Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2006-10

**Detección de Brincos en Series Financieras en Alta
Frecuencia Utilizando Variación Multipoder**

Carla Ysusi
Banco de México

Septiembre 2006

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Detección de Brincos en Series Financieras en Alta Frecuencia Utilizando Variación Multipoder^{*}

Carla Ysusi[†]

Banco de México

Resumen

Cuando el proceso del logaritmo de precios incorpora un componente de brincos, la varianza realizada ya no estimará la varianza integrada dado que su límite en probabilidad será determinado tanto por el componente continuo como por el de brincos. En cambio, la variación bipoder realizada, la variación tripoder realizada y la variación cuadripoder realizada son estimadores consistentes de la varianza integrada aún en la presencia de brincos. En este artículo se derivan las distribuciones límites de la variación tripoder y la variación cuadripoder permitiendo comparar estos tres estimadores de la varianza integrada. Usando las teorías asintóticas de las diferencias de los errores, pruebas de hipótesis para detectar brincos en el proceso se propone para cada estimador. Usando series simuladas, se comparan dichas pruebas. Éstas también son aplicadas a datos empíricos pero los resultados deben ser tomados con cuidado dado que las series reales suelen estar contaminadas por efectos de microestructura.

Palabras Clave: Variación cuadrática, Variación multipoder, Modelos de volatilidad estocástica, Proceso de brinco, Semimartingala, Datos en alta frecuencia.

Abstract

When the log-price process incorporates a jump component, realized variance will no longer estimate the integrated variance since its probability limit will be determined by the continuous and jump components. Instead realized bipower variation, tripower variation and quadpower variation are consistent estimators of integrated variance even in the presence of jumps. In this paper we derive the limit distributions of realized tripower and quadpower variation, allowing us to compare these three estimators of integrated variance. Using the limit theories for the differences of the errors, tests for jumps are proposed for each estimator. Using simulated data, the performance of each of these tests is compared. The tests are also applied to empirical data but results need to be taken carefully as market microstructure effects may contaminate real data.

Keywords: Quadratic variation, Multipower variation, Stochastic volatility models, Jump process, Semimartingale, High-frequency data.

JEL Classification: C12, C51, G19.

^{*}El autor agradece a Neil Shephard por sus consejos y apoyo, y a Valentina Corradi y Matthias Winkel por sus valiosas sugerencias.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: cysusi@banxico.org.mx.

1 Introducción

El análisis de las propiedades de estructuras financieras es uno de los enfoques principales de las estadísticas financieras. Las cuestiones relevantes son la descripción de la dinámica de los precios y el desarrollo de los conceptos y teorías correspondientes. Los mercados se han vuelto crecientemente volátiles y se requieren nuevas herramientas para cuantificar la magnitud de las fluctuaciones. En la actualidad, bases de datos completas de los precios están disponibles para muchos activos financieros en alta frecuencia, permitiendo la calibración de modelos continuos de series de tiempo. Más precisamente, en un proceso continuo semimartingala la varianza realizada estima la variación cuadrática. Se puede utilizar como estimador de la varianza integrada en un modelo de volatilidad estocástica cuando datos en alta frecuencia están disponibles.

A pesar de que la varianza realizada estima consistentemente la varianza integrada bajo un proceso continuo del logaritmo de precios, siempre cuando los log-precios incurren brincos, la varianza realizada estimará las variaciones cuadráticas de ambos, del componente continuo y el de los brincos. Los brincos se consideran como componente fundamental de los procesos financieros, por lo tanto, se explica la necesidad de estimadores robustos a la presencia de los brincos. Recientemente, métodos econométricos han sido desarrollados para separar el componente continuo y el de los brincos, utilizando variación bipoder (Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a)). En el presente documento, se considerarán estimadores consistentes alternativos de la varianza integrada en la presencia de procesos de brincos con intensidad finita. Tales estimadores son la variación tripoder y cuadripoder, que son casos especiales de la variación multipoder. Estos objetos son conocidos por tener un mejor comportamiento de muestra que la variación bipoder cuando se estima la cuarticiidad, consecuentemente también se puede esperar un mejor comportamiento de muestra cuando se estima la varianza integrada.

En el caso de un proceso de volatilidad estocástica combinado con brincos, la diferencia entre la varianza realizada y estos objetos realizados generan una estimación de la variación cuadrática del componente de los brincos. Estas propiedades presentan la base de una prueba para los brincos en la muestra de log-precios.

En este contexto, se derivará la distribución asintótica de los estimadores y después, se utilizarán estos resultados asintóticos para probar la existencia de los brincos en el proceso de log-precios. El poder de estos estimadores se puede comparar con el poder de los estimadores de la variación bipoder, encontrados en los estudios de Andersen, Bollerslev y Diebold (2003), Barndorff-Nielsen y Shephard (2006), Huang y Tauchen (2005), Tauchen y Zhou (2006).

La varianza realizada y la variación multipoder pueden enfrentar un problema de sesgo debido a la autocorrelación en los retornos intra-día. Existen varias fuentes referidas como efectos de microestructura. Estos efectos inducen correlación serial en los retornos en alta frecuencia, utilizados para calcular la varianza realizada o la variación multipoder; por lo tanto, tienen un impacto en la estimación de varianza integrada. Sin embargo, el ruido de microestructura no se incorporará en el proceso de log-precios en el presente documento, dado que la variación multipoder puede ser más robusta a los efectos de microestructura, pero se necesita más investigación para evaluar el impacto de este ruido en los estimadores y en las pruebas.

El documento está estructurado de la siguiente manera. La Sección 2 revisa algunas definiciones y los resultados de la variación cuadrática y bipoder con los resultados correspondientes para la variación tripoder y cuadripoder dados en la Sección 3. En la Sección 4 se presenta la teoría asintótica de estos estimadores y en las Secciones 5 y 6 se prueba la existencia de brincos en las series simuladas y empíricas, respectivamente. La Sección 7 presenta las conclusiones. Las

demostraciones de las teorías asintóticas se encuentran en el Apéndice.

2 Variación cuadrática y bipoder

2.1 Variación cuadrática

Un modelo estándar en la economía financiera es el modelo de volatilidad estocástica (SV, por sus siglas en inglés) para los log-precios Y_t que sigue la ecuación

$$Y_t = \int_0^t a_u du + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde $A_t = \int_0^t a_u du$. Se asume que los procesos σ_t y A_t son estocásticamente independientes del movimiento Browniano estándar W . σ_t se denota como la volatilidad instantánea o spot, σ_t^2 la varianza spot correspondiente y A_t el proceso de la media.

Más generalmente, se asume que A_t tiene una variación localmente acotada, y se define que $M_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$, con la condición adicional de que $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ para todos t . Lo anterior es suficiente para garantizar que M_t es una martingala local. Por lo tanto, la ecuación original (1) se puede descomponer como

$$Y_t = A_t + M_t.$$

Bajo estos supuestos, Y_t es una semimartingala (véase Protter (1990)). Si, adicionalmente, A_t es continuo, entonces Y_t pertenece a la clase de semimartingala continua de volatilidad estocástica ($SVSM^c$).

En este modelo, un papel clave desempeña la varianza integrada

$$\sigma_t^{2*} = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

y la variación cuadrática

$$[Y]_t = p \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})^2$$

para cualquier secuencia de particiones $t_0^{(n)} = 0 < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t$ con $\sup_j \{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\} \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Dado que se asume que A_t es continuo y de variación finita, se obtiene que

$$[Y]_t = [A]_t + 2[A, M]_t + [M]_t = [M]_t = \int_0^t \sigma_u^2 du$$

donde

$$[X, Y]_t = p \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}).$$

Lo anterior se mantiene, dado que la variación cuadrática de cualquier proceso con variación continua, localmente acotada es cero (véase Hull y White (1987)).

Se asume que observaciones están disponibles cada $\delta > 0$ periodos del tiempo, entonces, dado el marco previo, el j -ésimo retorno se denota como

$$y_j = Y_{j\delta} - Y_{(j-1)\delta} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \lfloor t/\delta \rfloor$$

y la varianza real como

$$\nu_j^2 = \sigma_{j\delta}^{2*} - \sigma_{(j-1)\delta}^{2*}$$

Si datos financieros en alta frecuencia están disponibles, el proceso de varianza realizada

$$[Y_\delta]_t^{[2]} = \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2$$

se puede definir.

La relación entre la varianza realizada y la variación cuadrática es

$$[Y_\delta]_t^{[2]} \xrightarrow{p} [Y]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

si $Y \in SVSM^c$.

En Barndorff-Nielsen y Shephard (2002), Barndorff-Nielsen y Shephard (2003) y Barndorff-Nielsen y Shephard (2004b), la teoría previa se ha extendido a un Teorema del Límite Central (CLT, por sus siglas en inglés). En estos documentos, el CLT se presenta bajo supuestos algo restrictivos. Recientemente, Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij y Shephard (2005) y Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod y Shephard (2006) presentan condiciones más débiles para el proceso de log-precios, asegurando que se mantiene el CLT. Para el modelo SV (1), cuando $\delta \downarrow 0$

$$\frac{\delta^{-1/2}([Y_\delta]_t^{[2]} - [Y]_t)}{\sqrt{2 \int_0^t \sigma_s^4 ds}} \xrightarrow{L} N(0, 1),$$

bajo los supuestos de que A_t es de variación localmente acotada, $\int_0^t \sigma_u^2 du < \infty$ y que σ_t es càdlàg.

La varianza realizada ha sido utilizada en la econometría financiera desde hace muchos años, por ejemplo, Rosenberg (1972), Merton (1980), Poterba y Summers (1986), Schwert (1989), Hsieh (1991), Zhou (1996), Taylor y Xu (1997), Christensen y Prabhala (1998), Andersen, Bollerslev, Diebold y Ebens (2001), Andersen, Bollerslev, Diebold y Labys (2001). La literatura reciente, utilizando la variación cuadrática para semimartingalas ha sido el desarrollo independiente y concurrente de Andersen y Bollerslev (1998), Comte y Renault (1998) y Barndorff-Nielsen y Shephard (2001). Existen muchos otros documentos sobre la varianza realizada, los cuales se discuten en Dacorogna et al. (2001) y en las revisiones de Andersen, Bollerslev y Diebold (2005) y Barndorff-Nielsen y Shephard (2007).

