter procíclico de la política fiscal en economías emergentes. Segundo, estos autores analizan una economía sin producción, mientras que en el presente trabajo de investigación se considera una economía con producción y con una oferta de trabajo elástica, por lo que cualquier movimiento en la tasa impositiva afecta a la oferta

de trabajo y al producto.

3 Modelo con Mercados Completos

Se considera una economía pequeña y abierta habitada por un número infinito de hogares idénticos. En cada periodo, la economía experimenta uno de muchos posibles eventos $s_t \in S$. Se denota por $s^t = (s_0, \dots, s_t)$ a la historia de eventos desde el periodo cero hasta el periodo t . La probabilidad en el periodo cero de una historia en particular s^t es $\mu(s^t)$. La realización inicial s_0 está dada. Los mercados financieros son completos, ya que tanto el gobierno como el sector privado tienen acceso a un conjunto de certificados Arrow-Debreu. El gobierno financia una secuencia exógena y estocástica de gasto público mediante la emisión de deuda contingente y mediante impuestos proporcionales al ingreso a la tasa $\tau(s^t)$.

3.1 Hogares

Cada hogar tiene preferencias definidas sobre consumo c_t y trabajo h_t . La función de utilidad del agente representativo es la siguiente:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) U(c(s^t), h(s^t)) \quad (1)$$

donde $0 < \beta < 1$ representa al factor subjetivo de descuento, $c(s^t)$ y $h(s^t)$ representan respectivamente al consumo y al trabajo condicionados en la historia de eventos s^t , y U representa a la función de utilidad, la cual es estrictamente creciente en el consumo, decreciente en el trabajo, estrictamente cóncava, y satisface las condiciones de Inada.

En cada periodo t , los hogares tienen acceso a una serie de bonos contingentes de un periodo $d(s^t, s_{t+1})$, los cuales pagan una unidad de consumo en un estado particular del periodo $t + 1$. La variable $D(s^t) = (d(s^t, s_{t+1}))_{s_{t+1} \in S}$ representa al portafolio de bonos contingentes del agente representativo en el periodo t , condicionado en la historia s^t . La variable $q(s_{t+1} | s^t)$ representa al precio en el periodo t condicionado en la historia s^t de un activo que paga una unidad de consumo en el periodo $t + 1$ en caso de que ocurra el evento s_{t+1} . El valor en el periodo t del portafolio de bonos contingentes comprados en el periodo t , s^t es:

$$v^d(s^t) = \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) d(s^t, s_{t+1})$$

La variable $\sum_{s_{t+1}} q(s^t | s_{t+1})$ representa al precio en el periodo t de un activo que paga una unidad de consumo en cada posible estado del periodo $t + 1$. Por lo tanto, esta variable es igual al inverso de la tasa de interés bruta. Si se denota por $R(s^t)$ a la tasa de interés bruta, entonces tenemos la siguiente condición de no-arbitraje.

$$R(s^t) = \frac{1}{\sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t)}$$

En cada periodo t , el agente representativo tiene acceso a una función de producción que transforma trabajo en producto. La restricción presupuestal del agente representativo es igual a:

$$c(s^t) + \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) d(s^t, s_{t+1}) \leq d(s^t) + (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (2)$$

donde τ representa a la tasa impositiva, f representa a la función de producción, y $z(s^t)$ representa un shock tecnológico. La función de producción es creciente, cóncava y homogénea

de $\eta < 1$.

El agente representativo también está sujeto a la siguiente condición de no-Ponzi:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{s^{t+j} | s^t} Q^t(s^{t+j}) d(s^{t+j}) \geq 0 \text{ para todo } t, s^t \quad (3)$$

donde $Q^t(s^{t+j})$ representa al precio de un activo que paga una unidad de consumo en el periodo $t+j$ condicionado en la historia s^{t+j} , el precio $Q^t(s^{t+j})$ está expresado en unidades del bien de consumo del periodo t condicionado en la historia s^t .

$$\begin{aligned} Q^t(s^{t+j}) &= q(s_{t+1} | s^t) q(s_{t+2} | s^{t+1}) \dots q(s_{t+j} | s^{t+j-1}) \\ Q^t(s^t) &= 1 \end{aligned}$$

Los supuestos en la función de utilidad garantizan que las restricciones (2) y (3) se cumplan con igualdad. Si se satisfacen estas dos restricciones con igualdad, entonces también se debe satisfacer con igualdad la siguiente restricción presupuestal intertemporal.

$$d_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f(h(s^t)) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) c(s^t) \quad (4)$$

donde $Q(s^t)$ representa el precio de un activo en el periodo cero que paga una unidad de consumo en el periodo t condicionado en la historia s^t .

$$\begin{aligned} Q(s^t) &= q(s_1 | s_0) q(s_2 | s^1) \dots q(s_t | s^{t-1}) \\ Q(s_0) &= 1 \end{aligned}$$

La restricción presupuestal intertemporal sostiene que el valor presente de la riqueza total, la cual está compuesta por la riqueza financiera inicial y por el valor presente del ingreso neto es

igual al valor presente del consumo. Dados los procesos estocásticos $\{z(s^t), \tau(s^t), Q(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ y la condición inicial d_{-1} , el agente representativo escoge un conjunto de secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que maximizan (1) sujeto a (4). Las condiciones de primer orden son además de (4) las siguientes:

$$\beta^t u_c(s^t) \mu(s^t) = \lambda Q(s^t) \quad (5)$$

donde λ es el multiplicador de la restricción presupuestal intertemporal, y u_c es la utilidad marginal del consumo.

$$-\frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} = (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f'(h(s^t)) \quad (6)$$

La ecuación (6) muestra que la tasa impositiva introduce una brecha entre la tasa marginal de sustitución consumo-ocio y el producto marginal del trabajo.

3.2 Gobierno

El gobierno determina la tasa impositiva y emite deuda contingente para financiar su gasto, el cual es exógeno, estocástico e improductivo. En cada periodo t , el gobierno emite bono contingentes de un periodo $b(s^t, s_{t+1})$, los cuales pagan una unidad de consumo en un estado particular del periodo $t + 1$. La variable $B(s^t) = (b(s^t, s_{t+1}))_{s_{t+1} \in S}$ representa al portafolio de deuda del gobierno en el periodo t , condicional en la historia s^t . El valor del portafolio de deuda del gobierno en el periodo t condicional en la historia s^t es:

$$v^b(s^t) = \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) b(s^t, s_{t+1})$$

La restricción presupuestal del gobierno es:

$$g(s^t) + b(s^t) \leq \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) b(s^t, s_{t+1}) + \tau(s^t) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (7)$$

El gobierno también está sujeto a la siguiente restricción de no-Ponzi.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{s^{t+j} | s^t} Q^t(s^{t+j}) b(s^{t+j}) \leq 0 \text{ para todo } t, s^t \quad (8)$$

Un gobierno benevolente que busca maximizar la utilidad de los agentes privados siempre va a escoger asignaciones tal que (7) y (8) se satisfagan con igualdad. Si se satisfacen estas dos restricciones con igualdad, entonces también se satisface con igualdad la siguiente restricción presupuestal intertemporal.

$$b_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) g(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) \tau(s^t) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (9)$$

donde b_{-1} es el valor inicial de deuda.

La política fiscal consiste en una secuencia contingente para la tasa impositiva $\{\tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.

