Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2006-12

**Cointegración Espuria: La Prueba de Engle-Granger
bajo la Presencia de Cambios Estructurales**

Antonio E. Noriega
Banco de México, Universidad de Guanajuato

Daniel Ventosa-Santaulària
Universidad de Guanajuato

Diciembre 2006

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Cointegración Espuria: La Prueba de Engle-Granger bajo la Presencia de Cambios Estructurales

Antonio E. Noriega[†]
Banco de México, Universidad de Guanajuato

Daniel Ventosa-Santaulària[‡]
Universidad de Guanajuato

Resumen

Este documento analiza el comportamiento asintótico de la prueba t de Engle-Granger para cointegración, cuando los datos incluyen cambios estructurales, en vez de ser procesos $I(1)$ puros. Encontramos que la prueba no posee una distribución límite, sino que diverge cuando la muestra tiende a infinito. Cálculos que involucran la expresión asintótica de la prueba t , así como simulaciones Monte Carlo, revelan que la prueba puede divergir en ambas direcciones (hacia más, o menos infinito), haciéndola poco confiable como una prueba de cointegración, cuando existen cambios estructurales en la función de tendencia de los datos. Usando datos reales sobre ventas de vehículos y número de asesinatos en los Estados Unidos, se presenta un ejemplo empírico de los resultados teóricos.

Palabras Clave: Cointegración espuria, cambios estructurales, procesos integrados.

Abstract

This paper analyses the asymptotic behavior of the Engle-Granger t -test for cointegration when the data include structural breaks, instead of being pure $I(1)$ processes. We find that the test does not possess a limiting distribution, but diverges as the sample size tends to infinity. Calculations involving the asymptotic expression of the t -test, as well as Monte Carlo simulations, reveal that the test can diverge in either direction, making it unreliable as a test for cointegration, when there are neglected breaks in the trend function of the data. Using real data on car sales and murders in the US, we present an empirical illustration of the theoretical results.

Keywords: Spurious cointegration, structural breaks, integrated processes.

JEL Classification: C12, C13, C22.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: anoriega@banxico.org.mx.

[‡] Escuela de Economía. Email: daniel@ventosa-santaularia.com.

1. Introducción

Desde la contribución seminal de Engle y Granger (1987), muchas teorías económicas que involucran relaciones de largo plazo se han analizado a través del concepto y las técnicas de cointegración. Estas teorías incluyen relaciones de demanda de dinero, funciones de consumo, la hipótesis no sesgada de mercados forward, la paridad de poder de compra, etc.¹ La idea básica es que si bien las series de tiempo económicas podrían deambular de una manera no estacionaria, existe la posibilidad de que una combinación lineal de ellas pudiera ser estacionaria. Si esto es el caso, entonces debería de haber una relación de equilibrio de largo plazo que atara a las variables individuales juntas: esto es lo que Engle y Granger (1987) llaman cointegración.

Supongamos que estamos interesados en probar si dos series de tiempo, x_t y y_t , están cointegradas. Un requisito preliminar para la cointegración es que cada serie sea individualmente $I(1)$ no estacionaria, es decir, cada una tiene una raíz unitaria. Si este es el caso, la cointegración entre ellas implicaría que una combinación lineal será estacionaria, es decir $I(0)$. La prueba de Engle-Granger (EG) se hace en dos etapas. La primera etapa involucra la siguiente regresión estática de MCO (Mínimos Cuadrados Ordinarios):

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\delta}x_t + \hat{u}_t \quad (1)$$

la cual captura cualquier relación potencial de largo plazo entre las variables. En la segunda etapa los residuales, $\hat{u}_t$, son usados en la siguiente regresión de Dickey-Fuller (DF):

$$\Delta\hat{u}_t = \hat{\gamma}\hat{u}_{t-1} + \hat{\eta}_t \quad (2)$$

Si no podemos rechazar la hipótesis $\gamma = 0$ entonces habrá una raíz unitaria en los residuales, y por lo tanto, las series x_t y y_t no estarán cointegradas. Por otro lado, cuando el estadístico t , el cual se usa para probar la hipótesis que $\gamma = 0$ ($t_{\hat{\gamma}}$), es menor que el correspondiente valor crítico, los residuales serán estacionarios, indicando así cointegración entre y_t y x_t .²