2.2 Variación Bipoder

Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a) introdujeron el proceso de variación bipoder, definido como

$$\{Y\}_t^{[r,s]} = p\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{1-(r+s)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 1} |y_j|^r |y_{j+1}|^s, \quad r, s \geq 0$$

El objetivo principal del presente documento es la estimación de la varianza integrada, por lo tanto, es necesario fijar $r + s = 2$. Se enfocará en el caso donde $r = s = 1$, ya que los teoremas de límite se pueden obtener más fácilmente bajo condiciones débiles. Entonces, el proceso de la variación bipoder realizada

$$\{Y\}_t^{[1,1]} = \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 1} |y_j| |y_{j+1}|$$

es un estimador de $\{Y\}_t^{[1,1]}$. Estos autores muestran que en el caso $SVSM^c$ bajo algunas condiciones de regularidades

$$\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Además, en el $SVSM^c$

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} \xrightarrow{p} 0$$

2.3 Efectos de los brincos

Considérese el siguiente proceso consistente en un componente continuo y un componente con brincos

$$Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$$

donde $Y^{(1)} \in SVSM^c$ y $Y_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} c_i$

Con $N_t < \infty$ para todos $t > 0$ un proceso de conteo simple de actividad finita y $\{c_i\}$ una colección de las variables aleatorias distintas a cero.

Nótese que en este caso la variación cuadrática es

$$\begin{aligned} [Y]_t &= \sigma_t^{2*} + \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2 \\ &= \left[Y^{(1)} \right]_t + \left[Y^{(2)} \right]_t, \end{aligned}$$

así que ambos componentes, el continuo y el de los brincos, contribuyen a la variación cuadrática total.

En Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a) se muestra que la varianza integrada incorpora la contribución de la variación cuadrática de ambos componentes, el continuo y el de los brincos

$$[Y_\delta]_t^{[2]} \xrightarrow{p} [Y]_t$$

pero la variación bipoder realizada solamente incorpora la contribución del componente continuo

$$\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Estos resultados implican que en este caso

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} \xrightarrow{p} \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2$$

2.4 Prueba para detectar brincos utilizando la variación bipoder realizada

Al utilizar la varianza realizada y la variación bipoder realizada, es posible identificar el componente continuo y el de los brincos del proceso de log-precios. Entonces, para probar la existencia de brincos en el proceso de log-precios solamente se tiene que identificar la convergencia en la distribución de los estimadores. Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a) fueron los primeros que presentaron la teoría de distribución conjunta para el error de varianza realizada y el error de la variación bipoder realizada. Recientemente, Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij y Shephard (2005) y Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod y Shephard (2006) han unificado el tratamiento asintótico de varias medidas de volatilidad, donde el siguiente resultado se puede entender como caso especial. La teoría de límite necesaria para la diferencia de la varianza realizada y la variación bipoder realizada es

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left([Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,1]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{RV})$$

donde $\vartheta_{RV} \simeq 0.6091$. Andersen, Bollerslev y Diebold (2003), Barndorff-Nielsen y Shephard (2006) y Huang y Tauchen (2005) utilizaron esta teoría posteriormente para realizar la prueba.

En el presente documento, se asume que el componente de los brincos de los log-precios es un proceso de brincos de intensidad finita, aunque Barndorff-Nielsen, Shephard y Winkel (2006) obtuvieron que las condiciones de la convergencia en la probabilidad y el teorema del límite central se mantienen bajo un proceso de brincos de intensidad infinita.

3 Variación tripoder y cuadripoder

Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a) generalizaron la variación bipoder mediante la multiplicación de un número finito de retornos absolutos elevados a cualquier poder no negativa, llamándola variación multipoder. Las variaciones tripoder y cuadripoder son casos particulares de esta idea. El proceso de la variación tripoder se define como

$$\{Y\}_t^{[r,s,u]} = p \lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{1-(r+s+u)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j|^r |y_{j+1}|^s |y_{j+2}|^u, \quad r, s, u > 0,$$

y se estima con el proceso de variación tripoder realizada

$$\{Y_\delta\}_t^{[r,s,u]} = \delta^{1-(r+s+u)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j|^r |y_{j+1}|^s |y_{j+2}|^u, \quad r, s, u > 0,$$

Se requiere que $r + s + u = 2$, por lo tanto, se enfocará en el caso donde $r = s = u = 2/3$, para poder obtener la distribución límite bajo supuestos débiles. Análogamente, el proceso de variación cuadripoder se define como

$$\{Y\}_t^{[r,s,u,v]} = p \lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{1-(r+s+u+v)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} |y_j|^r |y_{j+1}|^s |y_{j+2}|^u |y_{j+3}|^v, \quad r, s, u, v > 0,$$

y se estima con el proceso de variación cuadripoder realizada

$$\{Y_\delta\}_t^{[r,s,u,v]} = \delta^{1-(r+s+u+v)/2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} |y_j|^r |y_{j+1}|^s |y_{j+2}|^u |y_{j+3}|^v, \quad r, s, u, v > 0,$$

Nuevamente $r + s + u + v = 2$ y se considerará el caso especial donde $r = s = u = v = 1/2$.

Dado que $Y \in SVSM^c$, se pueden obtener nuevos estimadores de la varianza integrada basados en los siguientes resultados

$$\mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3,2/3,2/3]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

y

$$\mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2,1/2,1/2,1/2]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Por lo tanto, también se puede obtener que

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3,2/3,2/3]} \xrightarrow{p} 0$$

y que

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2,1/2,1/2,1/2]} \xrightarrow{p} 0$$

3.1 Efectos de los brincos

Cuando un componente de los brincos está presente en el proceso de log-precios, como en la Subsección 2.3, las variaciones tripoder y cuadripoder no incorporan la contribución a la variación cuadrática del componente de los brincos, por lo que

$$\mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3,2/3,2/3]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

y

$$\mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2,1/2,1/2,1/2]} \xrightarrow{p} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Estos resultados implican que

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3, 2/3, 2/3]} \xrightarrow{p} \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2$$

y que

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]} \xrightarrow{p} \sum_{i=1}^{N_t} c_i^2.$$

Consecuentemente, las variaciones tripoder y cuatripoder proporcionan una alternativa a la variación bipoder para la prueba de brincos, solamente se requieren las distribuciones asintóticas, las cuales se obtendrán en la siguiente sección.

Barndorff-Nielsen, Shephard y Winkel (2006) generalizaron los resultados, mostrando que la variación multipoder, $d_r\{Y_\delta\}_t^{\{r_1, \dots, r_s\}}$ con $\sum_{i=1}^s r_i = 2$, converge en probabilidad a la varianza integrada, cuando se agrega un proceso de brincos de intensidad finita al proceso de log-precios, si $\max\{r_1, \dots, r_s\} < 2$. d_r es una constante que solamente depende de $r_1, \dots, r_s$.

3.2 Series de tiempo diarias

Para producir series de tiempo diarias, se asume un intervalo de tiempo fijo $h > 0$ (en este caso h denota el periodo de un día) con $\lfloor t/\delta \rfloor = M$ retornos intra- h , durante cada periodo de tiempo fijo h , definido como

$$y_{j,i} = Y_{(i-1)h+j\delta} - Y_{(i-1)h+(j-1)\delta}$$

para el j -ésimo retorno intra- h en el i -ésimo periodo.

La variación tripoder realizada (RTV, por sus siglas en inglés) diaria se puede definir como

$$\mu_{2/3}^{-3} \{Y_M\}_i^{[2/3, 2/3, 2/3]} = \mu_{2/3}^{-3} \sum_{j=1}^{M-2} |y_{j,i}|^{2/3} |y_{j+1,i}|^{2/3} |y_{j+2,i}|^{2/3}$$

y la variación cuatripoder realizada (RQV, por sus siglas en inglés) diaria como

$$\mu_{1/2}^{-4} \{Y_M\}_i^{[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]} = \mu_{1/2}^{-4} \sum_{j=1}^{M-3} |y_{j,i}|^{1/2} |y_{j+1,i}|^{1/2} |y_{j+2,i}|^{1/2} |y_{j+3,i}|^{1/2}.$$

También, se estudiará la versión saltada de la variación bipoder realizada (RSBV, por sus siglas en inglés) diaria

$$\mu_1^{-2} \{Y_M\}_i^{[1, 0, 1]} = \sum_{j=1}^{M-2} |y_{j,i}| |y_{j+2,i}|$$

Estos tres estimadores convergen en probabilidad a la verdadera varianza, independientemente de si hay brincos o no en el proceso de log-precios. Además, si estos brincos están presentes, su contribución a la variación cuadrática, $\sum_{j=1+N_{i-1}}^{N_i} c_j^2$, se puede estimar por las diferencias RV-RTV, RV-RQV y RV-RSBV.

4 Teoría asintótica

4.1 Distribuciones asintóticas para la diferencia entre la variación realizada tripoder, cuadripoder y la versión salteada de variación bipoder y la varianza realizada

Para implementar la prueba para detectar brincos, se necesita extender de la convergencia en la probabilidad a la convergencia en la distribución. La teoría asintótica presentada en esta sección y derivada en el apéndice es la contribución principal del presente documento. Más adelante, se aplicará esta teoría para probar la existencia de brincos.

Como en Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij y Shephard (2005) y Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod y Shephard (2006) se asume que, dado el modelo SV en la ecuación (1), A_t es una variación localmente acotada y σ_t es *càdlàg*. Estas y otras condiciones más técnicas para el proceso determinante de σ_t , también mencionadas en documentos previos, permiten obtener la distribución asintótica (que sigue por abajo). Adicionalmente, se fija $A_t = 0$.

Teorema 1

Si $Y \in SVSM^c$, entonces, cuando $\delta \downarrow 0$

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3, 2/3, 2/3]} - [Y_\delta]_t^{[2]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{TV})$$

donde

$$\vartheta_{TV} = \mu_{4/3} \mu_{2/3}^{-2} \left(\mu_{4/3}^2 \mu_{2/3}^{-4} + 2\mu_{4/3} \mu_{2/3}^{-2} - 2 \right) - 7 \simeq 1.0613$$

y

$$\mu_r = E(|x|^r) = 2^{r/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(r+1))}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Demostración. Véase apéndice A.1.

Teorema 2

Si $Y \in SVSM^c$, entonces, cuando $\delta \downarrow 0$

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]} - [Y_\delta]_t^{[2]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{QV})$$

donde

$$\vartheta_{QV} = \mu_1 \mu_{1/2}^{-2} \left(\mu_1^3 \mu_{1/2}^{-6} + 2\mu_1^2 \mu_{1/2}^{-4} + 2\mu_1 \mu_{1/2}^{-2} - 2 \right) - 9 \simeq 1.37702$$

y $\mu_r = E(|x|^r)$.

Demostración. Véase apéndice A.2.

Teorema 3

Si $Y \in SVSM^c$, entonces, cuando $\delta \downarrow 0$

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,0,1]} - [Y_\delta]_t^{[2]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{SBV})$$

donde

$$\vartheta_{SBV} = \mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5 \simeq 0.60907$$

y $\mu_r = E(|x|^r)$.

Demostración. Véase apéndice A.3.