3.3 Condiciones de Equilibrio

En esta sección se caracterizan las condiciones de equilibrio para la economía pequeña y abierta. Combinando las restricciones presupuestales del agente representativo y del gobierno obtenemos una expresión que describe la evolución de los activos netos de la economía.

$$\sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) [d(s^t, s_{t+1}) - b(s^t, s_{t+1})] = d(s^t) - b(s^t) + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) - c(s^t)$$

Si combinamos las restricciones presupuestales intertemporales del agente representativo y del gobierno obtenemos la restricción de recursos de la economía.

$$d_{-1} - b_{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) [g(s^t) + c(s^t)] - \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) z(s^t) f(h(s^t))$$

Se supone como en Schmitt-Grohé y Uribe (2003), que los agentes extranjeros tienen acceso a los mismos bonos que los agentes domesticos. La condición de primer orden (5), para los agentes extranjeros suponiendo el mismo factor de descuento es:

$$\beta^t u_{c^*}(s^t) \mu(s^t) = \lambda^* Q(s^t) \quad (10)$$

La tasa marginal de sustitución en el país doméstico entre el consumo en t , s^t y el consumo en el periodo cero es:

$$\frac{\beta^t u_c(s^t) \mu(s^t)}{u_c(s_0)} = Q(s^t)$$

La tasa mariginal de sustitución para los agentes extranjeros entre el consumo en t , s^t y el consumo en el periodo cero es:

$$\frac{\beta^t u_{c^*}(s^t) \mu(s^t)}{u_{c^*}(s_0)} = Q(s^t)$$

combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{u_c(s^t)}{u_c(s_0)} = \frac{u_{c^*}(s^t)}{u_{c^*}(s_0)} \quad (11)$$

Esta ecuación se satisface en todos los periodos y estados de la naturaleza, lo que implica que la utilidad marginal del consumo en el país doméstico es proporcional a la utilidad marginal del consumo en el extranjero.

$$u_c(s^t) = \chi u_{c^*}(s^t) \quad (12)$$

donde $\chi = \frac{u_c(s_0)}{u_{c^*}(s_0)}$

Dado que la economía doméstica es pequeña, $u_{c^*}(s^t)$ es exógena. Adicionalmente, se supone como en Schmitt-Grohé y Uribe (2003) que la tasa marginal de sustitución en el extranjero es constante e igual a u_{c^*} . Por lo tanto, la ecuación (12) se puede escribir de la siguiente forma:

$$u_c(s^t) = \xi \quad (13)$$

donde $\xi = \chi u_{c^*}$ es una constante. Evaluando (5) en $t = 0$, obtenemos que $\lambda = u_c(s_0) = \xi$. Dado que $u_{c^*}(s^t)$ es constante e igual a u_{c^*} , los precios Arrow-Debreu satisfacen la siguiente ecuación:

$$q(s_{t+1} | s^t) = \beta \mu(s^{t+1} | s^t) \quad (14)$$

$$Q(s^t) = \beta^t \mu(s^t)$$

3.4 Equilibrio Competitivo con Impuestos

Dada la condición inicial b_{-1} , el parámetro ξ , y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, un equilibrio competitivo es un conjunto de secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t), Q(s^t), \lambda\}_{t=0}^{\infty}$, y una política fiscal $\{\tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\beta^t u_c(s^t) \mu(s^t) = \lambda Q(s^t) \quad (15)$$

$$-\frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} = (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f'(h(s^t)) \quad (16)$$

$$b_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) g(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Q(s^t) \tau(s^t) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (17)$$

$$u_c(s^t) = \xi \quad (18)$$

$$Q(s^t) = \beta^t \mu(s^t) \quad (19)$$

La definición de equilibrio competitivo no involucra ni a d_{-1} ni a la restricción presupuestal intertemporal (4). La razón es que d_{-1} se ajusta a través de los distintos estados de la naturaleza posibles en el periodo cero para garantizar que (4) se satisfaga para un valor dado ξ . Es decir, dados los valores de equilibrio de las secuencias contingentes, se puede encontrar el valor de d_{-1} asociado al equilibrio competitivo de la ecuación (4). La política fiscal óptima es el proceso estocástico $\{\tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ asociado con el equilibrio competitivo que le da al agente representativo el nivel más alto de utilidad, es decir, que maximiza (1). Para encontrar la política fiscal óptima, resulta conveniente utilizar una representación del equilibrio competitivo conocida como la forma primal del equilibrio. Para poder construir la forma primal, se sustituyen los precios y las tasas impositivas en términos de cantidades, de forma que el equilibrio quede expresado únicamente en términos de cantidades.

3.4.1 Forma Primal

Proposición 1. Dada la condición inicial b_{-1} , el parámetro ξ y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, las secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen: $u_c(s^t) =$

$$\xi \text{ y } \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) \right\} \mu(s^t) = b_{-1} \text{ si y sólo si satisfacen}$$

(15), (16), (17), (18) y (19) ■

Demostración. Ver Apéndice. ■

3.5 Problema de Ramsey

De acuerdo a la proposición 1, el problema de Ramsey consiste en escoger secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}$ que maximicen

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) U(c(s^t), h(s^t))$$

sujeto a

$$u_c(s^t) = \xi$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) \right\} \mu(s^t) = b_{-1}$$

El Lagrangiano del problema de Ramsey es:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ \begin{aligned} &U(c(s^t), h(s^t)) + \gamma \left[\frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) \right] \\ &+ \Omega(s^t) (u_c(s^t) - \xi) \end{aligned} \right\} \mu(s^t) - \gamma b_{-1}$$

donde γ y Ω son los multiplicadores de Lagrange asociados a las condiciones de implementabilidad. Las condiciones de primer orden del problema de Ramsey son:

$$u_c(s^t) + \gamma \frac{h(s^t)}{\eta} \left[\frac{u_{ch}(s^t)}{u_c(s^t)} - \frac{u_h(s^t) u_{cc}(s^t)}{(u_c(s^t))^2} \right] = -\Omega(s^t) u_{cc}(s^t) \quad (20)$$

$$u_h(s^t) + \gamma \left\{ \frac{h(s^t)}{\eta} \left[\frac{u_{hh}(s^t)}{u_c(s^t)} - \frac{u_h(s^t) u_{ch}(s^t)}{(u_c(s^t))^2} \right] + \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t) \eta} + z(s^t) f'(h(s^t)) \right\} = -\Omega(s^t) u_{ch}(s^t) \quad (21)$$

$$u_c(s^t) = \xi \quad (22)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) \right\} \mu(s^t) = b_{-1} \quad (23)$$

Proposición 2. Si los procesos estocásticos $s = (z, g)$ son Markov, entonces existen funciones c, h y τ tal que las soluciones para el consumo, el trabajo y la tasa impositiva son funciones estacionarias únicamente del shock a la productividad. $c(s^t) = c(z_t)$, $h(s^t) = h(z_t)$, $\tau(s^t) = \tau(z_t)$ ■

Demostración. Ver Apéndice. ■

La proposición 2 establece que el consumo, el trabajo y la tasa impositiva tienen una correlación igual a cero con el gasto de gobierno. Estas variables dependen únicamente de la realización del shock a la productividad. Los procesos estocásticos que siguen estas variables heredan las propiedad estadísticas del shock a la productividad z_t . Por ejemplo, si los shocks a la productividad son i.i.d., entonces las asignaciones y la tasa impositiva son i.i.d. Por otro lado, si los shocks son persistentes, entonces las asignaciones y la tasa impositiva también son persistentes.