Como se argumentó anteriormente, la prueba t de EG tipo DF para cointegración basada en residuales supone que ambas variables tienen una raíz unitaria. En un documento relacionado, Gonzalo y Lee (1998) estudian la robustez de esta prueba cuando las variables se desvían de procesos $I(1)$ puros. En particular, encuentran que la prueba es robusta (i.e. casi no sufre de problemas de

¹Vea por ejemplo Maddala y Kim (1998), y Enders (2004).

²Los valores críticos para esta prueba pueden ser encontrados en Phillips y Ouliaris (1990) y MacKinnon (1991).

nivel) a las siguientes especificaciones incorrectas: (a) raíces AR mayores a la unidad; (b) raíces AR estocásticas; (c) procesos $I(2)$, y (d) procesos $I(1)$ con tendencias lineales deterministas.

Este documento extiende los resultados de Gonzalo y Lee (1998) al estudiar la robustez de la prueba de cointegración EG a no linealidades en la función de la tendencia determinista de los procesos generadores de y_t y x_t en el modelo (1). La relevancia de este análisis se deriva de la bien conocida dificultad en distinguir procesos $I(1)$ puros de modelos estacionarios de tendencia lineal con cambios estructurales.³ En particular, mostramos que cuando y_t y x_t en el modelo (1) son generadas de manera independiente, el estadístico de prueba EG divergirá, si las variables siguen tendencias lineales con cambios estructurales. Esto ocurre bajo estructuras $I(0)$ e $I(1)$ para y_t y x_t . Una implicación directa de estos resultados es que, si la divergencia es hacia menos infinito, la hipótesis nula de no cointegración será rechazada espuriamente, y esta distorsión de nivel se incrementará con el tamaño de muestra, aproximándose a uno asintóticamente.

Usando argumentos asintóticos, la sección 2 muestra que el cociente t EG-DF no posee una distribución límite a medida que el tamaño de muestra crece. Debido a que la distribución asintótica normalizada del estadístico t no es pivotal, la dirección de la divergencia no puede ser determinada analíticamente. Para arrojar luz sobre el comportamiento del estadístico de prueba en muestras finitas, la sección 3 presenta los resultados de los experimentos de simulación, los cuales muestran que la divergencia puede realmente ocurrir en cualquier dirección. La sección 4 presenta una ilustración empírica de los resultados, al hacer pruebas de cointegración entre asesinatos y ventas de autos en los Estados Unidos, dos variables que, **de manera a priori**, no deberían de llevar una relación de largo plazo. La última sección concluye.

2. Cambios estructurales y la prueba de Engle-Granger

La complicación con la prueba EG, como de hecho con muchas otras pruebas de cointegración, es el problema de pre-prueba, el cual surge al tener que identificar el orden de integración de las variables.⁴

Dada la bien conocida dificultad en diferenciar modelos estacionarios en tendencia quebrada de procesos $I(1)$, examinamos las propiedades asintóticas y de muestra finita de la prueba EG en la presencia de cambios estructurales para series independientes. Encontramos que cuando el *PGD* (Proceso Generador de Datos) de al menos una de las variables incluye cambios estructurales, la prueba EG no posee una distribución límite, sino diverge asintóticamente con

³Perron (1989, 1997) ha demostrado que cambios en la función de tendencia sesgan las pruebas de raíz unitarias hacia el no rechazo.