Una consecuencia de este último teorema de límite es que asintóticamente no existe una diferencia en la distribución entre trabajar con la variación bipoder realizada o trabajar con la versión saltada realizada de la variación bipoder.

A través de la distribución asintótica previa se puede observar que

$$\vartheta_{BV} = \vartheta_{SBV} < \vartheta_{TV} < \vartheta_{QV}$$

es decir, la variación bipoder realizada es más eficiente que la variación tripoder y cuadripoder. Por lo tanto, bajo condiciones óptimas, cuando $\delta \downarrow 0$ y no existen efectos de microestructura, se puede esperar que la variación bipoder diera mejores resultados. Sin embargo, las series financieras reales son finitas y los efectos de microestructura sí existen, por lo tanto, no es seguro cuál método sería más capaz para detectar brincos cuando se trabaja con datos empíricos.

Ya que se obtuvieron las tres distribuciones asintóticas necesarias, se pueden realizar las pruebas de los brincos en el proceso de log-precios.

4.2 Prueba para detectar brincos

Según Barndorff-Nielsen y Shephard (2006), se pueden establecer dos distintas pruebas para brincos, es decir, una prueba lineal y una prueba de cociente. En ambas pruebas, bajo la hipótesis nula, el proceso de precios no incluye un componente de los brincos y bajo la hipótesis alternativa, el proceso de precios consiste en un componente continuo y uno de los brincos. Se supone que el componente de los brincos es un proceso de brincos de intensidad finita y el componente continuo es un miembro de la clase de semimartingala continua de volatilidad estocástica.

Las pruebas lineales se basan en las teorías de límite previas (Teorema 1, 2 y 3), mientras que las pruebas de cociente utilizan los siguientes resultados de convergencia. Para el proceso de variación tripoder realizada

$$\frac{\left(\frac{\mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3,2/3,2/3]}}{[Y_\delta]_t^{[2]}} - 1 \right)}{\delta^{1/2} \sqrt{\frac{\int_0^t \sigma_s^4 ds}{(\int_0^t \sigma_s^2 ds)^2}}} \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{TV})$$

donde $\vartheta_{TV} \simeq 1.0613$; para el proceso de variación cuadripoder realizada

$$\frac{\left(\frac{\mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2,1/2,1/2,1/2]}}{[Y_\delta]_t^{[2]}} - 1 \right)}{\delta^{1/2} \sqrt{\frac{\int_0^t \sigma_s^4 ds}{(\int_0^t \sigma_s^2 ds)^2}}} \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{QV})$$

donde $\vartheta_{QV} \simeq 1.37702$; para el proceso de variación bipoder realizada saltada

$$\frac{\left(\frac{\mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_i^{[1,0,1]}}{[Y_\delta]^{[2]}} - 1 \right)}{\delta^{1/2} \sqrt{\frac{\int_0^t \sigma_s^4 ds}{(\int_0^t \sigma_s^2 ds)^2}}} \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{SBV})$$

donde $\vartheta_{SBV} \simeq 0.60907$.

Cuando se trabaja con datos reales, ambas pruebas, la lineal y la de cociente, no son factibles, porque no se puede observar $\int_0^t \sigma_s^4 ds$ incluso cuando datos en alta frecuencia están disponibles. En estas situaciones, se requieren los siguientes estimadores

1) Cuarticidad Realizada (E1)

$$M\mu_4^{-1} \{Y_M\}_i^{[4]} = M\mu_4^{-1} \sum_{j=1}^M y_{j,i}^4$$

2) Variación Tripoder Realizada con $r = s = u = 4/3$ (E2)

$$M\mu_{4/3}^{-3} \{Y_M\}_i^{[4/3,4/3,4/3]} = M\mu_{4/3}^{-3} \sum_{j=1}^{M-2} |y_{j,i}|^{4/3} |y_{j+1,i}|^{4/3} |y_{j+2,i}|^{4/3}$$

3) Variación Cuadripoder Realizada con $r = s = u = v = 1$ (E3)

$$M\mu_1^{-4} \{Y_M\}_i^{[1,1,1,1]} = M\mu_1^{-4} \sum_{j=1}^{M-3} |y_{j,i}| |y_{j+1,i}| |y_{j+2,i}| |y_{j+3,i}|.$$

Observando que la variación cuadrática para el componente de los brinco no puede ser negativa, se pueden utilizar los siguientes estimadores

$$\begin{aligned} & \min(0, \mu_{2/3}^{-3} \{Y_M\}_i^{[2/3,2/3,2/3]} - [Y_M]_i^{[2]}), \\ & \min(0, \mu_{1/2}^{-4} \{Y_M\}_i^{[1/2,1/2,1/2,1/2]} - [Y_M]_i^{[2]}), \\ & \min(0, \mu_1^{-2} \{Y_M\}_i^{[1,0,1]} - [Y_M]_i^{[2]}). \end{aligned}$$

Como resultado, se obtienen pruebas de una cola.

Se introduce un sesgo en los estadísticos de prueba porque se usan valores finitos de M , por lo tanto, los estimadores tendrán menos componentes en la suma en comparación con la varianza realizada. Se usan los estimadores modificados para enfrentar este problema

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{M-2} \right) \mu_{2/3}^{-3} \{Y_M\}_i^{[2/3,2/3,2/3]}, \\ & \left(\frac{M}{M-3} \right) \mu_{1/2}^{-4} \{Y_M\}_i^{[1/2,1/2,1/2,1/2]}, \\ & \left(\frac{M}{M-2} \right) \mu_1^{-2} \{Y_M\}_i^{[1,0,1]}. \end{aligned}$$

En pequeñas muestras, en la prueba factible, el resultado de Barndorff-Nielsen y Shepard (2003), dado por la desigualdad de Jensen,

$$\frac{\int_0^t \sigma_s^4}{\left(\int_0^t \sigma_s^2\right)^2} \geq 1$$

posiblemente no se mantiene, por lo tanto, se utilizará adicionalmente el cociente ajustado

$$\max \left(1, \frac{\widehat{\int_0^t \sigma_s^4 ds}}{\left(\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)^2} \right).$$

5 Simulaciones

Las pruebas para detectar brincos se aplicarán a un proceso simulado simple. Se utilizará un proceso con elasticidad constante de la varianza (CEV, por sus siglas en inglés). Específicamente, el proceso de raíz cuadrada para σ^2 de Feller (1951) o Cox, Ingersoll y Ross (1985)

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\{\sigma_t^2 - \xi\}dt + \omega\sigma_t dB_{\lambda t}, \quad \xi \geq \omega^2/2, \quad \lambda > 0,$$

donde B es el proceso de movimiento Browniano estándar. El proceso de raíz cuadrada tiene una distribución marginal

$$\sigma_t^2 \sim \Gamma(2\omega^{-2}\xi, 2\omega^{-2}) = \Gamma(\nu, a), \quad \nu \geq 1,$$

Con la media $\xi = v/a$ y la varianza $w^2 = v/a^2$. Se define $A = 0$ y se descarta el efecto de apalancamiento al asumir que $Cor\{B_{\lambda t}, W_t\} = 0$. Se denota que $h = 1, \lambda = 0.01, \nu = 4$ y $a = 8$. Los brincos serán i.i.d. $N(0, \beta v/a)$, por lo tanto, un brinco tiene la misma varianza que la esperada para un $(\beta \times 100)\%$ de un día cuando no existen brincos.

5.1 Comportamiento de los estimadores en la muestra finita

5.1.1 Comportamiento en la muestra finita si no existen brincos

Primero, se intenta evaluar, dado que no hay brincos, la precisión de la convergencia en la probabilidad para cada uno de los estimadores. Para hacer eso, se simularán los datos correspondientes a 1000 días del proceso previo sin brincos. Los valores realizados para la variación bipoder, tripoder, cuadripoder y la versión salteada de la variación bipoder se calculan para distintos valores de M ($M = 12, 72$ y 288 , es decir, retornos de 120, 20 y 5 minutos). Las Gráficas 1, 2, 3 y 4 corresponden a las primeras 250 observaciones de la variación bipoder, tripoder, cuadripoder y la versión salteada de la variación bipoder, respectivamente. Las gráficas al lado izquierdo muestran la verdadera varianza junto con los valores realizados para evaluar el límite de probabilidad. Dado que las presentes series no incluyen el ruido de la microestructura, éstas se vuelven más precisas cuando el valor de M aumenta. La magnitud de la diferencia parece ser grande cuando la volatilidad es alta. En estas gráficas ningún estimador particular parece ser mejor que los demás. Las gráficas en la mitad muestran las diferencias entre las series realizadas y la verdadera varianza, es decir, los errores, junto con su nivel de confianza. Las fluctuaciones drásticas en las bandas corresponden a los cambios en el nivel del proceso de varianza, con bandas más amplias en los niveles de mayor varianza. En el lado derecho, se muestran los gráficos de cuartiles (Gráfico-QQ) que representarían

una línea de 45 grados si se mantienen los resultados asintóticos. Se observa un mejoramiento en todos los casos cuando M aumenta, aunque la teoría asintótica no proporciona una guía adecuada para el comportamiento de muestras finitas. Incluso cuando se usan retornos de 5 minutos, existen problemas debido a las colas pesadas. En resumen, no se puede concluir cuál estimador muestra un mejor comportamiento.

Una perspectiva alternativa para evaluar el comportamiento de muestras finitas se presenta en los Cuadros 1 y 2 que registran el sesgo desde cero y la desviación estándar de los errores (las series realizadas correspondientes menos la verdadera varianza). El sesgo debería ser cero y la desviación estándar debería ser aproximadamente uno si la teoría del límite describe adecuadamente el comportamiento de los estadísticos. También se presenta la tasa de cobertura. Dadas las distribuciones asintóticas de cada uno de los estimadores (véase apéndice), esta tasa es el porcentaje de los estadísticos estandarizados que se encuentran por debajo del 97.5% cuantil, en términos absolutos, (con un nivel de confianza de 95%) de una distribución Normal. El Cuadro 1 presenta los resultados no factibles (dado que se usan simulaciones) y el Cuadro 2 presenta los resultados factibles. En este último cuadro, se utiliza la cuartilidad realizada (E1) para estimar la cuartilidad integrada. Dado que no se incluye el ruido de microestructura, los resultados son mejores para mayores valores de M. Todos los estimadores parecen tener un comportamiento de muestra finita similar y bueno.