Proposición 3. Dadas las funciones c, h y τ y la condición (14), el valor de equilibrio del

portafolio de deuda del gobierno en el periodo t $B(s^t) = (b(s^t, s_{t+1}))_{s_{t+1} \in S}$ es independiente de la realización del estado de la naturaleza $s_t = (z_t, g_t)$. ■

Demostración. La restricción presupuestal del gobierno es:

$$b(s^t) = \tau(z_t) z_t f(h(z_t)) - g_t + \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) b(s^t, s_{t+1})$$

Esta expresión es igual a:

$$b(s^t) = \tau(z_t) z_t f(h(z_t)) - g_t + \beta E_t [b(s^t, s_{t+1})]$$

$$b(s^t) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j [\tau(z_{t+j}) z_{t+j} f(h(z_{t+j})) - g_{t+j}]$$

La primera igualdad utiliza (14) y la definición de expectativa condicional, y la segunda igualdad se obtiene mediante sustitución recursiva y (8). Dado que h y τ son funciones estacionarias del shock a la productividad, y que s_t es Markov, la expectativa del lado derecho de la segunda igualdad es únicamente función de s_t . Por lo tanto, $b(s^t) = b(s_t)$ es una función estacionaria del estado s_t , y el portafolio de deuda del gobierno es constante.

$$B(s^t) = (b(s_{t+1}))_{s_{t+1} \in S} = B$$

■

La proposición 3 establece que el portafolio de deuda del gobierno no responde ni a los shocks a la productividad ni a los shocks al gasto de gobierno. El gobierno siempre emite

la misma cantidad de cada bono contingente en equilibrio independientemente del periodo y del estado de la naturaleza. Por lo tanto, el portafolio de deuda del gobierno es constante para todo t, s^t .

Proposición 4. El valor del portafolio de deuda del gobierno $v^b(s^t)$ es una función estacionaria del estado de la naturaleza V^b

$$v^b(s^t) = V^b(s_t) = \beta E_t[b(s_{t+1})]$$

para todo t y s^t ■

Demostración. El valor del portafolio de deuda del gobierno en el periodo t condicional en la historia s^t es:

$$v^b(s^t) = \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) b(s^t, s_{t+1})$$

Esta expresión es igual a :

$$v^b(s^t) = \sum_{s_{t+1}} q(s_{t+1} | s^t) b(s^t, s_{t+1}) = \beta E_t[b(s_{t+1})] = V^b(s_t)$$

■

La segunda igualdad utiliza (14) y la proposición (3). El supuesto de que los shocks son Markov, y la proposición (3) implican que V^b es una función estacionaria. Esta proposición dice que el valor del portafolio de deuda del gobierno responde a los shocks que afectan a la economía. En la siguiente sección se demuestra que el valor del portafolio de deuda del

gobierno decrece en respuesta a shocks positivos al gasto de gobierno, y crece en respuesta a shocks positivos a la productividad.

3.6 Propiedades Dinámicas de la Política Fiscal Óptima bajo Mercados Completos

En esta sección se realizan algunas simulaciones con el propósito de estudiar las propiedades dinámicas del modelo bajo la política fiscal óptima con mercados financieros completos. Primero, se describe la calibración del modelo. Segundo, se presentan las funciones de impulso respuesta del modelo. Finalmente, se presentan los momentos de las variables simuladas.

3.6.1 Calibración

El modelo se calibra de tal forma que sea consistente con algunas regularidades empíricas que reflejan la estructura de una economía emergente típica. La unidad de tiempo es un trimestre, y la dotación de tiempo, la cual se divide entre trabajo y ocio, se normaliza a uno. Se supone que la función de utilidad es Cobb-Douglas entre consumo y ocio.

$$U(c, h) = \frac{(c^\alpha (1 - h)^{1-\alpha})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

El parámetro σ , el cual representa el coeficiente de aversión relativa al riesgo se fija en 2, el cual es un valor estándar en la literatura. El parámetro α se calibra de tal forma que los hogares destinen 1/3 de su tiempo al trabajo en el estado estacionario. Se supone que la tasa de interés real en el estado estacionario es igual a 10% anual $r = 0.1$. Por lo tanto,

$\beta = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4}$. La función de producción es cóncava en las horas de trabajo.

$$zf(h) = zh^\eta$$

La participación del trabajo en el producto es igual a 67% , por lo que $\eta = 0.67$. Adicionalmente, se supone que la deuda pública como proporción del producto es 20% en el estado estacionario, y que el gasto de gobierno como proporción del producto también es 20%. La tasa impositiva en el estado estacionario es igual a:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{g}}{\bar{y}} + (1 - \beta) \frac{\bar{b}}{\bar{y}}$$

Se supone que la deuda extranjera como proporción del producto es igual a 40% en el estado estacionario. La participación del consumo en el producto en el estado estacionario se obtiene combinando las restricciones presupuestales del agente representativo y del gobierno en el estado estacionario.

$$\frac{\bar{c}}{\bar{y}} = 1 - \frac{\bar{g}}{\bar{y}} - (1 - \beta) \frac{\bar{b} - \bar{d}}{\bar{y}}$$

El parámetro ξ se calibra de la ecuación (18) evaluada en el estado estacionario, y el parámetro α de la función de utilidad se calibra de la ecuación (6) evaluada en el estado estacionario.

Se supone como en Schmitt-Grohé y Uribe (2003) que los shocks a la productividad y al gasto de gobierno siguen dos procesos independientes de Markov. En particular, z_t puede tomar 2 valores $z^h = 1 + \sigma_z$ o $z^l = 1 - \sigma_z$. Se supone que z_t tiene una desviación estándar de 0.04 y un coeficiente de autocorrelación de 0.82. De forma similar, g_t puede tomar 2 valores

$g^h = 1 + \sigma_g$ o $g^l = 1 - \sigma_g$. Se supone que el gasto de gobierno g_t es 20% del producto en el estado estacionario. Adicionalmente, se supone que el gasto de gobierno tiene una desviación estándar de 0.00382 y un coeficiente de autocorrelación de 0.9. Los parámetros del modelo se muestran en la tabla 1.

Tabla 1

Parameter	Value
α	0.2716
β	0.9765
ξ	1.6855
η	0.67
g^l	0.0646
g^h	0.0722
ϕ^g	0.95
z^l	0.96
z^h	1.04
ϕ^z	0.91
σ	2

3.6.2 Funciones de Impulso Respuesta y Momentos

La figura 1 muestra las funciones de impulso respuesta ante un incremento de una desviación estándar en el shock a la productividad z_t . Los shocks a la productividad inducen movimientos en las horas de trabajo, el producto, el consumo y la tasa impositiva. El empleo, el

producto y el consumo crecen ante un shock positivo a la productividad. Por otro lado, el gobierno incrementa la tasa impositiva, ya que tiene que realizar pagos contingentes al resto del mundo en estados buenos para poder suavizar la utilidad marginal del consumo a través del tiempo y de los estados de la naturaleza. El superávit primario y el valor del portafolio de deuda del gobierno también crecen, ya que como se mencionó anteriormente, el gobierno realiza pagos contingentes al resto del mundo en estados en los que la productividad es alta. El incremento en la productividad mejora la balanza comercial, ya que el producto crece más que el consumo, y el gasto de gobierno permanece constante. Los agentes en la economía utilizan a la balanza comercial para suavizar su trayectoria de consumo a través del tiempo y de los estados de la naturaleza.