⁴Por ejemplo, Elliot (1995) encuentra sobrerrechazos de la nula de no cointegración debido a una raíz cercana pero menor a uno en la representación autoregresiva de las variables individuales. Usando simulaciones, Kellard (2006) también encuentra que la prueba de Engle-Granger tiende a encontrar cointegración espuria sustancial cuando evalúa la eficiencia de mercado.

probabilidad que se aproxima a uno.

Estudiamos el comportamiento asintótico y de muestra finita de la prueba EG bajo cuatro diferentes procesos generadores de datos, ampliamente usados en investigación aplicada en economía. El siguiente supuesto resume los procesos generadores de datos considerados a continuación para las variables dependiente y explicativa en el modelo (1).

SUPUESTO. Los *PGD* para $z_t = y_t, x_t$ son los siguientes.

	<i>PGD</i>	Modelo
1	$EM+ce$	$z_t = \mu_z + \sum_{i=1}^{N_z} \theta_{iz} DU_{izt} + u_{zt}$
2	$ET+ce$	$z_t = \mu_z + \sum_{i=1}^{N_z} \theta_{iz} DU_{izt} + \beta_z t + \sum_{i=1}^{M_z} \gamma_{iz} DT_{izt} + u_{zt}$
3	$I(1)$	$z_t = \mu_z + \beta_z t + S_{zt}$
4	$I(1)+ce$	$z_t = \mu_z + \beta_z t + \sum_{i=1}^{N_z} \gamma_{iz} DT_{izt} + S_{zt}$

donde *EM*, *ET*, y *ce* significan Estacionario en Media, Estacionario en Tendencia, y cambio estructural, respectivamente, $S_{zt} = \sum_{i=1}^t u_{zi}$, y las innovaciones u_{zt} obedecen el Supuesto 1 en Phillips (1986, p. 313). $DT_{izt} = \sum_{i=1}^t DU_{izt}$, DU_{izt} , DT_{izt} son variables *dummy* que permiten cambios en el nivel y pendiente de la tendencia, respectivamente, es decir, $DU_{izt} = \mathbf{1}(t > T_{b_{iz}})$ y $DT_{izt} = (t - T_{b_{iz}})\mathbf{1}(t > T_{b_{iz}})$, donde $\mathbf{1}(\cdot)$ es la función indicadora, y $T_{b_{iz}}$ es la fecha desconocida del i -ésimo cambio estructural en z .

Los *PGD* incluyen mecanismos de tendencia determinista así como estocástica, con 16 posibles combinaciones de ellos entre las variables explicativa y dependiente. Estas combinaciones tienen importancia práctica, dada la relevancia empírica de los cambios estructurales en las propiedades de series de tiempo de muchas variables macro. El *PGD* 1 es usado para modelar variables estacionarias en media, tales como tipos de cambio real, tasas de desempleo, inflación, grandes cocientes (i.e. cociente producción-capital), y la cuenta corriente. Los *PGD* 2–4 son ampliamente usados para modelar variables crecientes, reales y nominales, como producción, consumo, dinero, precios, etc. El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA. *Permitamos que y_t y x_t sean generadas de manera independiente de acuerdo a cualquier combinación de los *PGD* en el Supuesto (excepto por el caso cuando ambas y_t y x_t son generadas por el *PGD* 3). Si los residuales estimados de (1) son usados en el modelo de regresión (2), entonces, a medida que el tamaño de muestra $T \rightarrow \infty$,*

$$t_{\hat{\gamma}} = O_p(T^{1/2})$$

Comprobación del Teorema.