M	Sesgo	BV DE	Cob	Sesgo	TV DE	Cob	Sesgo	QV DE	Cob	Sesgo	SBV DE	Cob
12	-.189	.950	96.8	-.203	.992	95.6	-.208	1.02	95.4	-.216	.989	96.2
24	-.148	.971	96.1	-.146	.969	96.0	-.143	.971	96.1	-.138	.997	96.0
72	-.108	.995	95.2	-.085	.988	95.2	-.076	.993	95.5	-.070	1.01	94.8
144	-.074	1.01	94.6	-.081	1.02	94.6	-.089	1.01	94.8	-.071	1.01	95.1
288	-.047	.986	94.6	-.028	.990	95.2	-.021	.989	95.3	-.020	1.00	94.3
576	-.016	.983	96.2	-.023	.987	95.5	-.033	.986	95.2	-.026	1.00	95.4
Cuadro 1. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la variación estándar no factible realizada del error, bipoder, tripoder, cuatripoder y bipoder salteada.												

M	Sesgo	BV DE	Cob	Sesgo	TV DE	Cob	Sesgo	QV DE	Cob	Sesgo	SBV DE	Cob
12	-0.611	1.510	86.0	-0.575	1.450	85.9	-0.558	1.440	84.9	-0.634	1.51	85.7
24	-0.423	1.260	89.3	-0.389	1.230	89.1	-0.368	1.210	89.3	-0.190	1.28	89.2
72	-0.253	1.090	91.9	-0.209	1.070	92.9	-0.188	1.070	93.0	-0.213	1.11	92.0
144	-0.169	1.070	93.1	-0.165	1.060	93.2	-0.165	1.050	93.5	-0.163	1.05	93.0
288	-0.110	1.010	94.4	-0.082	1.010	94.2	-0.071	1.010	94.2	-0.083	1.02	93.4
576	-0.059	0.994	95.9	-0.061	0.997	95.2	-0.067	0.996	95.0	-0.071	1.01	95.3
Cuadro 2. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la variación estándar factible realizada del error, bipoder, tripoder, cuatripoder y bipoder salteada.												

5.1.2 Comportamiento de muestras finitas en presencia de brincos

Como se mencionó previamente, la variación bipoder realizada y los tres otros estimadores son robustos a la presencia de brincos. Será conveniente estudiar su comportamiento de muestras finitas en la presencia de brincos (es decir, de un proceso de brincos de intensidad finita). En la Gráfica 5, se utiliza RBV, RTV, RQV y RSBV para encontrar la varianza integrada y la varianza cuadrática del componente de los brincos de los primeros 50 días de una serie de datos simulados. Los datos fueron simulados con el proceso SV más los brincos, como se explicó antes. Los valores realizados se calcularon con base en $M=288$. En las gráficas al lado izquierdo, se muestra la verdadera varianza integrada junto con la varianza integrada estimada con a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV. Para todos los casos, los estimadores desempeñan bastante bien cuando no incorporan la variación debido a los brincos. En las gráficas al lado derecho se muestra la verdadera variación cuadrática del componente de los brincos, junto con la estimada utilizando a) RV-RBV, b) RV-RTV, c) RV-RQV y d) RV-RSBV. Todos los estimadores parecen dar estimaciones adecuadas, pero se tienen que aplicar las distribuciones asintóticas para obtener conclusiones más firmes.

5.2 Distribución Nula

5.2.1 Prueba no factible

En esta sección, en lugar de examinar el comportamiento de muestras finitas de los estimadores en sí, se investigará su precisión en las pruebas de brincos. Primero, se simulará un proceso de mil días sin ningún brinco. Se ejecutarán ambas pruebas no factibles, la prueba lineal y la prueba de cociente, para la presencia de los brincos, utilizando cada uno de los estimadores (variación bipoder realizada, variación tripoder realizada, variación cuatripoder realizada y variación bipoder realizada salteada) para valores distintos de M , esperando que no se rechaza (la hipótesis nula que implica no brincos). Los estadísticos de las pruebas se presentan en la Gráfica 6 para $M=288$ para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV. En las gráficas del lado izquierdo se muestran los estadísticos de la prueba lineal, junto con su doble error estándar. Eso se repite en las gráficas en el medio pero para la prueba de cociente. La hipótesis de no brincos se rechaza cuando el valor cae por debajo del doble¹ error estándar (con un nivel de confianza de 95%). Por lo tanto, la prueba de cociente parece dar mejores resultados que la prueba lineal. En el lado derecho, se muestran los gráficos-QQ de cuartiles normales de las dos pruebas. Si las aproximaciones asintóticas fueran adecuadas, se deberían imponer sobre la línea de 45 grados. Ambas pruebas tienen buenas gráficas de cuartiles, aunque las de la prueba de cociente son ligeramente mejores para todos los estimadores.

En el Cuadro 3, se registran el sesgo desde cero de los estadísticos de la prueba lineal, su desviación estándar y las tasas de cobertura para las pruebas lineales de una cola para las series que utilizan los cuatro estimadores (RBV, RTV, RQV, RSBV). El sesgo debería tender a cero y la desviación estándar a uno si la teoría asintótica describe adecuadamente el comportamiento del estadístico de la prueba. La tasa de cobertura expresa la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es cierta, es decir, no encontrar brincos si el proceso es continuo. Se toma $\alpha = .05$,

¹El 97.5% cuantil de una distribución normal estándar es 1.96. En los cálculos se redondeó este número y se utilizó 2.

entonces la tasa de cobertura debería ser $(1-\alpha) * 100\%$ si las distribuciones asintóticas se ajustan adecuadamente a los estadísticos de la prueba de muestra finita. En este cuadro se ejecutan la prueba no factible, es decir, se usan la verdadera cuartilidad para calcular el estadístico de prueba lineal.

En el Cuadro 4 se reportan el sesgo, la desviación estándar y la tasa de cobertura para la prueba de cociente no factible. En ambas, la prueba lineal y la de cociente, se obtienen mejores resultados cuando el valor de M aumenta. En este caso, las pruebas lineales y las de cociente no factibles generan resultados muy similares. La variación tripoder y cuadripoder producen resultados ligeramente mejores que los estimadores basados en la variación bipoder. La variación bipoder realizada y su versión salteada sobreestiman los brinco.

M	Sesgo	12 DE	Cob	Sesgo	72 DE	Cob	Sesgo	288 DE	Cob
RBV	-0.363	1.16	87.4	-0.191	1.00	92.8	-0.115	1.00	93.5
RTV	-0.313	1.13	88.5	-0.180	1.00	92.9	-0.103	0.994	94.1
RQV	-0.313	1.14	89.0	-0.181	1.00	93.3	-0.104	0.999	94.3
RSBV	-0.424	1.22	85.9	-0.199	1.03	92.2	-0.129	1.01	93.6
Cuadro 3. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba lineal no factible									

M	Sesgo	12 DE	Cob	Sesgo	72 DE	Cob	Sesgo	288 DE	Cob
RBV	-0.379	1.08	85.2	-0.196	0.987	92.6	-0.110	0.993	93.3
RTV	-0.328	1.07	89.5	-0.185	0.985	94.1	-0.099	0.985	93.7
RQV	-0.329	1.08	89.7	-0.183	0.987	93.8	-0.101	0.992	94.4
RSBV	-0.433	1.15	85.5	-0.199	1.01	92.4	-0.127	1.01	93.7
Cuadro 4. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba del cociente no factible									

5.2.2 Pruebas factibles

Como se explicó anteriormente, el uso de la cuartilidad integrada no es factible en práctica, entonces se deberían usar estimadores. Los estadísticos de las pruebas factibles, utilizando la variación cuadripoder (E3) como estimador de la cuartilidad integrada, se presentan en la Gráfica 7 para M=288 para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV. Los gráficos en el lado izquierdo y en el medio muestran los estadísticos de la prueba lineal y la de cociente, respectivamente. Los gráficos de cuartiles de ambas pruebas se muestran en el lado derecho. Al comparar esta gráfica con la Gráfica 6 (el caso factible con el caso no factible), en los gráficos-QQ de cuartiles se puede observar un deterioro, especialmente para la prueba lineal.

En el Cuadro 5, se reportan el sesgo, la desviación estándar y la cobertura para el estadístico de la prueba lineal, utilizando la cuartilidad realizada (E1), la variación tripoder realizada con $r = s = u = 4/3$ (E2) y la variación cuadripoder realizada con $r = s = u = v = 1$ (E3) dado que M=288. En el Cuadro 6, se muestran los resultados para las pruebas de cociente factibles para M=288, utilizando E1, E2 y E3 para estimar la verdadera cuartilidad. En el caso factible, confirmando los resultados de los gráficos de cuartiles previos, las pruebas de cociente generan

resultados mucho mejores que las pruebas lineales. La variación tripoder y cuadripoder superan los otros estimadores cuando se prueba la existencia de brincos si el proceso es continuo. La variación bipoder y la versión saltada subestiman la presencia de los brincos.

En el caso, donde la cuarticidad integrada no es factible y no existen brincos en el proceso, la cuarticidad realizada parece ser el mejor estimador (sin embargo, cuando el componente de los brincos está presente, este estimador será el peor, como se explicó antes). Hay poco que elegir entre los otros dos estimadores, E2 y E3.

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
RBV	-0.086	0.997	93.5	-0.165	1.03	91.6	-0.173	1.04	91.3
RTV	-0.075	0.992	94.3	-0.154	1.02	92.1	-0.167	1.03	91.6
RQV	-0.076	0.999	94.8	-0.149	1.02	92.8	-0.167	1.04	91.7
RSBV	-0.103	1.01	94.4	-0.161	1.04	92.9	-0.175	1.05	92.2
Cuadro 5. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba lineal del cociente factible para M=288									

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
RBV	-0.041	.986	94.9	-0.110	.980	93.7	-0.113	.980	93.6
RTV	-0.015	.987	96.4	-0.094	.971	94.1	-0.099	.976	94.1
RQV	-0.007	.998	97.1	-0.087	.968	94.8	-0.097	.980	94.4
RSBV	-0.056	.994	95.0	-0.117	.985	94.1	-0.124	.989	94.0
Cuadro 6. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba del cociente factible para M=288									

5.3 Distribución alternativa

En esta sección, se agregará un componente de brincos al proceso simulado para evaluar la prueba para detectar brincos cuando éstos están presentes en el proceso de log-precios. Cada día se agrega el mismo número de brincos al proceso (se simularán mil días). Los brincos serán i.i.d. $N(0, \beta v/a)$ y se realizarán varias simulaciones con distintos valores de β para evaluar el desempeño de la prueba con distintos tamaños de los brincos. La prueba de una cola de la hipótesis se realiza cada día y el nivel de significancia es 5%. El Cuadro 7 reporta el sesgo, la desviación estándar y la cobertura para la prueba lineal no factible cuando se agrega un brinco cada día con $\beta = 50\%$ y $\beta = 20\%$. En este caso, la cobertura reporta el porcentaje de veces que se cometió un error tipo II, es decir, las veces cuando se aceptó la hipótesis nula en la presencia de brincos. Se puede observar que mientras mayor sea el tamaño de los brincos, más fácil será detectar un brinco. Mientras mayor sea M, mejor serán los resultados de la prueba de hipótesis. Casi no se detectan brincos cuando son pequeños, especialmente cuando la frecuencia de muestra es baja.