Figura 1

Figura 1. (Continuación)

La figura 2 muestra las funciones de impulso respuesta ante un incremento de una desviación estándar en el gasto de gobierno. Los cambios en el gasto de gobierno no afectan ni al trabajo, ni al consumo, ni al producto. El gobierno mantiene la tasa impositiva constante ante shocks en el gasto público, ya que financia cualquier incremento en el gasto mediante

deuda contingente en el estado de la naturaleza. El superávit primario y el valor del portafolio de deuda del gobierno decrecen, ya que el gobierno recibe pagos contingentes del resto del mundo en estados malos. Esto se debe a que el gobierno está completamente asegurado en contra de los shocks al gasto público a través de los mercados financieros internacionales. El incremento en el gasto de gobierno provoca un deterioro en la balanza comercial, ya que la economía la utiliza como un instrumento para suavizar los distintos shocks.

Figura 2

La tabla 2 muestra una serie de momentos de las principales variables del modelo. Como se puede ver en la tabla 2, el trabajo, el producto, el consumo y la tasa impositiva tienen un coeficiente de correlación con el gasto de gobierno igual a cero. La razón es que los shocks al gasto de gobierno tienen únicamente efectos riqueza en la economía, por lo que

los agentes pueden asegurarse completamente en contra de estos shocks debido a que tienen acceso a mercados financieros completos. Después de un shock positivo al gasto de gobierno, el déficit público crece y el valor del portafolio de deuda del gobierno decrece, por lo tanto, el gobierno financia su déficit mediante pagos contingentes provenientes del exterior. Cuando la economía tiene acceso a mercados completos, el gobierno construye un portafolio de deuda que lo asegura en contra de cambios no anticipados en el gasto de gobierno y en la base impositiva. El gobierno recibe pagos contingentes del exterior en estados en los que el gasto del gobierno es alto o la productividad es baja, y realiza pagos contingentes al exterior en estados de la naturaleza en los que el gasto de gobierno es bajo o la productividad es alta. Por otro lado, los shocks a la productividad afectan al trabajo, al producto, al consumo y a la tasa impositiva. Esto se debe a que los shocks a la productividad afectan al producto marginal del trabajo, por lo que los agentes trabajan más para aprovechar el incremento temporal en la productividad. Los procesos estocásticos que siguen el producto, el trabajo, el consumo y la tasa impositiva, heredan las propiedades estadísticas del shock a la productividad. En la tabla 2 se puede observar que los coeficientes de autocorrelación de estas variables son iguales al coeficiente de autocorrelación del shock a la productividad, y que todas estas variables están positivamente correlacionadas con el shock a la productividad. La balanza comercial y el valor del portafolio de deuda del gobierno están negativamente correlacionados con el gasto de gobierno, y positivamente correlacionados con la productividad y el producto. Esto se debe a que el gobierno financia los shocks al gasto de gobierno y las caídas en la base impositiva mediante pagos contingentes provenientes del exterior, y a que la balanza

comercial se utiliza como un instrumento para suavizar los distintos shocks.

Variable	Desv. Est. %	Autocorr.	Corr (x,z)	Corr (x,g)	Corr (x,y)
Productividad	4.00	0.82	1.00	0.00	0.99
Gasto Público	0.38	0.90	0.00	1.00	0.00
Tasa Imp.	0.10	0.82	0.99	0.00	0.99
Producto	1.07	0.82	0.99	0.00	1.00
Horas	0.32	0.82	0.99	0.00	1.00
Consumo	0.05	0.82	0.99	0.00	1.00
Deuda Pública	4.84	0.85	0.76	-0.65	0.76
Balanza Com.	31.10	0.82	0.99	-0.12	0.99

Tabla 2

4 Modelo con Mercados Incompletos

En esta sección se supone que los mercados son incompletos, ya que los agentes únicamente pueden comprar y emitir bonos no-contingentes de un periodo. En todos los otros aspectos, esta economía es igual a la descrita anteriormente para el caso de mercados completos.

4.1 Hogares

Las preferencias del agente representativo están representadas por la siguiente función de utilidad:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) U(c(s^t), h(s^t)) \quad (24)$$

La restricción presupuestal es igual a:

$$c(s^t) + a(s^{t-1}) + \psi(a(s^t)) \leq p(s^t) a(s^t) + (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (25)$$

donde $p(s^t)$ representa al precio en el periodo t de un bono que paga una unidad de consumo en cada estado del periodo $t + 1$. Esta variable es igual al inverso de la tasa de interés bruta $R(s^t)$.

$$R(s^t) = \frac{1}{p(s^t)}$$

$a(s^t)$ representa la cantidad de bonos emitidos por el agente representativo en el periodo t , condicional en la historia s^t , y la función $\psi(\cdot)$ representa un costo convexo de ajuste del portafolio de deuda.

Adicionalmente, el agente representativo esta sujeto a la siguiente condición de no-Ponzi:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^j p(s^{t+i}) a(s^{t+j}) \leq 0 \text{ para todo } t, s^t \quad (26)$$

Los supuestos de la función de utilidad aseguran que las restricciones (25) y (26) se satisfagan con igualdad. El problema del agente representativo consiste en escoger secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que maximicen (24) sujeto a (25) y (26) dados los procesos estocásticos $\{z(s^t), \tau(s^t), p(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, y la condición inicial a_{-1} . Las condiciones de primer orden del problema del agente representativo son (25), y (26) para todo t, s^t y:

$$-\frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} = (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f'(h(s^t)) \quad (27)$$

$$u_c(s^t) [p(s^t) - \psi'(a(s^t))] = \beta \sum_{s^{t+1}} u_c(s^{t+1}) \mu(s^{t+1} | s^t) \quad (28)$$

La condición de primer orden (27) muestra que la tasa impositiva introduce una brecha entre la tasa marginal de sustitución consumo-ocio y el producto marginal del trabajo. La condición de primer orden (28) es la ecuación de Euler. Esta ecuación muestra que en el

óptimo el beneficio marginal de emitir una unidad adicional de deuda debe ser igual a su costo marginal.

4.2 Gobierno

En cada periodo t , el gobierno emite bonos no-contingentes de un periodo $A(s^t)$, los cuales pagan una unidad de consumo en cada estado del periodo $t + 1$. La restricción presupuestal del gobierno es igual a:

$$g(s^t) + A(s^{t-1}) + \psi(A(s^t)) \leq p(s^t) A(s^t) + \tau(s^t) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (29)$$

donde $\psi(\cdot)$ representa un costo convexo de ajuste del portafolio de deuda del gobierno.

Adicionalmente, el gobierno esta sujeto a la siguiente restricción de no-Ponzi:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^j p(s^{t+i}) A(s^{t+j}) \leq 0 \text{ para todo } t, s^t \quad (30)$$

Un gobierno benevolente que busca maximizar la utilidad del agente representativo siempre va a escoger asignaciones tal que las restricciones (29) y (30) se satisfagan con igualdad.

Una política fiscal es un conjunto de secuencias contingentes para la tasa impositiva y para la deuda de gobierno $\{\tau(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.