Presentamos la comprobación de cómo obtener el orden de probabilidad de una combinación de *PGD*, particular, la combinación 2-2, para la cual $z_t = \mu_z + \sum_{i=1}^{N_z} \theta_{iz} DU_{izt} + \beta_z t + \sum_{i=1}^{M_z} \gamma_{iz} DT_{izt} + u_{zt}$, para $z = y, x$. Los órdenes de probabilidad para el resto de los casos siguen los mismos pasos. Todas las sumas van de $t = 1$ a T . El estimador de MCO de γ en (2) es:

$$\hat{\gamma} = (\sum \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}) (\sum \hat{u}_{t-1}^2)^{-1}$$

donde $\sum \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = \sum \Delta y_t y_{t-1} - \hat{\alpha} \sum \Delta y_t - \hat{\delta} \sum \Delta y_t x_{t-1} - \hat{\delta} \sum \Delta x_t y_{t-1} + \hat{\alpha} \hat{\delta} \sum \Delta x_t + \hat{\delta}^2 \sum \Delta x_t x_{t-1}$.

De un cálculo directo, y usando el hecho de que, para (1), $\hat{\alpha} = O_p(T)$, $\hat{\delta} = O_p(1)$, $\sum \hat{u}_{t-1}^2 = O_p(T^3)$ (vea Noriega y Ventosa-Santaulària (2006)), es simple mostrar que cada elemento de $\sum \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}$ es $O_p(T^2)$.

Por lo tanto,

$$\hat{\gamma} = \frac{O_p(T^2)}{O_p(T^3)},$$

lo cual implica que $T\hat{\gamma} = O_p(1)$.

Ahora se definen los residuales $\hat{\eta}_t$ de (2) como:

$$\hat{\eta}_t = \Delta \hat{u}_t - \hat{\gamma} \hat{u}_{t-1}.$$

La varianza estimada es:

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = T^{-1} \left[\sum (\Delta \hat{u}_t)^2 + \hat{\gamma}^2 \sum \hat{u}_{t-1}^2 - 2\hat{\gamma} \sum \Delta \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} \right],$$

donde, nuevamente, cálculos directos indican que

$$\sum (\Delta \hat{u}_t)^2 = \sum (\Delta y_t - \hat{\delta} \Delta x_t)^2 = O_p(T).$$

Así pues,

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = T^{-1} \left[O_p(T) + (T\hat{\gamma})^2 T^{-2} O_p(T^3) - 2(T\hat{\gamma}) T^{-1} O_p(T^2) \right] = O_p(1).$$

Finalmente, el estadístico $t_{\hat{\gamma}}$ puede ser escrito como:

$$T\hat{\gamma} \left[\hat{\sigma}_\eta^2 T^3 (\sum \hat{u}_{t-1}^2)^{-1} \right]^{-1/2} = T^{-1/2} t_{\hat{\gamma}} = O_p(1),$$

lo cual prueba el Teorema para los *PGD* 2 – 2.

El resultado muestra que el estadístico t diverge a tasa $\sqrt{T}$, si hay cambios estructurales en ambas variables, o solamente en una de ellas.⁵ Cuando y_t y x_t son generadas de manera independiente de acuerdo al *PGD* 3 en el Supuesto, no es difícil mostrar que $t_{\hat{\gamma}} = O_p(1)$, es decir, el estadístico t no diverge.

Dado que la prueba de cointegración de Engle-Granger es una prueba de cola izquierda, el resultado anterior no es suficiente para establecer la presencia de cointegración espuria; para ello el estadístico t tiene que divergir a menos infinito, debido a que la divergencia en la dirección opuesta implicaría asintóticamente no rechazo. La divergencia hacia menos infinito representa un peligro, como es definido por Gonzalo y Lee (1998), ya que, en este caso, el nivel de la

⁵ Una especificación incorrecta extrema ocurriría si el investigador considerara erróneamente que las variables dependiente y explicativa fueran ambas $I(1)$, cuando de hecho son estacionarias alrededor de una tendencia lineal con cambios estructurales. En este evento improbable, puede ser mostrado que el estadístico t también divergiría, es decir $t_{\hat{\gamma}} = O_p(T^{1/2})$.

prueba se aproxima asintóticamente a uno (ellos le llaman a esto el peligro de “nivel”).