Para la prueba de cociente no factible, los resultados para cada uno de los estimadores (RV; RTV, RQV y RSBV) se reportan en el Cuadro 8 cuando se agrega un brinco cada día. De igual manera como en el caso de distribución nula, cuando se ejecuta la prueba no factible, no hay mucha

diferencia entre las pruebas lineales y las de cociente. Si el tamaño de los brinco es pequeño, es más difícil detectarlos. Como se esperó, cuando el valor de M aumenta, la tasa de aceptar la hipótesis nula disminuye. Nótese que las pruebas basadas en la variación bipoder realizada y su versión salteada parecen tener más poder que las basadas en otros estimadores. Este resultado se puede entender mal porque el verdadero tamaño de las pruebas puede ser diferente para cada estimador (en la sección previa se encontró que la distribución nula de las pruebas basadas en la variación tripoder y cuatridoper se ajusta mejor a los estadísticos de la prueba).

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
50%									
RBV	-0.728	1.75	78.1	-1.55	3.21	69.8	-3.49	6.42	55.0
RTV	-0.639	1.60	79.5	-1.36	2.70	70.5	-2.91	5.19	56.5
RQV	-0.623	1.55	79.7	-1.27	2.47	71.1	-2.65	4.66	57.7
RSBV	-0.796	1.82	76.9	-1.54	3.05	69.2	-3.51	6.48	54.9
20%									
RBV	-0.469	1.25	85.2	-0.190	1.17	89.9	-0.389	1.49	87.3
RTV	-0.407	1.23	86.2	-0.143	1.13	91.4	-0.327	1.35	88.5
RQV	-0.384	1.22	86.8	-0.139	1.14	90.7	-0.291	1.28	90.1
RSBV	-0.505	1.28	83.9	-0.224	1.15	90.6	-0.399	1.46	87.0
Cuadro 7. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba lineal no factible cuando se añade un brinco cada día.									

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
50%									
RBV	-0.529	1.15	81.8	-0.967	1.63	73.5	-2.18	2.99	57.0
RTV	-0.467	1.11	84.3	-0.862	1.44	75.2	-1.84	2.48	59.3
RQV	-0.459	1.11	86.8	-0.807	1.36	76.8	-1.68	2.26	60.5
RSBV	-0.579	1.21	9.6	-0.965	1.60	73.1	-2.19	3.03	57.8
20%									
RBV	-0.421	1.06	86.7	-0.172	1.08	90.8	-0.331	1.24	88.2
RTV	-0.361	1.04	88.4	-0.129	1.06	92.4	-0.278	1.15	90.0
RQV	-0.347	1.04	89.9	-0.123	1.07	92.0	-0.246	1.12	91.0
RSBV	-0.468	1.12	84.6	-0.203	1.07	91.3	-0.344	1.21	88.4
Cuadro 8. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba del cociente no factible cuando se añade un brinco cada día.									

Entonces, se ejecutarán las pruebas factibles utilizando los tres estimadores para la cuartacidad integrada ((E1), (E2), y (E3)). El Cuadro 9 muestra el comportamiento de muestra finita cuando $M=288$. Inmediatamente, se puede observar que la cuartacidad realizada no genera buenos resultados cuando hay brinco en el proceso. De igual manera como la varianza realizada no produce una buena estimación de la varianza integrada cuando existen brinco, la cuartacidad realizada estima mal la cuartacidad integrada. La cuartacidad realizada incorpora la variación por el componente

de los brincos y no solamente la variación por el componente continuo. Sin embargo, los otros dos estimadores, E2 y E3, generan resultados buenos y similares.

El Cuadro 10 muestra el comportamiento de muestra finita para la prueba de cociente factible cuando $M=288$. Cuando se usan los estimadores E2 y E3 para la cuartilidad integrada, los resultados son buenos y muy similares a los obtenidos con las pruebas no factibles. En contraste, cuando se utiliza la cuartilidad realizada como estimador, la hipótesis nula no se rechaza muy frecuentemente.

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
50%									
RBV	-0.851	1.05	72.9	-3.22	5.72	55.4	-3.38	6.06	54.5
RTV	-0.725	0.961	84.6	-2.69	4.61	56.8	-2.83	4.91	56.6
RQV	-0.669	0.927	90.4	-2.44	4.13	58.4	-2.58	4.40	57.7
RSBV	-0.843	1.05	73.1	-3.19	5.71	55.9	-3.37	6.09	55.3
20%									
RBV	-0.218	1.03	91.5	-0.427	1.45	86.0	-0.436	1.47	85.7
RTV	-0.179	0.998	93.8	-0.365	1.31	87.9	-0.379	1.33	87.3
RQV	-0.156	0.988	94.8	-0.323	1.25	88.9	-0.343	1.27	88.5
RSBV	-0.235	0.995	92.5	-0.415	1.40	86.2	-0.433	1.42	86.2
Cuadro 9. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba lineal factible añadiendo un brinco cada día, para $M=288$.									

M	Sesgo	E1 DE	Cob	Sesgo	E2 DE	Cob	Sesgo	E3 DE	Cob
50%									
RBV	-0.667	0.875	92.8	-2.10	2.88	58.2	-2.16	2.96	57.7
RTV	-0.549	0.808	96.6	-1.72	2.32	60.6	-1.79	2.42	59.9
RQV	-0.498	0.782	97.6	-1.54	2.07	62.4	-1.61	2.17	61.1
RSBV	-0.656	0.877	93.3	-2.07	2.87	59.2	-2.14	2.97	58.5
20%									
RBV	-0.185	0.956	94.2	-0.328	1.22	88.4	-0.331	1.23	88.3
RTV	-0.143	0.918	96.6	-0.267	1.13	90.6	-0.274	1.13	90.4
RQV	-0.117	0.906	97.3	-0.228	1.08	91.9	-0.239	1.02	91.3
RSBV	-0.203	0.924	95.8	-0.327	1.16	88.7	-0.337	1.18	88.5
Cuadro 10. Sesgo, desviación estándar y cobertura (nivel del 95%) de la prueba del cociente factible añadiendo un brinco cada día, para $M=288$.									

5.4 Pruebas ajustadas por tamaño

Cuando se realizan las pruebas previas de los brincos, incluso si se fija un nivel de confianza de 95%, el verdadero tamaño de las pruebas no será exactamente 5%. Eso se debe al hecho de que las distribuciones asintóticas no se ajusten adecuadamente a los estadísticos de la prueba cuando se usan muestras finitas. Este problema es más acentuado cuando se usan la variación bipoder y su versión salteada. Por lo tanto, es inadecuado comparar los resultados obtenidos de las pruebas donde los brincos fueron agregados al proceso de log-precios. Cada prueba tiene un tamaño distinto dependiendo del estimador y del tamaño de la muestra utilizada.

Se tienen que encontrar los valores críticos reales que corresponden al nivel de confianza deseado. Entonces, dados estos valores críticos, las pruebas para los brincos ajustadas por el tamaño se pueden realizar y comparar.

Utilizando simulaciones de Monte Carlo, se encuentran los verdaderos valores críticos para las pruebas de brincos con el tamaño de 5% para cada estadístico de prueba y distintos valores de M . En el Cuadro 11, los valores críticos (CV, por sus siglas en inglés) de las pruebas lineales no factibles se muestran con los cuantiles de la distribución normal (NQ, por sus siglas en inglés) correspondientes. Mientras mejor sea el ajuste de la distribución asintótica, más cercanos serán los valores críticos al valor del 95-ésimo cuantil. Entonces, utilizando las series simuladas donde se agregó un brinco cada día al proceso de log-precios, se puede repetir la prueba para brincos con un tamaño dado fijo de 5%. En el Cuadro 11, se presenta el poder de la prueba (Pow) para distintos tamaños de brincos ($\beta = 50\%$ y $\beta = 20\%$), es decir, el porcentaje de veces cuando se rechaza la hipótesis nula dado que existen brincos en el proceso. En el Cuadro 12, se presentan los resultados para las pruebas de cociente no factibles.

Con los resultados en los cuadros, se puede confirmar que los estadísticos de las pruebas con base en la variación tripoder y cuadripoder tienen un mejor comportamiento de muestras bajo la distribución nula que las basadas en la variación bipoder y su versión salteada. También, los estadísticos de prueba de cociente tienen un mejor comportamiento de muestra finita que los de las pruebas lineales. Sin embargo, la conclusión, con respecto a cuál prueba tiene mayor poder, es obvia. Al parecer, cuando la frecuencia de muestra es baja, las pruebas basadas en la variación tripoder y cuadripoder tienen mayor poder. Sin embargo, parece que eso no es cierto en el caso de frecuencias altas, donde las pruebas basadas en la variación bipoder y su versión salteada parecen tener mayor poder. También en el caso cuando se agregan los brincos más pequeños, la variación tripoder y cuadripoder superan la variación bipoder y lo contrario ocurre cuando se agregan grandes brincos al proceso.

M	CV	12	Pot	Pot	CV	72	Pot	Pot	CV	288	Pot	Pot
β		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%
RBV	2.46	99.3	0.092	0.063	1.93	97.3	0.199	0.057	1.85	96.8	0.343	0.085
RTV	2.27	98.8	0.095	0.064	1.84	96.7	0.195	0.061	1.75	96.1	0.346	0.080
RQV	2.09	98.2	0.106	0.067	1.80	96.4	0.184	0.069	1.71	95.7	0.337	0.077
RSBV	2.63	99.6	0.093	0.056	1.88	97.1	0.202	0.062	1.83	96.7	0.353	0.076
Cuadro 11. Valores críticos (5%), cuantiles normales y poder de las pruebas lineales no factibles añadiendo un brinco cada día.												

M	CV	12	Pot	Pot	CV	72	Pot	Pot	CV	288	Pot	Pot
β		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%
RBV	2.46	99.3	0.092	0.063	1.93	97.3	0.199	0.057	1.85	96.8	0.343	0.085
RTV	2.27	98.8	0.095	0.064	1.84	96.7	0.195	0.061	1.75	96.1	0.346	0.080
RQV	2.09	98.2	0.106	0.067	1.80	96.4	0.184	0.069	1.71	95.7	0.337	0.077
RSBV	2.63	99.6	0.093	0.056	1.88	97.1	0.202	0.062	1.83	96.7	0.353	0.076
Cuadro 12. Valores críticos (5%), cuantiles normales y poder de las pruebas del cociente no factibles añadiendo un brinco cada día.												