4.3 Equilibrio Competitivo con Impuestos

Dadas las condiciones iniciales a_{-1} , A_{-1} , y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t), p(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, un equilibrio competitivo es un conjunto de secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, y una política fiscal $\{\tau(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfacen las siguientes condiciones para todo t, s^t

$$c(s^t) + a(s^{t-1}) + \psi(a(s^t)) = p(s^t) a(s^t) + (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (25)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^j p(s^{t+i}) a(s^{t+i}) = 0 \quad (26)$$

$$-\frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} = (1 - \tau(s^t)) z(s^t) f'(h(s^t)) \quad (27)$$

$$u_c(s^t) [p(s^t) - \psi'(a(s^t))] = \beta \sum_{s^{t+1}} u_c(s^{t+1}) \mu(s^{t+1} | s^t) \quad (28)$$

$$g(s^t) + A(s^{t-1}) + \psi(A(s^t)) = p(s^t) A(s^t) + \tau(s^t) z(s^t) f(h(s^t)) \quad (29)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^j p(s^{t+i}) A(s^{t+i}) = 0 \quad (30)$$

Dado que la economía es pequeña, $p(s^t)$ es exógeno. Se supone que $p(s^t)$ es constante e igual a β . Por lo tanto, la tasa de interés bruta $R(s^t)$ también es constante e igual a $1/\beta$. La deuda del agente representativo $a(s^t)$ más la deuda del gobierno $A(s^t)$ representan a la deuda externa de la economía en el periodo t . Si combinamos las restricciones presupuestales del agente representativo y del gobierno, obtenemos una expresión que describe la dinámica de la deuda externa de la economía.

$$p(s^t) [a(s^t) + A(s^t)] = A(s^{t-1}) + a(s^{t-1}) - TB(s^t) \quad (31)$$

donde $TB(s^t)$ representa a la balanza comercial de la economía.

$$TB(s^t) = z(s^t) f(h(s^t)) - c(s^t) - g(s^t) - \psi(a(s^t)) - \psi(A(s^t)) \quad (32)$$

4.3.1 Forma Primal

Proposición 5. Dadas las condiciones iniciales a_{-1} , A_{-1} , y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t), p(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, las secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (28)

$$p(s^t) a(s^t) - \frac{u_h(s^t) h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{1}{\eta} = c(s^t) + a(s^{t-1}) + \psi(a(s^t)) \quad (33)$$

$$p(s^t) [a(s^t) + A(s^t)] + z(s^t) f(h(s^t)) = A(s^{t-1}) + a(s^{t-1}) + c(s^t) + g(s^t) + \psi(a(s^t)) + \psi(A(s^t)) \quad (34)$$

si y sólo si satisfacen (25), (27), (28) y (29) ■

Demostración. Ver Apéndice. ■

4.4 Problema de Ramsey

El problema de Ramsey consiste en escoger secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que maximicen

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) U(c(s^t), h(s^t))$$

sujeto a:

$$u_c(s^t) [p(s^t) - \psi'(a(s^t))] = \beta \sum_{s^{t+1}} u_c(s^{t+1}) \mu(s^{t+1} | s^t) \quad (28)$$

$$p(s^t) a(s^t) - \frac{u_h(s^t) h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{1}{\eta} = c(s^t) + a(s^{t-1}) + \psi(a(s^t)) \quad (33)$$

$$p(s^t) [a(s^t) + A(s^t)] + z(s^t) f(h(s^t)) = A(s^{t-1}) + a(s^{t-1}) + c(s^t) + g(s^t) + \psi(a(s^t)) + \psi(A(s^t)) \quad (34)$$

Este problema no es recursivo, ya que la restricción (28) contiene una expectativa condicional. Por lo tanto, la ecuación de Bellman no se satisface, y las reglas de decisión óptimas en el periodo t no son funciones estacionarias de las variables de estado $\{g_t, z_t, a_{t-1}, A_{t-1}\}$, por lo que toda la historia de shocks puede ser relevante para las decisiones óptimas en t . Sin embargo, Marcet y Marimon (1998) muestran que cuando un problema no es recursivo, se puede obtener una representación recursiva mediante la construcción de un problema de punta silla equivalente. Este problema de punto silla expande el espacio de estado mediante la incorporación de nuevas variables de estado que resumen la dinámica de los multiplicadores de Lagrange del problema original. El primer paso para resolver el problema de Ramsey consiste en transformar el problema original en un problema de punto silla recursivo.

El Lagrangiano asociado a este problema es:

$$\Gamma = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) \left\{ \begin{array}{c} U(c(s^t), h(s^t)) + \vartheta(s^t) \\ \left[u_c(s^t) [p(s^t) - \psi'(a(s^t))] - \beta \sum_{s^{t+1}} u_c(s^{t+1}) \mu(s^{t+1} | s^t) \right] \end{array} \right\}$$

sujeto a (33) y (34), donde $\beta^t \mu(s^t) \vartheta(s^t)$ representa al multiplicador asociado a la restricción (28). Utilizando la ley de las expectativas iteradas y reagrupando términos, se puede demostrar que la función H , la cual se define como:

$$H = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \mu(s^t) \{ U(c(s^t), h(s^t)) + \vartheta(s^t) u_c(s^t) [p(s^t) - \psi'(a(s^t))] - \zeta(s^t) u_c(s^t) \} \quad (35)$$

$$\zeta(s^{t+1}) = \vartheta(s^t) \text{ for all } t \geq 0 \quad (36)$$

$$\zeta_0 = 0$$

es igual a Γ para todas las secuencias factibles.

Por lo tanto, cualquier solución al problema original de Ramsey también debe ser una solución al problema de maximizar (35) sujeto a (36), (33) y (34).

La variable $\zeta(s^t)$ es una variable de co-estado. En este problema de punto silla no aparecen variables futuras en las restricciones, y todas las funciones que aparecen en las restricciones son conocidas. Si incorporamos $\zeta(s^t)$ al espacio de estado, el problema se vuelve recursivo. Por lo tanto, las reglas de decisión óptimas son funciones estacionarias de las variables de estado

$$(c(s_t), h(s_t), a(s_t), A(s_t), \vartheta(s_t)) = \varsigma(a(s_{t-1}), A(s_{t-1}), \zeta(s_t), g(s_t), z(s_t))$$

para todo t , y $\zeta_0 = 0$, donde ς es una función estacionaria.

El Lagrangiano de este problema, después de sustituir $\zeta(s^t) = \vartheta(s^{t-1})$ en la función objetivo es:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{aligned} & U(c_t, h_t) + \vartheta_t u_c(t) [p - \psi'(a_t)] - \vartheta_{t-1} u_c(t) \\ & + \lambda_t \left[p a_t - \frac{u_h(t)}{u_c(t)} \frac{h_t}{\eta} - c_t - a_{t-1} - \psi(a_t) \right] \\ & + \phi_t [p(a_t + A_t) + z_t f(h_t) - A_{t-1} - a_{t-1} - c_t - g_t - \psi(a_t) - \psi(A_t)] \end{aligned} \right\}$$

donde $\beta^t \lambda_t$ y $\beta^t \phi_t$ son los multiplicadores asociados a las restricciones (33) y (34) respectivamente.

Las condiciones de primer orden son:

$$u_c(t) + \vartheta_t u_{cc}(t) [p - \psi'(a_t)] - \vartheta_{t-1} u_{cc}(t) = \lambda_t \left[1 + \frac{h_t}{u_c(t) \eta} \left(u_{ch}(t) - \frac{u_h(t) u_{cc}(t)}{u_c(t)} \right) \right] + \phi_t \quad (37)$$

$$u_h(t) + \vartheta_t u_{ch}(t) [p - \psi'(a_t)] - \vartheta_{t-1} u_{ch}(t) = \lambda_t \left[\frac{u_{hh}(t) h_t}{u_c(t) \eta} + \frac{u_h(t)}{u_c(t) \eta} \left(1 - \frac{h_t u_{ch}(t)}{u_c(t)} \right) \right] - \phi_t z_t f'(h_t) \quad (38)$$

$$-\vartheta_t u_c(t) \psi''(a_t) + (\lambda_t + \phi_t) [p - \psi'(a_t)] = \beta E_t (\lambda_{t+1} + \phi_{t+1}) \quad (39)$$

