**LA TEORÍA DE EXPECTATIVAS RACIONALES DE
LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS
Y EL VALOR DE LA OPCIÓN DE POSPONER INVERSIÓN**

Gabriel Sod Hoffs¹

Documento de Investigación No. 9508

Agosto, 1995

¹ El autor es candidato a doctor en la Universidad de Harvard. Este documento fue elaborado durante su estancia como investigador invitado del Banco de México en el verano de 1995. Las opiniones expresadas en el documento representan los puntos de vista del autor y no necesariamente aquellos de las instrucciones arriba mencionadas.

**LA TEORÍA DE EXPECTATIVAS RACIONALES DE
LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS
Y EL VALOR DE LA OPCIÓN DE POSPONER INVERSIÓN.**

Gabriel Sod Hoffs

Agosto, 1995

DOCUMENTO DE INVESTIGACIÓN No. 9508

RESUMEN

La literatura sobre estructura temporal de tasas de interés, partiendo del supuesto del comportamiento racional de los agentes, establece que la tasa de interés de largo plazo es igual a la integral de las tasas presente y futuras de corto plazo, más una prima por liquidez, donde esta última tiende a desaparecer mediante el arbitraje.

Este documento cuestiona este resultado mediante el uso explícito de opciones en la explicación del perfil de tasas. Mediante el análisis econométrico de la experiencia mexicana concluye que la prima de liquidez responde a cambios en la volatilidad de las tasas de interés y que dicha prima no se elimina por arbitraje.

1.- Introducción

Existen numerosas razones para estudiar la estructura de tasas de interés. Por un lado, como establece Mankiw (1986^a), tal estructura parece ser central en el mecanismo de transmisión de la política monetaria. Otras razones para su análisis incluyen la importancia de avanzar en la comprensión de los mercados financieros en general y la posibilidad de relacionar el perfil de tasas con la inflación y la inversión. En la literatura destacan varios artículos que tratan el tema, intentando probar si los agentes se comportan racionalmente. En la mayoría de ellos se parte del supuesto de que la tasa de interés de largo plazo es igual a la integral de las tasas presente y futura de corto plazo más una prima (o premio) por liquidez. También suponen que la prima por liquidez es constante en el tiempo y no especifican características alguna para ésta. De hecho, tal enfoque no explica completamente por qué los agentes desearían pagar por ello.

Hay al menos dos posibles razones por las que no se ha abundado en el análisis de la prima por liquidez en la literatura existente: 1) En equilibrio, y dadas las teorías actuales, dicha prima podría ser eliminada por arbitraje y, 2) La mayoría de los estudios corren regresiones en diferencias por lo que, si la prima es constante, desaparece de la estimación. Sin embargo, como intentaré mostrar, estos, artículos niegan el hecho de que, invertir en bonos de largo plazo sin considerar el valor de esperar, es simplemente incorrecto. Esta situación provoca un sesgo en los resultados y no considera completamente el comportamiento de los inversionistas. Aunque Mankiw (1986^a) incorpora una variable de riesgo en su análisis, no explica apropiadamente por qué debiera tener una forma funcional en vez de otra.

La literatura financiera, si bien teórica en su mayoría, es extensa en el tratamiento de la estructura temporal en un contexto estocástico, y más extensa aún es en el tratamiento de las opciones sobre tasas de interés (Merton [1974], etc.). Así pues, no se dispone de referencias que cubran la brecha entre la teoría de expectativas per se y el resto de la literatura financiera concerniente a la naturaleza estocástica de las tasas de interés. Otras teorías relacionadas con este tema incluyen la teoría de la segmentación de mercado, la cual establece la hipótesis de que no es necesario relacionar las tasas de corto y de largo plazo, dado que los oferentes y los inversionistas son independientes.

El propósito del artículo será responder empíricamente a este punto de discusión mediante el uso explícito de opciones en la explicación de la estructura temporal de tasas de interés, modificando así los modelos usuales de expectativas racionales. Se explicará y cuantificará el componente de la prima por liquidez para tasas de largo plazo. Más aún, se explicará por qué dicha prima no se

elimina con arbitraje. Para ello, se propone en primer lugar un mecanismo de formación de expectativas sobre la varianza de tasas de interés utilizando un proceso GARCH (p,q), como proponen Engle et al (1987). Posteriormente, esta proposición se contrasta utilizando datos de México, los cuales, a su vez, ofrecen hechos estilizados interesantes que pueden ser explicados más claramente a la luz del esquema propuesto. En la Sección 2 se presenta un ejemplo para propósitos de motivación. En la Sección 3 se formaliza el modelo. La cuarta sección tiene que ver con la formación de expectativas. La Sección 5 contiene el análisis empírico. La Sección 6 presenta las conclusiones.

2.- UN EJEMPLO SENCILLO

El ejemplo siguiente permite resaltar los problemas que surgen con una teoría simple de expectativas al intentar explicar la estructura de tasas de interés en un contexto de alta volatilidad de las mismas. Imaginemos un mundo con sólo dos períodos, donde hay certidumbre en el primero pero no sobre el segundo. Sea r_t la tasa de interés del período disponible en el primer período. E es el operador de expectativas, V el valor de invertir en instrumentos de corto plazo y Φ la prima por liquidez. Igualmente, supongamos que existe una tecnología de almacenamiento tal que nada se deprecia. Finalmente, supongamos que los individuos son impacientes y su tasa de descuento intertemporal es igual a ρ para cada periodo. La hipótesis de expectativas sugiere el siguiente modelo:

$$1 + R_t = (1 + r_1) (1 + E(r_2)) + \Phi \quad (2.1)$$

Suponiendo $r_1 = 0.2$, $E(r_2) = 0.2$, $\Pr(r_2 = 0.1) = 0.5$, $\Pr(r_2 = 0.3) = 0.5$ y $\rho = 0.19$, entonces $R_1 = 0.44 + \phi$, y los individuos valorarían dicho rendimiento en $0.44 / (1.19)^2$ más la prima por liquidez.