En los Cuadros 13 y 14 se presentan los valores críticos verdaderos, los cuantiles de distribución normal correspondientes y el poder de las pruebas lineales y de cociente utilizando cada estimador de la cuartecidad realizada (E1, E2, E3) cuando $M=288$. Inmediatamente, se puede observar que se obtiene el menor poder cuando se usan el estimador E1. Como se esperó, los otros dos estimadores generan mejores y muy similares resultados. También, no hay que elegir mucho entre las pruebas lineales y de cociente.

M	CV	E1	Pot	Pot	CV	E2	Pot	Pot	CV	E3	Pot	Pot
β		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%
RBV	1.78	96.3	0.164	0.058	2.00	97.8	0.331	0.077	2.03	97.9	0.336	0.078
RTV	1.70	95.6	0.117	0.051	1.96	97.5	0.318	0.065	1.98	97.7	0.332	0.068
RQV	1.66	95.2	0.089	0.053	1.90	97.2	0.311	0.063	1.96	97.6	0.306	0.060
RSBV	1.77	96.2	0.167	0.048	1.96	97.5	0.333	0.068	1.98	97.7	0.338	0.070
Cuadro 13. Valores críticos (5%), cuantiles normales y poder de las pruebas lineales factibles añadiendo un brinco cada día. $M=288$.												

M	CV	E1	Pot	Pot	CV	E2	Pot	Pot	CV	E3	Pot	Pot
β		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%		NQ	50%	20%
RBV	1.63	94.9	0.078	0.052	1.79	96.4	0.330	0.078	1.80	96.5	0.331	0.077
RTV	1.52	93.6	0.070	0.042	1.73	95.9	0.315	0.064	1.75	96.1	0.317	0.062
RQV	1.46	92.8	0.062	0.051	1.65	95.2	0.310	0.062	1.70	95.6	0.307	0.063
RSBV	1.63	94.9	0.090	0.046	1.78	96.3	0.327	0.067	1.77	96.2	0.337	0.068
Cuadro 14. Valores críticos (5%), cuantiles normales y poder de las pruebas del cociente factibles añadiendo un brinco cada día. $M=288$.												

De esta sección se puede concluir que las variaciones tripoder y cuadripoder realizadas producen mejores resultados bajo la hipótesis nula. Sin embargo, cuando se agrega el componente de los brinco al proceso de los log-precios, la conclusión, con respecto a cuál prueba es mejor, no es evidente. El ruido de la microestructura no se agregó a estas simulaciones, por lo tanto, se requiere investigar más para evaluar el poder de la prueba basada en estos estimadores con series contaminadas.

6 Datos empíricos

6.1 Prueba para detectar brinco

Para ilustrar empíricamente la prueba para detectar los brinco, se utilizará la serie Dólar de Estados Unidos/Deutsche Mark de Alemania (DM), extensamente utilizada en documentos previos (véase, por ejemplo, Andersen, Bollerslev, Diebold y Labys (2001), Barndorff-Nielsen y Shephard (2002)). Esta serie abarca el periodo del 1 de diciembre de 1986 al 30 de noviembre de 1996 y reporta cada cinco minutos el tipo de cambio más reciente en el registro de Reuters. *Olsen and Associates* en Zúrich proporcionaron esta base de datos (véase Dacorogna, Gencay, Müller, Olsen y Pictet (2001)).

En esta sección, se estudiará la prueba de cociente factible para detectar brinco utilizando la variación cuadripoder realizada con $r = s = u = v = 1$ (E3) para estimar la verdadera cuartecidad. En la Gráfica 8 se muestra el estadístico de cociente

$$\delta^{-1/2} \left(\frac{\mu_r^{-n} \{Y_\delta\}_t^{[r_1, \dots, r_n]}}{[Y_\delta]_t^{[2]}} - 1 \right)$$

donde $r = r_1 = \dots r_n$ y $\sum_{i=1}^n r_i = 2$, junto con el doble error estándar para los primeros 250 días para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV con $M=144$. En todos de estos casos, se puede observar un número considerable de valores por debajo del doble error estándar, indicando la existencia de brincos en las series. A simple vista, las gráficas no permiten conclusiones sobre los distintos estimadores, por lo que se reportan más resultados en el Cuadro 15.

El Cuadro 15 muestra los distintos valores de M , la suma de los primeros cinco coeficientes de las series Dólar/DM y los valores promedio de la muestra de la varianza realizada y del la variación bipoder, tripoder, cuatripoder y su versión salteada de la variación bipoder. También muestra las proporciones de rechazos de la hipótesis nula a nivel de 5% y 1% para cada uno de estos estimadores.

Primero, se puede observar cómo la suma de coeficientes aumenta cuando el valor de M aumenta, llegando hasta valores altos de $M=144$ (-.056) y $M=288$ (-.092) que se explica posiblemente por los efectos de microestructura. Este hecho seguramente afecta el número de rechazos de la hipótesis nula, dado que disminuye cuando $M=288$ para la mayoría de los estimadores.

Dadas las simulaciones en la sección previa, se sabe que las pruebas basadas en la variación tripoder y cuatripoder realizada tienen tamaños mayores (con un nivel de confianza dada) en comparación con las pruebas basadas en la variación bipoder realizada cuando se usan las muestras finitas. Eso puede explicar los valores en el Cuadro 15 para $M=12, 24$ y 72 . Este hecho invierte cuando $M=144$ y 288 , tal vez debido a los efectos de microestructura. Lo anterior presenta una primera razón para pensar que la variación tripoder y cuatripoder es más robusta en la presencia de este ruido de microestructura. El sesgo de la versión salteada de la variación bipoder realizada es casi el mismo como el de la variación tripoder realizada. Sin embargo, la proporción de rechazos de la hipótesis nula es mayor. De hecho, la proporción de este estimador es la mayor en comparación con todos los demás estimadores y es el único estimador donde el número de rechazos no se reduce cuando $M=288$.

Aunque lo anterior presenta cierta información sobre el comportamiento de estos estimadores en la presencia del ruido de la microestructura, se requiere más investigación para obtener conclusiones más firmes. El ruido de la microestructura posiblemente cubre el componente de los brincos. Por lo tanto, se puede esperar que, bajo este ruido, las pruebas subestimaran la presencia de brincos. Consecuentemente, lo que se puede concluir en esta sección es que la serie dólar/DM ciertamente incluye brincos.

M	corr	RV	BV	5%r	1%r	TV	5%r	1%r	QV	5%r	1%r	SB	5%r	1%r
12	.001	.459	.387	.183	.081	.357	.164	.043	.339	.140	.024	.357	.218	.098
24	.002	.463	.396	.207	.101	.372	.192	.078	.354	.177	.051	.373	.232	.118
72	-.001	.488	.442	.224	.120	.416	.233	.109	.402	.217	.089	.415	.283	.157
144	-.056	.511	.473	.228	.116	.448	.250	.126	.432	.255	.113	.442	.341	.186
288	-.092	.532	.502	.188	.095	.481	.227	.108	.467	.252	.107	.471	.368	.211

Cuadro 15. Suma de los primeros cinco coeficientes de correlación de las series dólar/DM (corr.). Valor promedio de la varianza realizada (RV), realizada bipoder (BV), tripoder (TV), y variación salteada bipoder (SB). Proporción de los rechazos de las hipótesis nulas para los niveles de 5% y 1%.

6.2 Estudio de caso

Como se explicó antes, un valor alto de la varianza realizada se puede explicar por la presencia de brincos o por la alta volatilidad en el componente continuo. De igual manera como en Barndorff-Nielsen y Shephard (2006), se compararán dos días, uno cuando el valor extremo de la variación cuadrática se debe al componente de los brincos y otro día, cuando se debe al componente continuo. Se comparará el comportamiento de cada uno de los estimadores de la varianza integrada en estos días.

En uno de los días, 15 de enero de 1988, el tipo de cambio dólar/DM aumentó mucho (Gráfica 9, gráfica superior). Este aumento se refleja en la varianza realizada y no en los otros estimadores de la varianza integrada, indicando la presencia del componente de los brincos. En el presente caso, el valor alto estimado de la variación cuadrática se debe a la varianza integrada, por lo tanto, no se puede esperar que se deba a un brinco, pero más bien a la alta volatilidad.

En la Gráfica 10, se observa el estadístico t de cociente de los días alrededor del 15 de enero de 1988. En todos los casos (a) RBV, b) RTQ, c) RQV y d) RSBV) no hay duda sobre la presencia de un brinco, los estadísticos están significativamente por debajo de los valores críticos de 99%. Se rechaza la hipótesis nula de no brincos, independientemente del estimador utilizado.

En la Gráfica 11, se muestra, otra vez, el estadístico t de cociente, junto con los valores críticos de 99%, utilizando los cuatro estimadores para los días alrededor del 19 de agosto de 1991. En todos los casos, se rechaza la presencia de brincos, y en lugar de eso, el aumento en la variación cuadrática se debe al movimiento rápido en el tipo de cambio.

Nótese que todos los estimadores producen el mismo resultado para el 19 de agosto, pero no lo hacen para los días alrededor de esta fecha. Cuando se usa la versión salteada de la variación bipoder realizada, se encuentran tres brincos durante el periodo analizado.

7 Conclusiones

Un estimador de la varianza integrada comúnmente utilizado y bien estudiado es la varianza realizada. Sin embargo, el hecho de que los retornos absolutos sean más robustos que los cuadrados cuando se estima la variabilidad de los retornos, requiere la investigación de la generalización de la variación cuadrática, llamada variación multipoder. Originalmente, Barndorff-Nielsen y Shephard (2004a) comprobaron que esta medida, específicamente la variación bipoder, es robusta a brincos. En el caso de un proceso de volatilidad estocástica más un brinco infrecuente, la variación cuadrática del componente de los brincos se puede estimar por la diferencia entre la varianza realizada y la variación bipoder realizada. Este hecho proporciona una herramienta para probar la presencia de brincos en el proceso de log-precios (como en Andersen, Bollerslev y Diebold (2003), Barndorff-Nielsen y Shephard (2006), Huang y Tauchen (2005), Tauchen y Zhou (2006)). Los estimadores alternativos basados en la variación multipoder también son robustos a brincos, es decir, la variación tripoder y cuadripoder.

El objetivo del presente documento es estudiar estos estimadores alternativos para probar la presencia de brincos en el proceso de log-precios. Para hacer eso, se proporcionaron las distribuciones asintóticas necesarias (para las diferencias entre la varianza realizada y la variación tripoder realizada, la varianza realizada y la variación cuadripoder realizada, y la varianza realizada y la variación bipoder salteada realizada) y se desarrollaron pruebas lineales y de cociente para detectar

brincos. Según el conocimiento del autor, esa es la primera vez que se implementaron pruebas para detectar brincos, utilizando la variación tripoder, cuatripoder y la versión salteada de la variación bipoder.