$$\phi_t [p - \psi'(A_t)] = \beta E_t (\phi_{t+1}) \quad (40)$$

$$u_c(t) [p - \psi'(a_t)] = \beta E_t (u_c(t+1)) \quad (41)$$

$$p a_t - \frac{u_h(t) h_t}{u_c(t) \eta} = c_t + a_{t-1} + \psi(a_t) \quad (33)$$

$$p[a_t + A_t] + z_t f(h_t) = A_{t-1} + a_{t-1} + c_t + g_t + \psi(a_t) + \psi(A_t) \quad (34)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p^{j+1} a_{t+j} = 0 \quad (42)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p^{j+1} A_{t+j} = 0 \quad (43)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p^{j+1} \vartheta_{t+j} = 0 \quad (44)$$

a_{-1} , A_{-1} están dados, y $\vartheta_{-1} = 0$

4.5 Propiedades Dinámicas de la Política Fiscal Óptima bajo Mercados Incompletos

En esta sección se realizan simulaciones para estudiar las propiedades del modelo bajo la política fiscal óptima con mercados incompletos. El metodo de solución del modelo consiste

en realizar una aproximación lineal alrededor del estado estacionario del problema de Ramsey. Se supone que las funciones de costos de ajuste del agente representativo y del gobierno son respectivamente:

$$\psi(a(s^t)) = \frac{\psi}{2}(a(s^t) - \bar{a})$$

$$\psi(A(s^t)) = \frac{\psi}{2}(A(s^t) - \bar{A})$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{A}$ son los valores de estado estacionario de la deuda del agente representativo y del gobierno respectivamente. El parámetro ψ se calibra de forma que los costos de ajuste sean mínimos y no afecten las propiedades de corto plazo del modelo. Por lo tanto, se le asigna a ψ el valor mínimo que garantice que la solución del modelo sea estacionaria. Para los otros parámetros se utiliza la misma calibración que para el modelo de mercados completos. Primero, se presentan las funciones de impulso respuesta del modelo, y posteriormente se presentan los momentos de las series simuladas.

4.5.1 Funciones de Impulso Respuesta y Momentos

La figura 3 muestra las funciones de impulso respuesta ante un incremento de una desviación estándar en el shock a la productividad, z_t . Todas las variables están expresadas en desviaciones porcentuales de sus valores de estado estacionario. Para una tasa impositiva dada, las horas trabajadas, el producto y el consumo crecen después de un shock positivo a la productividad. Dado que la tasa impositiva es distorsiva, el gobierno disminuye la tasa impositiva después de un shock positivo a la productividad. La disminución en la tasa incrementa los incentivos a trabajar, ya que crece el producto marginal neto. Por lo tanto, los agentes

sustituyen ocio por consumo, y como resultado el consumo y el producto crecen todavía más. Los ingresos tributarios también crecen, ya que aunque la tasa impositiva disminuye, la base tributaria crece significativamente. El superávit primario también crece, debido a que los ingresos tributarios crecen y a que el gasto de gobierno permanece constante. El gobierno utiliza los ingresos adicionales para pagar deuda. La función de impulso respuesta del déficit primario cambia de signo después de algunos periodos, debido a que se tendrán que pagar menos intereses por concepto de deuda en el futuro. Dado que el consumo responde menos que el producto, y que el gasto de gobierno permanece constante, la balanza comercial mejora al momento del shock. Sin embargo, ésta cambia de signo después de algunos periodos, ya que se tendrán que pagar menos intereses por concepto de deuda externa en el futuro. La deuda pública decrece después de un shock positivo a la productividad, mientras que bajo mercados completos el valor del portafolio de deuda crece después de un shock a la productividad. Cuando el gobierno no puede pedir prestado contingente en el estado de la naturaleza, éste utiliza a la deuda para suavizar las distorsiones impositivas a través del tiempo. En el largo plazo todas las variables regresan al estado estacionario.

Figura 3

Figura 3. (Continuación)

La figura 4 muestra las funciones de impulso respuesta ante un shock positivo de una desviación estándar al gasto de gobierno. Para una tasa impositiva dada, el consumo y las horas de trabajo no se ven afectadas por shocks al gasto de gobierno. Por lo tanto, el gobierno necesita financiar el incremento en el gasto mediante la combinación menos distorsiva entre tasas impositivas y deuda pública. Después de un shock positivo al gasto de gobierno, el

gobierno incrementa su deuda y la tasa impositiva. El incremento en la tasa impositiva es muy pequeño y persistente para pagar el incremento en la deuda gradualmente a través del tiempo. El superávit primario decrece al momento del shock, pero cambia de signo después de algunos periodos para pagar el servicio adicional de la deuda por concepto de intereses, y para evitar que la deuda crezca indefinidamente. Dado que los shocks al gasto de gobierno se financian con deuda y con impuestos distorsivos, estos shocks tienen efectos ingreso y sustitución en el consumo y en el ocio. El consumo decrece después de un shock positivo al gasto de gobierno, ya que estos shocks tienen efectos ingreso y sustitución negativos en el consumo. Para el ocio, el efecto sustitución es positivo, ya que un incremento en la tasa impositiva reduce los incentivos a trabajar, mientras que el efecto ingreso es negativo. Para la calibración considerada, el efecto sustitución domina, por lo que las horas de trabajo disminuyen. Debido a que la tecnología permanece constante, y a que el trabajo decrece, el producto también decrece. La balanza comercial se deteriora después del shock, ya que los agentes la utilizan para suavizar su consumo a través del tiempo. Sin embargo, la función de impulso respuesta de la balanza comercial cambia de signo después de un periodos, ya que en el futuro se tendrán que pagar más intereses por concepto de deuda externa. En el largo plazo todas las variables regresan al estado estacionario.

Figura 4

Figura 4. (Continuación)

La siguiente tabla muestra una serie de momentos de las principales variables bajo la política fiscal óptima con mercados incompletos. La tabla 3 reporta las volatilidades, correlaciones y autocorrelaciones de las variables macroeconómicas.

Variable	Desv. Est. %	Autocorr.	Corr (x,z)	Corr (x,g)	Corr (x,y)
Productividad	4.00	0.82	1.00	0.00	0.99
Gasto Público	0.38	0.90	0.00	1.00	-0.01
Tasa Imp.	0.99	0.82	-0.38	0.24	-0.41
Producto	6.91	0.60	0.99	-0.01	1.00
Horas	4.38	0.60	0.99	-0.02	0.99
Consumo	4.72	0.63	0.97	-0.02	0.98
Deuda Pública	14.33	0.93	-0.20	0.08	-0.22
Balanza Com.	2.42	0.60	0.94	-0.02	0.93

Tabla 3

La tabla 3 muestra una serie de propiedades interesantes:

1. La tasa impositiva y la deuda pública son muy persistentes. La razón es que el gobierno financia un incremento en el gasto de gobierno o una disminución en la base tributaria en parte mediante un incremento en la tasa impositiva y en parte mediante un incremento en la deuda pública. Con el fin de evitar una gran distorsión al momento del shock, el gobierno decide suavizar la distorsiones impositivas a través del tiempo mediante la emisión de deuda.
2. El gobierno suaviza las distorsiones impositivas a través del ciclo económico; la desviación estándar de la tasa impositiva es sólo 0.99%, la cual es menor que las desviaciones estándar de las otras variables endógenas de la economía. Adicionalmente, la deuda pública es la variable más volátil, ya que cuando el gobierno no puede emitir deuda contingente en el estado de la naturaleza, éste utiliza a la deuda pública para absorber los choques al gasto y a la base tributaria.