Ahora, la expresión límite de este estadístico depende de un número de parámetros desconocidos en el *PGD* (tendencias, localización y tamaño de cambios estructurales, entre otros), lo cual hace difícil establecer la dirección de divergencia. Para evaluar numéricamente la dirección de divergencia, algunos ejercicios fueron realizados para un amplio rango de valores de parámetro y combinaciones de *PGD*, usando la expresión asintótica del estadístico t (normalizada por $T^{1/2}$), y una muestra de tamaño $T = 400,000$. Los resultados muestran que el estadístico t normalizado puede asumir valores positivos y negativos, dependiendo de los valores de parámetro y combinaciones de *PGD*.

Para aprender analizar la dirección de divergencia del estadístico t en muestras finitas, la siguiente sección presenta los resultados de un experimento pequeño de Monte Carlo, cuyo diseño permite distintas combinaciones de valores de parámetros. Nuevamente, los resultados muestran que, dependiendo de la combinación, la divergencia ocurre en cualquier dirección.

3. Resultados de la simulación

Los resultados de la sección previa implican que el uso de la prueba EG de cointegración conduce a una inferencia correcta cuando la divergencia es hacia infinito, debido a que las variables en el *PGD* son independientes entre ellas. Sin embargo, la inferencia podría ser engañosa si la divergencia fuera hacia menos infinito, debido a que esto conduciría al practicante a rechazar espuriamente la nula de no cointegración. Dada la dificultad en evaluar analíticamente la dirección de divergencia, esta sección estudia el comportamiento en muestras finitas del estadístico de prueba bajo diferentes conjuntos de valores de parámetros.

Simulamos cuatro combinaciones de los *PGD* presentados anteriormente, y generamos gráficas del estadístico t de la prueba EG, el cual revela su comportamiento bajo diferentes valores de parámetros y tamaños de muestra. El Cuadro 1 presenta las combinaciones usadas para las simulaciones. Por ejemplo, la combinación 3–2 involucra correr una regresión de un proceso de raíz unitaria con constante contra un modelo *ET* con un cambio estructural en el nivel y en la pendiente de la tendencia. Los valores de los parámetros estuvieron inspirados en los datos reales de Perron y Zhu (2005), que estudian series históricas de PIB real per cápita para economías industrializadas.

Cuadro 1.

<i>PGD</i>	3 - 2	3 - 1	2 - 2	2 - 4
μ_y	0.7	0.7	0.7	0.7
μ_x	0.4	0.4	0.4	0.4
β_y	0.04	0.04	0.04	0.04
β_x	$[-0.01, 0.1]$		$[-0.01, 0.1]$	0.07
θ_y			0.04	0.04
θ_x	0.07	$[-0.1, 0.1]$	0.07	0.07
γ_y			$[-0.05, 0.05]$	0.07
γ_x	$[-0.05, 0.05]$		0.02	0.02
λ_y		0.3	0.3	$[0, 1]$
λ_x	0.7	$[0, 1]$	0.7	$[0, 1]$
ρ_y	0	0.7	0	0
ρ_x	0.7	0.7	0	0

La Gráfica 1 muestra el comportamiento del estadístico t para probar la nula de no cointegración para cada una de las cuatro combinaciones de los *PGD* descritos en el Cuadro 1 y una muestra de tamaño $T = 100$. Las Gráficas 1a, 1b, 1c, y 1d corresponden a las combinaciones 3 - 2, 3 - 1, 2 - 2, and 2 - 4, respectivamente. La Gráfica 2 exhibe los resultados para $T = 500$. Las gráficas muestran que el estadístico t solamente toma valores negativos⁶. Esto implica que la posibilidad de divergencia hacia menos infinito no puede ser descartada. Consecuentemente, la posibilidad de cointegración espuria entre series independientes con cambios estructurales prevalece en muestras finitas, y parece crecer con el tamaño de muestra.

⁶Note, sin embargo, que el estadístico t no siempre es menor que los valores críticos al nivel de, digamos, 1 %, es decir, -4.008 ($T = 100$) y -3.92 ($T = 500$).