Utilizando datos simulados, se pudo determinar que las variaciones realizadas tripoder y cuatripoder son confiables, ya que generan incluso mejores resultados que la variación bipoder realizada bajo la hipótesis nula. Los estadísticos de las pruebas basadas en la variación tripoder y cuatripoder parecen tener un mejor comportamiento de muestras finitas, sin embargo, no es obvio cuál prueba es la más poderosa. Como se esperó, el desempeño de todas las pruebas mejora cuando se utilizan mayores valores de M .

Cuando se agregan brincos al proceso, el poder de las pruebas dependió de la frecuencia de la muestra y del tamaño de los brincos. Por lo tanto, no se puede llegar a una conclusión sobre cuál estimador tiene el mayor poder. La agregación de procesos de brincos de intensidad finita o infinita y la magnitud de los brincos obviamente determinarán el poder de las pruebas y la robustez de las teorías asintóticas. Este aspecto requiere más atención y Barndorff-Nielsen, Shephard y Winkel (2005) examinaron este tema recientemente.

Utilizando una prueba factible, se requiere estimar la cuartacidad integrada. Bajo la presencia de brincos, la cuartacidad realizada genera un gran número de rechazos de la hipótesis nula, dado que estima mal la cuartacidad integrada. Los otros estimadores producen mejores resultados.

Las pruebas para detectar brincos también se aplicaron a los datos empíricos, la serie dólar/DM. Cuando se trabaja con datos reales, los resultados se tienen que interpretar con cuidado, dado que el proceso de precios está contaminado por efectos de microestructura. A pesar de que las pruebas previas para detectar brincos se basaron en resultados asintóticos, su implementación, al utilizar valores de M extremadamente altos, puede generar resultados malos ya que este ruido se acumula. Mientras mayor sea el valor de M utilizado, más cercano se llegará a los resultados asintóticos, pero también el efecto de microestructura interrumpirá más en el verdadero proceso.

Cuando se utiliza la versión salteada de la variación bipoder realizada, es decir la variación bipoder salteada realizada y cuando se consideran menos las observaciones adyacentes, es decir, la variación tripoder y cuatripoder, entonces, posiblemente el problema se reduce, pero se requiere más investigación en el futuro para evaluar la efectividad de estos estimadores en la presencia del ruido de la microestructura.

Gráfica 1. Izquierda: Varianza real y variación bipoder realizada.
 En medio: variación bipoder realizada menos la varianza real e intervalo de confianza.
 Derecha: Gráfico-QQ de la variación bipoder realizada del error.

Gráfica 2. Izquierda: varianza real y variación tripoder realizada.
 En medio: variación tripoder realizada menos varianza real e intervalo de confianza.
 Derecha: Gráfico-QQ de la variación tripoder realizada del error.

Gráfica 3. Izquierda: varianza real y variación cuatripoder realizada.
 En medio: variación cuatripoder realizada menos varianza real e intervalo de confianza.
 Derecha: Gráfico-QQ de la variación cuatripoder realizada del error.

Gráfica 4. Izquierda: varianza real y versión saltada de la variación bipoder realizada.
 En medio: versión saltada de la variación bipoder realizada menos la varianza real
 y el intervalo de confianza. Derecha: Gráfico-QQ de la versión saltada de la
 bipoder realizada del error.

Gráfica 5. Simulación de un brinco, mas la difusión basada en un modelo SV, estimando la varianza integrada (figuras de la izquierda) y la variación cuadrática del componente del brinco (figuras de la derecha) con $M=288$.

Las filas corresponden a RBV, RTV, RQV y RSBV, respectivamente.

Gráfica 6. Estadísticos t, más dos veces sus errores estándar de la distribución nula para la lineal no-factible (figuras de la izquierda) y pruebas de cociente (figuras del centro) para $M=288$ y para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV. Al lado derecho, el Gráfico-QQ.

Gráfica 7. Estadísticos t, mas dos veces sus errores estándar, de las simulaciones de la distribución nula para la lineal factible (lado izquierdo) y pruebas de cociente (al centro) para $M=288$ y para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV. En el lado derecho están los gráficos-QQ.

Gráfica 9. Tipo de cambio dólar/marco desde 5 de enero hasta 18 de enero de 1988 (arriba) y desde 13 de agosto hasta 25 de agosto de 1991 (abajo). En la gráfica de arriba la varianza realizada es grande debido a una componente de brinco, en tanto que en la de abajo se debe a la alta volatilidad de la componente continua.

Gráfica 10. 5 de enero a 18 de enero de 1988. Cociente de los estadísticos t y valores críticos a 99% de las series dólar/DM para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV con $M=288$. El 15 de enero ocurrió un brinco.

Gráfica 11. 13 de agosto hasta 25 de agosto de 1991. Cociente de los estadísticos t y valores críticos a 99% de las series dólar/DM para a) RBV, b) RTV, c) RQV y d) RSBV con $M=288$. El 19 de agosto, el valor grande de la varianza realizada es causada por la alta volatilidad en el componente continuo no por algún brinco.

8 Apéndice: Demostraciones

Para las siguientes tres pruebas, se define primero la variación multipoder generalizada como

$$Y^M(g)_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\lfloor Mt \rfloor} \left(\prod_{i'=1}^{I \wedge (i+1)} g_{i'}(\sqrt{M} y_{i+i'-1}) \right).$$

Como en Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij y Shephard (2005) y Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod y Shephard (2006), se asume que todos los g_i son continuos con, a lo más, el crecimiento polinómico y que $Y \in SVSM^c$. Entonces, si $g_i(y) = |y|^{2/I}$, se obtiene

$$Y(g)_t = \mu_{2/I}^I \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij y Shephard (2005) muestran que

$$\sqrt{M}(Y^M(g)_t - Y(g)_t) \rightarrow \int_0^t \sqrt{\omega_I^2 \sigma_s^4} dB_s$$

donde

$$\omega_I^2 = Var \left(\prod_{i=1}^I |u_i|^{2/I} \right) + 2 \sum_{j=1}^{I-1} Cov \left(\prod_{i=1}^I |u_i|^{2/I}, \prod_{i=1}^I |u_{i+j}|^{2/I} \right)$$

A.1 Variación Tripoder

De interés principal es la distribución del siguiente objeto

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3, 2/3, 2/3]}.$$

Para obtener dicha distribución, se tiene que encontrar la distribución conjunta del error de la varianza realizada y del error de la variación tripoder realizada, es decir, la distribución de

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ \mu_{2/3}^{-3} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j|^{2/3} |y_{j+1}|^{2/3} |y_{j+2}|^{2/3} - \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{array} \right).$$

Según Barndorff-Nielsen y Shephard (2002), es conocido que

$$\sqrt{\frac{t}{\delta \int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \xrightarrow{L} N(0, 2).$$

Un caso particular de la ecuación (2) resulta en

$$\sqrt{\frac{t}{\delta \int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j|^{2/3} |y_{j+1}|^{2/3} |y_{j+2}|^{2/3} - \mu_{2/3}^3 \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \xrightarrow{L} N(0, \omega_3^2)$$

donde

$$\begin{aligned}\omega_3^2 &= Var(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}) \\ &\quad + 2Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u'|^{2/3} |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3}) \\ &\quad + 2Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3} |u^{(IV)}|^{2/3})\end{aligned}$$

donde u, u', u'' y u''' son i.i.d. normal $(0,1)$.

Recordando que $\nu_j^2 = \int_{\delta(j-1)}^{\delta j} \sigma_s^2 ds$, entonces si $A_t = 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\delta^{-1} Cov \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} \left(v_j^{2/3} v_{j+1}^{2/3} v_{j+2}^{2/3} (|u_j|^{2/3} |u_{j+1}|^{2/3} |u_{j+2}|^{2/3} - \mu_{2/3}^3) \right) \right) \\ \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \int_0^t \sigma_s^4 ds\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}k_1 &= Var(u^2) \\ k_2 &= k_3 = 3Cov(u^2, |u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}) \\ k_4 &= \omega_3^2 = Var(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}) \\ &\quad + 2Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u'|^{2/3} |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3}) \\ &\quad + 2Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3} |u^{(IV)}|^{2/3})\end{aligned}$$

Eso implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ \mu_{2/3}^{-3} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j|^{2/3} |y_{j+1}|^{2/3} |y_{j+2}|^{2/3} - \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{array} \right) \\ \xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} k_1 & \mu_{2/3}^{-3} k_2 \\ \mu_{2/3}^{-3} k_3 & \mu_{2/3}^{-6} k_4 \end{pmatrix} \right) \\ \simeq N \left(0, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3.0613 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

al utilizar los resultados de que

$$\begin{aligned}
Var(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}) &= \mu_{4/3}^3 - \mu_{2/3}^6 \\
Cov(u^2, |u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}) &= \mu_{8/3} \mu_{2/3}^2 - \mu_{2/3}^3 \\
Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u'|^{2/3} |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3}) &= \mu_{4/3}^2 \mu_{2/3}^2 - \mu_{2/3}^6 \\
Cov(|u|^{2/3} |u'|^{2/3} |u''|^{2/3}, |u''|^{2/3} |u'''|^{2/3} |u^{(IV)}|^{2/3}) &= \mu_{4/3} \mu_{2/3}^4 - \mu_{2/3}^6
\end{aligned}$$

donde $\mu_r = (E |x|^r)$.