3. Las desviaciones estándar del producto, el consumo y del trabajo son mayores que en el caso de mercados completos. Los incrementos en las volatilidades de estas variables son costosos en términos de bienestar. Algunos estudios recientes muestran que los costos en términos de bienestar asociados a la volatilidad macroeconómica en países en desarrollo son considerables.
4. La deuda pública está negativamente correlacionada con el producto y la productividad, y positivamente correlacionada con el gasto público. Por el contrario, cuando los agentes tienen acceso a mercados completos, el valor del portafolio de deuda del gobierno está positivamente correlacionado con la productividad y el producto, y negativamente correlacionado con el gasto de gobierno. En una economía con mercados incompletos, el valor de mercado del stock de deuda es completamente independiente de la realización del estado de la naturaleza. Por lo tanto, el gobierno necesita ajustar la tasa impositiva y la deuda pública ante un shock al gasto público o a la base tributaria.
5. La tasa impositiva está positivamente correlacionada con el gasto de gobierno, mientras que el consumo, el trabajo y el producto están negativamente correlacionados con el gasto de gobierno. Por el contrario, en el caso de mercados completos, el consumo, el producto, el trabajo y la tasa impositiva no están correlacionadas con el gasto público, ya que el gobierno se asegura completamente en contra de los shocks al gasto mediante la emisión de deuda contingente en el estado de la naturaleza.

5 Conclusiones

En este artículo se caracterizó la política fiscal óptima en una economía pequeña y abierta bajo mercados completos e incompletos. Se demostró que cuando el gobierno sigue una política fiscal óptima, y los agentes tienen acceso a mercados completos, el portafolio de deuda del gobierno es una función estacionaria de los shocks que impactan a la economía. Por lo tanto, el valor del portafolio de deuda del gobierno hereda las propiedades estadísticas de los choques. Adicionalmente, el valor del portafolio de deuda del gobierno está negativamente correlacionado con el gasto público, y positivamente correlacionado con la productividad y el producto. El gobierno financia todos los choques al gasto público mediante la emisión de deuda contingente en el estado de la naturaleza.

Por el contrario, si los agentes únicamente pueden emitir bonos de un periodo libres de riesgo, la deuda pública es más persistente que las otras variables de la economía. Adicionalmente, la deuda pública está negativamente correlacionada con la productividad y el producto, y positivamente correlacionada con el gasto público, ya que el gobierno la utiliza como un instrumento para suavizar las distorsiones impositivas a través del tiempo. Por otro lado, la tasa impositiva está positivamente correlacionada con el gasto de gobierno, y negativamente correlacionada con la productividad y el producto. Además, debido a que la deuda no-contingente no es tan buena como la deuda contingente para suavizar las distorsiones, las volatilidades del consumo y del trabajo crecen respecto al caso de mercados completos.

Por lo tanto, desde un punto de vista de política económica, el artículo muestra la impor-

tancia de expandir el menú de activos financieros disponibles para los países en desarrollo, ya que diversos autores como Angeletos (2002) y Buera and Nicolini (2004) han demostrado que el gobierno puede utilizar la estructura temporal de la deuda no-contingente para replicar la asignación de mercados completos siempre y cuando tenga acceso a una estructura temporal de deuda lo suficientemente amplia.

6 Bibliografía

1. Aiyagari, S. Rao., A. Marcet, T.J. Sargent, and J. Seppala. “Optimal Taxation without State-Contingent Debt” *Journal of Political Economy* (2002) Vol 110 (6), pp 1220-1254.
2. Angeletos, G.M., “Fiscal Policy with Non-Contingent Debt and the Optimal Maturity Structure” *Quarterly Journal of Economics*, 117 (2002), 3 1105-31.
3. Barro, Robert J. “On the determination of public debt” *Journal of Political Economy* (1979) , Vol 87, pp. 940-971.
4. Bohn, Henning, “Tax Smoothing with Financial Instruments” *American Economic Review*, December, (1990), pp. 1217-1230.
5. Buera, Fransisco, and J.P. Nicolini. “Optimal Maturity of Government Debt without State Contingent Bonds” *Journal of Monetary Economics* (2004), 51, 531-554.
6. Chari, V.V., Lawrence J. Christiano, and Patrick J. Kehoe. “Optimal Fiscal Policy in a Business Cycle Model”. *Journal of Political Economy* (1994) Vol 102, No 4 (1994), 617-652.

7. Chari, V.V., Lawrence J. Christiano, and Patrick J. Kehoe (1995). "Policy Analysis in Business Cycle Models" In Thomas Cooley (ed), *Frontiers of Business Cycle Research* Princeton University Press: Princeton, New Jersey.
8. Chari, V.V. and Patrick J. Kehoe (1999). "Optimal Fiscal and Monetary Policy", *Handbook of Macroeconomics*, vol. III, edited by J. Taylor and M. Woodford, 1999.
9. Correia, Isabel., Neves, Joao C., Rebelo, Sergio. "Business Cycles in a small open economy" *European Economic Review* 39 (1995) 1089-1113.
10. Lane, P.R. and G.M. Milesi-Ferretti. "The external wealth of nations: measures of foreign assets and liabilities for industrial and developing countries" *Journal of International Economics* 55 (2001), 263-294.
11. Lucas, Robert E. Jr. and Nancy L. Stokey (1983). "Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital". *Journal of Monetary Economics*, Vol 12, pp. 55-93.
12. Marcet, A., and R. Marimon, "Recursive Contracts". *Universitat Pompeu Fabra, Barcelona* (1998), Mimeo.
13. Marcet, A, and A, Scott. "Debt Fluctuations and the Structure of Bond Markets" *Universitat Pompeu Fabra*, (2000), Mimeo.
14. Mendoza, Enrique "Real Business Cycles in a Small Open Economy" *American Economic Review* (1991), vol 81, 797-818.
15. Neumeyer, PA., Perri,F. "Business cycles in emerging economies: the role of interest rates" *Journal of Monetary Economics* Volume 52, Issue 2 March 2005 345-380.
16. Riascos, Alvaro and Carlos A. Vegh. "Procyclical Fiscal Policy in Developing

Countries: The Role of Capital Market Imperfections” UCLA and Banco de la Republica, Colombia (2004), Mimeo.

17. Schmitt-Grohé, Stephanie and M. Uribe. (2003a) “Closing small open economy models” *Journal of International Economics* 61 163-185.

18. Schmitt-Grohé, Stephanie and M. Uribe. (2003b) “Anticipated Ramsey Reform and the Uniform Taxation Principle: The Role of International Financial Markets”, *European Central Bank Working Paper* 210.

19. Schmitt-Grohé, Stephanie and M. Uribe. “Optimal Fiscal and Monetary Policy Under Sticky Prices” *Journal of Economic Theory* (2004), vol 114, 198-230.

20. Siu, H. “Optimal Fiscal and Monetary Policy with Sticky Prices” *Journal of Monetary Economics* (2004), vol 51, 575-607.

21. Talvi, Ernesto, and Carlos A. Vegh, “Tax Base Variability and Procyclical Fiscal Policy” *Journal of Development Economics* (2005), forthcoming.