Gráfica 1: Gráficas de $t_{\hat{\gamma}}$. Valores de parámetros tomados del Cuadro 1.
 $T = 100$

Gráfica 2: Gráficas de $t_{\hat{\gamma}}$. Valores de parámetros tomados del Cuadro 1.
 $T = 500$

De las gráficas 1d y 2d es interesante notar que el valor del estadístico t está uniformemente debajo del valor crítico al nivel de 1 % (-4) para cualquier

valor de localización de los cambios estructurales, contrario a los hallazgos de Leybourne y Newbold (2003), quienes reportan altas tasas de rechazo para la prueba EG solamente cuando ocurre tempranamente un cambio estructural en la variable dependiente (i.e. $\lambda_y < 0,3$). La fuente de la diferencia es que el *PGD* que ellos usan no es exactamente el mismo que el usado aquí (abajo discutimos mas este punto).

Usando valores de parámetros de la combinación 2-4 en el Cuadro 1⁷ calculamos tasas de rechazo basadas en datos simulados para varios tamaños de muestra y combinaciones de *PGD* en el Supuesto. Las tasas de rechazo del estadístico t para probar que $\gamma = 0$ en (2) fueron calculadas utilizando los valores críticos reportados en Enders (2004) al nivel de 1 %. Los resultados son presentados en el Cuadro 2.

Cuadro 2. tasas de rechazo de $t_{\hat{\gamma}}$

Combinaciones de <i>PGD</i> en el Supuesto								
T	1-1	1-2	1-3	1-4	2-2	2-3	2-4	4-2
50	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.55
100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
200	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
500	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

El número de réplicas es 10,000. Del Cuadro 2, resulta claro que la prueba EG indica cointegración espuria en muestras finitas.

Un segundo conjunto de experimentos fue realizado usando valores mayores para varios parámetros (vea Cuadro 3).

Cuadro 3.

<i>PGD</i>	3 - 2	3 - 1	2 - 2	2 - 4
μ_y	2.7	2.7	2.7	2.7
μ_x	0.5	0.5	0.5	0.5
β_y	0.04	0.04	0.9	0.04
β_x	$[-5, 5]$		$[-5, 5]$	0.9
θ_y			-1.7	-1.7
θ_x	1.5	$[-1, 8, 1, 8]$	1.5	
γ_y			$[-1, 5, 2]$	0.07
γ_x	$[-1, 5, 2]$		1.5	1.5
λ_y		0.3	0.3	$[0, 1]$
λ_x	0.7	$[0, 1]$	0.7	$[0, 1]$
ρ_y	0	0.7	0	0
ρ_x	0.7	0.7	0	0

⁷Con $\lambda_x = 0,3$, y $\lambda_y = 0,7$.

Los resultados son mostrados en las Gráficas 3 y 4, y corresponden a muestras de tamaño 100 y 500. Como puede verse, el estadístico t toma valores positivos y negativos, pero en este caso las gráficas 3a, 3c, 3d, y 4a, 4c, 4d indican que a medida que el tamaño de muestra crece, el estadístico tiende a moverse hacia valores positivos.

Para este segundo conjunto de experimentos, nuestros resultados se parecen a los de Leybourne y Newbold (2003), en el sentido de que el estadístico t tiende a ser más negativo entre más cerca estén los cambios estructurales del inicio de la muestra, de acuerdo a la gráficas 3d y 4d.

Gráfica 3: Gráficas de t_γ . Valores de parámetros tomados del Cuadro 2.
 $T = 100$

Gráfica 4: Gráficas de $t_{\hat{\gamma}}$. Valores de parámetros tomados del Cuadro 2.
 $T = 500$

Si bien evidentemente limitados, estos dos conjuntos de experimentos, en combinación con los resultados asintóticos, nos permiten establecer nuestra proposición: la prueba EG puede divergir en cualquier dirección, haciéndola no confiable como una prueba de cointegración cuando hay cambios estructurales ignorados en la función de tendencia del proceso generador de datos. Además, los resultados de usar el primer conjunto (empíricamente relevante) de valores de parámetro indican divergencia hacia menos infinito, implicando la presencia de cointegración espuria. Por lo tanto, recomendamos una interpretación cuidadosa de los resultados derivados de aplicar la prueba EG de cointegración cuando existe la posibilidad de cambios estructurales en la función de tendencia de las variables.