Con esta distribución conjunta, la teoría del límite necesaria para la prueba de brincos se puede obtener

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left([Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{2/3}^{-3} \{Y_\delta\}_t^{[2/3, 2/3, 2/3]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{TV})$$

donde

$$\vartheta_{TV} = \mu_{4/3} \mu_{2/3}^{-2} (\mu_{4/3}^2 \mu_{2/3}^{-4} + 2\mu_{4/3} \mu_{2/3}^{-2} - 2) - 7 \simeq 1.0613$$

A.2 Variación Cuadripoder

En esta sección, el interés principal es la distribución del siguiente objeto

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]}.$$

Se tiene que encontrar la siguiente distribución conjunta

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} \sqrt{|y_j| |y_{j+1}| |y_{j+2}| |y_{j+3}|} - \mu_{1/2}^4 \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{array} \right).$$

De la ecuación (2) se obtiene que

$$\sqrt{\frac{t}{\delta \int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} |y_j|^{1/2} |y_{j+1}|^{1/2} |y_{j+2}|^{1/2} |y_{j+3}|^{1/2} - \mu_{1/2}^4 \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \xrightarrow{L} N(0, \omega_4^2)$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_4^2 &= Var(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}) \\
&+ 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u'| |u''| |u'''| |u^{(IV)}|}) \\
&+ 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u''| |u'''| |u^{(IV)}| |u^{(V)}|}) \\
&+ 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u'''| |u^{(IV)}| |u^{(V)}| |u^{(VI)}|})
\end{aligned}$$

Si $v_j^2 = \int_{\delta(j-1)}^{\delta j} \sigma_s^2 ds$ y $A_t = 0$ entonces,

$$\delta^{-1} Cov \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} \left(\frac{v_j^2(u_j^2 - 1)}{\sqrt{v_j v_{j+1} v_{j+2} v_{j+3}} (\sqrt{|u_j| |u_{j+1}| |u_{j+2}| |u_{j+3}|} - \mu_{1/2}^4)} \right) \right) \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \int_0^t \sigma_s^4 ds$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= Var(u^2) \\ k_2 &= k_3 = 4Cov(u^2, \sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}) \\ k_4 &= \omega_4^2 = Var(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}) \\ &\quad + 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u'| |u''| |u'''| |u^{(IV)}|}) \\ &\quad + 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u''| |u'''| |u^{(IV)}| |u^{(V)}|}) \\ &\quad + 2Cov(\sqrt{|u| |u'| |u''| |u'''|}, \sqrt{|u'''| |u^{(IV)}| |u^{(V)}| |u^{(VI)}|}) \end{aligned}$$

Eso implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\frac{\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds}{\mu_{1/2}^{-4} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 3} \sqrt{|y_j| |y_{j-1}| |y_{j-2}| |y_{j-3}|} - \int_0^t \sigma_s^2 ds} \right) &\xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} k_1 & \mu_{1/2}^{-4} k_2 \\ \mu_{1/2}^{-4} k_3 & \mu_{1/2}^{-8} k_4 \end{pmatrix} \right) \\ &\simeq N \left(0, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3.37702 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} Var(|u|^{1/2} |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2}) &= \mu_1^4 - \mu_{1/2}^8 \\ Cov(u^2, |u|^{1/2} |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2}) &= \mu_{5/2} \mu_{1/2}^3 - \mu_{1/2}^4 \\ Cov(|u|^{1/2} |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2}, |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2} |u^{(IV)}|^{1/2}) &= \mu_1^3 \mu_{1/2}^2 - \mu_{1/2}^8 \\ Cov(|u|^{1/2} |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2}, |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2} |u^{(IV)}|^{1/2} |u^{(V)}|^{1/2}) &= \mu_1^2 \mu_{1/2}^4 - \mu_{1/2}^8 \\ Cov(|u|^{1/2} |u'|^{1/2} |u''|^{1/2} |u'''|^{1/2}, |u'''|^{1/2} |u^{(IV)}|^{1/2} |u^{(V)}|^{1/2} |u^{(VI)}|^{1/2}) &= \mu_1 \mu_{1/2}^6 - \mu_{1/2}^8 \end{aligned}$$

Finalmente, se puede obtener la distribución del límite que originalmente buscamos

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left([Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_{1/2}^{-4} \{Y_\delta\}_t^{[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{QV})$$

donde

$$\vartheta_{QV} = \mu_1 \mu_{1/2}^{-2} (\mu_1^3 \mu_{1/2}^{-6} + 2\mu_1^2 \mu_{1/2}^{-4} + 2\mu_1 \mu_{1/2}^{-2} - 2) - 9 \simeq 1.37702$$

y $\mu_r = (E|x|^r)$.

A.3 Variación Bipoder Salteada

Por último, se obtendrá la distribución asintótica de la diferencia de los errores de la varianza realizada y de los errores de la versión salteada de la variación bipoder realizada

$$[Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,0,1]}$$

Se tiene que encontrar la siguiente distribución conjunta

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j| |y_{j+2}| - \mu_1^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{array} \right)$$

De la ecuación (2) se obtiene que

$$\sqrt{\frac{t}{\delta \int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j| |y_{j+2}| - \mu_1^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \xrightarrow{L} N(0, \omega_{2SV}^2)$$

donde

$$\omega_{2SV}^2 = Var(|u| |u''|) + 2Cov(|u| |u''|, |u''| |u^{(IV)}|)$$

Nótese que el término $Cov(|u| |u''|, |u'| |u'''|)$ no está incluido porque es igual a cero

Dado que $\nu_j^2 = \int_{\delta(j-1)}^{\delta j} \sigma_s^2 ds$ y $A = 0$, entonces se puede obtener que

$$\delta^{-1} Cov \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} \left(\frac{v_j^2 (u_j^2 - 1)}{\sqrt{v_j^2} \sqrt{v_{j+2}^2} (|u_j| |u_{j+2}| - \mu_1^2)} \right) \right) \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \int_0^t \sigma_s^4 ds$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= Var(u^2) \\ k_2 &= k_3 = 2Cov(u^2, |u| |u''|) \\ k_4 &= \omega_{2SV}^2 = Var(\sqrt{|u| |u''|}) + 2Cov(|u| |u''|, |u''| |u^{(IV)}|) \end{aligned}$$

Entonces, la distribución conjunta se puede expresar como

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \int_0^t \sigma_s^4 ds} \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} y_j^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ \mu_1^{-2} \sum_{j=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor - 2} |y_j| |y_{j+2}| - \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{array} \right) \xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} k_1 & \mu_1^{-2} k_2 \\ \mu_1^{-2} k_3 & \mu_1^{-4} k_4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\simeq N\left(0, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2.60907 \end{pmatrix}\right)$$

ya que

$$\begin{aligned} Var(u^2) &= 2 \\ Var(|u'| |u''|) &= 1 - \mu_1^4 \\ Cov(|u| |u''|, |u''| |u^{(IV)}|) &= \mu_1^2(1 - \mu_1^2) \\ Cov(u^2, |u| |u''|) &= \mu_3\mu_1 - \mu_1^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la teoría del límite es

$$\frac{1}{\delta^{1/2} \sqrt{\int_0^t \sigma_s^4 ds}} \left([Y_\delta]_t^{[2]} - \mu_1^{-2} \{Y_\delta\}_t^{[1,0,1]} \right) \xrightarrow{L} N(0, \vartheta_{SBV})$$

donde $\vartheta_{SBV} = \mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5 \simeq 0.60907$ y $\mu_r = (E |x|^r).$

9 Referencias

1. Andersen, T. G. y T. Bollerslev (1998). Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economics Review* 39, 885-905.
2. Andersen, T. G., T. Bollerslev y F. X. Diebold (2003). Some like it smooth, and some like it rough: untangling continuous and jump components in measuring, modelling and forecasting asset return volatility. Documento no publicado: Economics Department, Duke University.
3. Andersen, T. G., T. Bollerslev y F. X. Diebold (2005). Parametric and nonparametric measurements of volatility. En Y. Aït-Sahalia y L. P. Hansen (Eds.), *Handbook of Financial Econometrics*. Amsterdam: Elsevier Science B.V.
4. Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold y H. Ebens (2001). The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics* 61, 43-76.
5. Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold y P. Labys (2001). The distribution of exchange rates volatility. *Journal of American Statistical Association* 96, 42-55.
6. Barndorff-Nielsen, O. E., S. E. Graversen, J. Jacod, M. Podolskij y N. Shephard (2005). A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales. En Y. Kabanov y R. Lipster (Eds.), *From Stochastic Analysis to Mathematical Finance*, Festschrift for Albert Shiryaev. New York: Springer Verlag.
7. Barndorff-Nielsen, O. E., S. E. Graversen, J. Jacod y N. Shephard (2006). Limit theorems for bipower variation in Financial econometrics. *Econometric Theory* 22, 677-719.
8. Barndorff-Nielsen, O. E. y N. Shephard (2001). Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in Financial economics (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 63, 167-241.
9. Barndorff-Nielsen, O. E. y N. Shephard (2002). Econometric analysis of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 64, 253-280.
10. Barndorff-Nielsen, O. E. y N. Shephard (2003). Realised power variation and stochastic volatility. *Bernoulli* 9, 243-265.
11. Barndorff-Nielsen O. E. y N. Shephard (2004a). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion). *Journal of Financial Econometrics* 2, 1-48.
12. Barndorff-Nielsen, O. E. y N. Shephard (2004b). Econometric analysis of realised covariation: high frequency covariance, regression and correlation in Financial economics. *Econometrica* 72, 885-925.
13. Barndorff-Nielsen O. E. y N. Shephard (2006). Econometrics of testing for jumps in Financial economics using bipower variation. *Journal of Financial Econometrics* 4, 1-30.
14. Barndorff-Nielsen O. E. y N. Shephard (2007). Variation, jumps, market frictions and high frequency data in Financial econometrics. En R. Blundell, P. Torsten y W. K. Newey (Eds.), *Advances in Economics and Econometrics. Theory and Applications*, Ninth World Congress. Econometric Society Monographs. Cambridge: Cambridge University Press.

15. Barndorff-Nielsen O. E., N. Shephard y M. Winkel (2006). Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps. *Stoch. Proc. Appl.* 116, 796-806.
16. Christensen, B. J. y N. R. Prabhala (1998). The relation between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics* 37, 125-150.
17. Comte, F. y E. Renault (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance* 8, 291-323.
18. Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). A theory of the term structures of interest rates. *Econometrica* 53, 385-407.
19. Dacorogna, M. M., R. Gencay, U. A. Müller, R. B. Olsen y O. V. Pictet (2001). *An Introduction to High-Frequency Finance*. San Diego: Academic Press.
20. Feller, W. (1951). The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Annals of Mathematical Statistics* 22, no. 3, 427-432.
21. Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: Applications to Financial markets. *Journal of Finance* 42, 281-300.
22. Huang, X. y G. Tauchen (2005). The relative contribution of jumps to total price variation. *Journal of Financial Econometrics* 3, 456-499.
23. Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics* 8, 323-361.
24. Poterba, J. y L. Summers (1986). The persistence of volatility and stock market fluctuations. *American Economic Review* 76, 1124-1141.
25. Protter, P. (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. New York: Springer.
26. Rosenberg, B. (1972). The behaviour of random variables with nonstationary variance and the distribution of security prices. Working paper 11, Graduate School of Business Administration, University of California, Berkely. Reprinted in Shephard (2005).
27. Schwert, G. W. (1989). Why does stock market volatility change over time? *Journal of Finance* 44, 1115-1153.
28. Taylor, S. J. y X. Xu (1997). The incremental volatility information in one million foreign exchange quotations. *Journal of Empirical Finance* 4, 317-340.
29. Tauchen, G. y H. Zhou (2006). Identifying Realized Jumps on Financial Markets. Documento no publicado: Duke University.
30. Zhou, B. (1996). High-frequency data and volatility in foreign exchange rates. *Journal of Business and Economic Statistics* 14, 45-52.