7 Apéndice

Proposición 1. Dada la condición inicial b_{-1} , el parámetro ξ y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, las secuencias contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen

$$u_c(s^t) = \xi \quad (18)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \left\{ \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} + z(s^t) f(h(s^t)) - g(s^t) \right\} \mu(s^t) = b_{-1} \quad (23)$$

si y sólo si satisfacen (15), (16), (17), (18) and (19) ■

Demostración. Primero, se demuestra que si los planes contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (15), (16), (17), (18) y (19), entonces también satisfacen (18) y (23). Para demostrar esto, se despeja el precio Arrow-Debreu de la ecuación (19), y la tasa impositiva de la ecuación (16). Después, se sustituyen las expresiones para $Q(s^t)$ y $\tau(s^t)$ en la ecuación (17), la cual es la restricción presupuestal intertemporal del gobierno. Finalmente, se reagrupan términos para obtener la ecuación (23). Segundo, se demuestra que si los planes contingentes $\{c(s^t), h(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (18) y (23), entonces también satisfacen (15), (16), (17), (18) y (19). Para demostrar esto, se construye $Q(s^t)$ de tal forma que (19) se satisfaga, $\tau(s^t)$ se construye de tal forma que (16) se satisfaga, y λ se construye tal que (15) se satisfaga. Por lo tanto, (15), (16) y (19) se satisfacen por construcción. Finalmente, sustituyendo las secuencias $\{Q(s^t), \tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ en la ecuación (23), y reagrupando términos, obtenemos la ecuación (17) ■

Proposición 2. Si los procesos estocásticos $s = (z, g)$ son Markov, entonces existen funciones c, h y τ tal que las asignaciones del planificador de Ramsey para el consumo, el trabajo y la tasa impositiva son funciones estacionarias únicamente del shock a la productividad.

$$c(s^t) = c(z_t), h(s^t) = h(z_t), \tau(s^t) = \tau(z_t) \quad \blacksquare$$

Demostración. Primero, se supone que z_t y g_t son dos procesos independientes de Markov. Adicionalmente, se supone que z_t puede tomar los valores z^h y z^l , y que g_t puede tomar los valores g^h y g^l . Sea $\phi^z = \text{Prob}(z_{t+1} = z^i \mid z_t = z^i)$ y $\phi^g = \text{Prob}(g_{t+1} = g^i \mid g_t = g^i)$ para $i = h, l$. Por lo tanto, todos los posibles estados de la economía están representados por el siguiente vector S de 4×1 :

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z^h, g^h) \\ (z^l, g^h) \\ (z^h, g^l) \\ (z^l, g^l) \end{bmatrix}$$

Sea Φ la matriz de transición del vector de estado S

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^z \phi^g & (1 - \phi^z) \phi^g & \phi^z (1 - \phi^g) & (1 - \phi^z) (1 - \phi^g) \\ (1 - \phi^z) \phi^g & \phi^z \phi^g & (1 - \phi^z) (1 - \phi^g) & \phi^z (1 - \phi^g) \\ \phi^z (1 - \phi^g) & (1 - \phi^z) (1 - \phi^g) & \phi^z \phi^g & (1 - \phi^z) \phi^g \\ (1 - \phi^z) (1 - \phi^g) & \phi^z (1 - \phi^g) & (1 - \phi^z) \phi^g & \phi^z \phi^g \end{bmatrix}$$

Segundo, se escoge un estado inicial $s_0 = (z_0, g_0)$. Tercero, se propone un valor para γ , existe un valor de equilibrio de γ para cada estado inicial posible.

Cuarto, en cada periodo $t \geq 0$, dado un valor de γ y la realización del estado de la economía s_i , las ecuaciones (20) – (22) forman un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto numéricamente para c, h y Ω como funciones de γ y de z_i . El gasto de gobierno g_t únicamente aparece en la condición de implementabilidad intertemporal, pero no en la ecuaciones (20) – (22). Por lo tanto, la realización del shock al gasto de gobierno en t no afecta a la asignación en t . Debido a que z_i sólo puede tomar dos valores dado γ , las variables c, h y Ω solo pueden tomar dos valores. Por lo tanto, para $t \geq 0$ y para un valor dado de γ , la solución al problema de Ramsey se puede escribir como $c(\gamma, z^i)$, $h(\gamma, z^i)$ y $\Omega(\gamma, z^i)$. Quinto, después de calcular los valores de c, h y Ω para cada posible estado y periodo dado el valor de γ , se verifica si el valor propuesto para γ es el correcto, para lo cual se evalúa la condición de implementabilidad intertemporal (23). Para cada $t \geq 0$ la expresión $\frac{u_h(c(\gamma, z^i), h(\gamma, z^i))}{u_c(c(\gamma, z^i), h(\gamma, z^i))} \frac{h(\gamma, z^i)}{\eta} + z^i f(h(\gamma, z^i)) - g^i$ del lado izquierdo de la condición de implementabilidad intertemporal se puede escribir como $x(\gamma, s_i)$. Se define el vector $x(\gamma)$ de la siguiente forma:

$$x(\gamma) = \begin{bmatrix} x(\gamma, s_1) \\ x(\gamma, s_2) \\ x(\gamma, s_3) \\ x(\gamma, s_4) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de (23), el cual se denota por $X(\gamma, s_0)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$X(\gamma, s_0) = x_0(\gamma, s_0) + \beta \Phi(s_0)(I - \beta \Phi)^{-1} x(\gamma)$$

donde $\Phi(s_0)$ representa a la fila de la matriz de transición Φ correspondiente al estado inicial s_0 , y $x_0(\gamma, s_0)$ es el valor de $x(\gamma, s_i)$ en el estado inicial s_0 . El lado derecho de (23) es igual a b_{-1} . Finalmente, se calcula la diferencia $y(\gamma, s_0) = X(\gamma, s_0) - b_{-1}$. Esta es una ecuación no lineal, la cual se puede resolver numéricamente. Necesitamos encontrar un valor para γ tal que $y(\gamma, s_0) = 0$. Este procedimiento nos da el valor de equilibrio de γ , así como los valores de equilibrio de c, h y Ω para un estado inicial dado s_0 . Además, de la ecuación (16) se obtiene que si c y h son funciones estacionarias únicamente del shock a la productividad, entonces la tasa impositiva también es una función estacionaria del shock a la productividad. ■

Proposición 5. Dadas las condiciones iniciales a_{-1} , A_{-1} , y los procesos estocásticos $\{g(s^t), z(s^t), p(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, los planes contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (28)

$$p(s^t) a(s^t) - \frac{u_h(s^t)}{u_c(s^t)} \frac{h(s^t)}{\eta} = c(s^t) + a(s^{t-1}) + \psi(a(s^t)) \quad (33)$$

$$p(s^t) [a(s^t) + A(s^t)] + z(s^t) f(h(s^t)) = A(s^{t-1}) + a(s^{t-1}) + c(s^t) + g(s^t) + \psi(a(s^t)) + \psi(A(s^t)) \quad (34)$$

si y sólo si satisfacen (25), (27), (28) y (29) ■

Demostración. Primero, se demuestra que si los planes contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (25), (27), (28) y (29), entonces también satisfacen (28), (33) y (34). Para demostrar esto, se despeja $\tau(s^t)$ de la ecuación (27) y se sustituye esta expresión en la ecuación (25),

reagrupando términos obtenemos la ecuación (33). Segundo, para obtener la ecuación (34), se combinan las ecuaciones (25) y (29). Posteriormente, se demuestra que si los planes contingentes $\{c(s^t), h(s^t), a(s^t), A(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ satisfacen (28), (33) y (34), entonces también satisfacen (25), (27), (28) y (29). Para demostrar esto, se construye $\tau(s^t)$ de la ecuación (27). Por lo tanto, la ecuación (27) se satisface por construcción. Segundo, se sustituye la secuencia contingente $\{\tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ en la ecuación (33), y se reagrupan términos para obtener la ecuación (25). Finalmente, se obtiene la ecuación (29) combinando (33) y (34), y sustituyendo $\{\tau(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ en la expresión resultante. ■