Los resultados presentados en este documento representan una extensión de los hallados por Gonzalo y Lee (1998). Encontramos, sin embargo, que la prueba EG es sensible a especificaciones incorrectas del comportamiento de tendencia y puede conducir a un rechazo espurio de la nula de no cointegración para series de tiempo independientes con cambios estructurales.

4. Evidencia Empírica

Para ilustrar los hallazgos teóricos y simulados, tomamos datos mensuales sobre el número total de ventas de autos en los Estados Unidos (*carros* de ahora en adelante), y el número de asesinatos en los Estados Unidos (*asesinatos*), cuyas series de tiempo se muestran en la Gráfica 1⁸. Note que esta sección no pretende

⁸Las fuentes de los datos son: Buró de Análisis Económico: Ventas, producción, exportaciones e inventarios (en miles) de autos y camiones, y FBI: Crimen en los Estados Unidos; BOC:

ofrecer un análisis completo de series de tiempo de estos datos. Su propósito es simplemente presentar una ilustración sobre la posibilidad de encontrar una relación de cointegración usando datos reales, incluyendo variables que en un principio no tienen relación entre ellas.

Las pruebas de raíz unitaria sobre cada variable indican que no es posible rechazar una raíz unitaria⁹. Debido a que los resultados teóricos presentados anteriormente aplican cuando por lo menos una de las variables ha experimentado un cambio estructural, seguimos a Perron (1997) y estimamos un cambio estructural en la tendencia de *carros*, en enero de 2000. Una vez que este cambio estructural es tomado en cuenta, la hipótesis de raíz unitaria es rechazada.¹⁰

Una regresión de *carros* contra *asesinatos* por MCO produce un coeficiente de regresión (espuria) de -0.036, implicando que para cada asesinato adicional, las ventas de autos decrecen en 36 unidades (el estadístico t es significativo al nivel de 1 %).

De los resultados de las pruebas de raíz unitaria discutidos anteriormente, si los cambios estructurales no son tomados en cuenta, ambas variables aparentarían ser $I(1)$, y la presencia de cointegración puede ser investigada. El estadístico t de la prueba de cointegración DF basada en los residuales EG es -8.67 (el valor crítico al nivel de 1 % es -4), permitiendo así rechazar la nula de no cointegración. Por lo tanto, parece haber una relación de equilibrio de largo plazo entre asesinatos y ventas de autos en los Estados Unidos, de acuerdo a la prueba de Engle-Granger. Por supuesto, este es un hallazgo espurio, debido a que uno no espera encontrar cointegración entre estas dos variables.

5. Conclusiones

Este documento ha mostrado que la prueba de cointegración Engle-Granger, basada en el estadístico t DF, no posee una distribución límite, sino diverge a tasa $\sqrt{T}$. Dada la dependencia de la distribución asintótica de varios parámetros en el PGD , el documento analizó el comportamiento del estadístico t a través de simulaciones de Monte Carlo. Los resultados muestran que la divergencia del estadístico de prueba EG puede ocurrir en cualquier dirección. Para un conjunto particular de parámetros (empíricamente relevantes), los experimentos de la simulación indican que el estadístico tiende a menos infinito, y, por lo tanto, pueden engañosamente indicar cointegración entre variables independientes. Sin embargo, también encontramos que un conjunto diferente de valores de

Libro de los Datos de Ciudades y Condados. Ambas series provistas por www.FreeLunch.com – <http://www.economy.com/freelunch>. El periodo de muestra es 1991:1-2005:12, incluyendo 180 observaciones.

⁹ Aplicamos las pruebas ampliadas de Dickey-Fuller siguiendo el criterio de selección de longitud de rezagos de Perron (1997), con un máximo de diez rezagos de las primeras diferencias de la variable dependiente. También aplicamos las pruebas de Ng-Perron usando el criterio de información Akaike modificado, como sugieren Ng y Perron (2001). Los resultados estarán disponibles al ser solicitados.

¹⁰ Por simplicidad, no buscamos cambios estructurales en asesinatos, a pesar de que también parecen haber experimentado cambios estructurales en su función de tendencia.

Figura 1:

parámetro indica divergencia hacia infinito, lo cual conduciría a una inferencia correcta. Para darle un contenido empírico a nuestros hallazgos teóricos, el documento también mostró que la aplicación de la prueba Engle-Granger descubrió una relación de cointegración espuria entre el número de asesinatos y las ventas de autos en Estados Unidos.

Creemos que los resultados presentados son relevantes, dada la dificultad de distinguir variables $I(1)$ de variables estacionarias alrededor de tendencias quebradas, es decir, dado el bajo poder de las pruebas de raíz unitaria en contra de alternativas estacionarias en tendencia. En resumen, la prueba EG debería de ser usada con cautela, debido a que la presencia de cambios estructurales ignorados pudieran producir rechazos espurios de la nula de no cointegración entre series de tiempo independientes.

Dado el potencial impacto negativo de los cambios estructurales ignorados sobre la inferencia usando la prueba EG, nos adherimos a la recomendación de Gonzalo y Lee (1998) en el sentido de que “.....la pre-prueba de raíces unitarias individuales no es suficiente. Necesitamos estar seguros de que las variables no tienen cualquier otro comportamiento de tendencia o de memoria larga diferente al de un proceso de raíz unitaria” (p.149).

6. Referencias

- Elliot, G. (1998), "On the robustness of cointegration methods when regressors almost have unit roots", *Econometrica*, 66(1), 149-158.
- Enders, W. (2004), *Applied Econometric Time Series*, Second Edition, Wiley.
- Engle, R.F. y C.W.J. Granger (1987), "Cointegration and error correction: representation, estimation and testing", *Econometrica*, 55, 251-76.
- Gonzalo, J. y T.H. Lee (1998), "Pitfalls in testing for long-run relationships", *Journal of Econometrics*, 86(1), 129-154.
- Kellard, N. (2006), "On the robustness of cointegration tests when assessing market efficiency", *Finance Research Letters*, 3, 57-64.

- Leybourne, S.J. y P. Newbold (2003), "Spurious rejections by cointegration tests induced by structural breaks", *Applied Economics*, 35, 1117-1121.
- MacKinnon, J.G. (1991), "Critical values for co-integration tests", en R.F. Engle y C.W.J. Granger (eds.), *Long-Run Economic Relationships*, Oxford University Press, 267-276.
- Maddala, G. y I. M. Kim (1998), *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.
- Ng, S. y P. Perron (2001), "Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power", *Econometrica*, 69 (2001), 1519-1554.
- Noriega, A. y D. Ventosa-Santaulària (2006), "Spurious regression under broken-trend stationarity", *Journal of Time Series Analysis*, 27(5), 671-684.
- Perron, P. (1989), "The great crash, The oil price shock, and the unit root hypothesis", *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- (1997), "Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables", *Journal of Econometrics*, 80, 355-385.
- Perron, P. y X. Zhu (2005), "Structural breaks with deterministic and stochastic trends", *Journal of Econometrics*, 129, 65-119.
- Phillips, P.C.B. (1986), "Understanding spurious regressions in econometrics", *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.
- Phillips, P.C.B. y S. Ouliaris (1990), "Asymptotic properties of residual based tests for cointegration", *Econometrica*, 58, 165-193.