¿Qué sucedería si la prima se eliminara por arbitraje? Entonces $R_1 = 0.44$ se valuaría en 0.01687. Ahora, veamos el valor de invertir sólo en el instrumento de corto plazo y esperar a conocer la tasa de interés en el segundo periodo para tomar la decisión de invertir en el momento o no hacerlo. El valor de la inversión de corto plazo será entonces:

$$V = \Pr(r_2 = 1.3) (1.3) (r_1) / (1 + \rho)^2 + \Pr(r_2 = 1.1) (r_1 / (1 + \rho)) = 0.05501 > 0.01687 \quad (2.2)$$

La intuición que hay detrás del segundo término es la siguiente: si la tasa de interés observada en el segundo periodo no es lo suficientemente grande, los individuos gastarían su ingreso en lugar de invertir en un instrumento de corto plazo. Así, como podemos ver, si los individuos esperan y pueden optar entre invertir o no en el segundo periodo, obtienen una ganancia de 0.038.

Además, podemos notar que la prima por liquidez no puede ser eliminada por arbitraje, aún con inversionistas neutrales al riesgo. Si no hubiera prima, nadie invertiría en el instrumento de largo plazo. Más aún, parece que la prima de riesgo puede ser cuantificada y depende directamente de la incertidumbre de tasas de interés futuras: a mayor incertidumbre, se demandará una prima mayor por parte de los agentes.

3. MARCO DE REFERENCIA PARA LA CONTRASTACIÓN EMPÍRICA

3.1 MODELO SIN OPCIONES

Sea R_t la tasa de interés pagada en un instrumento con precio \$1 en el periodo 0 y vencimiento en T , y r_t la tasa de interés instantánea en el momento t y ϕ la prima por liquidez. Nótese que, bajo el supuesto de expectativas racionales y anticipación perfecta, debe cumplirse que

$$R_T = \left(\int_0^T e^{r_i} dt \right) + \Phi \quad (3.1)$$

Es decir, en términos de (3.1) se tiene que, en cualquier momento en el tiempo, R_T no es una tasa de interés por periodo de un instrumento de largo plazo, sino el interés para todo el lapso.

$$\frac{dR_T}{dT} = R_T = r_t \quad (3.2)$$

Por su parte, al diferenciar (3.1) y obtener (3.2), se aprecia en esta última la relación que hay entre las tasas de interés en periodos infinitesimales, y la prima por liquidez desaparece.

Ahora bien, llevando esta definición al terreno de la contrastación empírica, supongamos que el instrumento 1 vence en T y paga una tasa de interés r_1 instantáneamente y el instrumento dos es emitido cuando el primero expira, vence en el momento T y paga una tasa de interés r_2

compuesta continuamente. Sea r_T el rendimiento por periodo de un instrumento a dos periodos. Podemos suponer además que ambos periodos son de la misma duración. Siguiendo el artículo de Mankiw (1986b), tenemos que la implementación econométrica de este modelo sería

$$r_T = \frac{1}{2} (r_1 + E(r_2)) + \phi \quad (3.3)$$

Acomodando términos obtenemos

$$r_2 - r_1 = -2\phi + 2(r_T - r_1) - \varepsilon_2 \quad (3.4)$$

Suponiendo que

$$r_2 = E(r_2) + \varepsilon_2 \quad (3.4.1)$$

donde ε_2 es un término de error, cuyo valor esperado es cero.

La ecuación que sirve de referencia es (3.4), la cual diría que la diferencia entre la tasa de interés actual de corto plazo y la de largo plazo debería predecir la diferencia entre la tasa de interés esperada de corto plazo y la actual tasa de corto plazo. Además, esta ecuación nos dará un parámetro equivalente para la prima por liquidez. Como se puede ver, este enfoque no incorpora el valor de la opción sugerido en la sección anterior. Algunos ejemplos de este tratamiento para el caso de México se encuentran en Babatz y Conesa (1995).

3.2 EL MODELO CON OPCIONES

En este inicio se tiene como objetivo definir las características que debería tener el modelo econométrico a usar para probar la hipótesis de que la llamada prima de liquidez, esta relacionada con el concepto de opción esbozado anteriormente.

Como punto de referencia se sigue a Sélér (1989). Supongamos instrumentos con vencimiento ya sea al final de uno o de dos periodos con duración t . Estos instrumentos pueden ser adquiridos al momento de su emisión al principio del periodo que comprendan, con una tasa de interés siguen la trayectoria descrita por la ecuación (3.5) –donde z es un proceso Weiner –, los inversionistas no pueden lograr ganancia esperada alguna de retrasar la compra del instrumento de corto plazo en

el mercado secundario. Por lo anterior, si los agentes tienen expectativas similares entre si, el intercambio en el mercado secundario es irrelevante.

$$dr = m(r) dt + s(r) dz \quad (3.5)$$

La razón es que, si suben las tasas de interés, hay una pérdida sobre el principal para los propietarios del instrumento. El mercado secundario dará al instrumento un precio menor al original. Sucede lo opuesto si bajan las tasas de interés. En cualquier momento el precio será igual al beneficio de mantener el instrumento. Esta conclusión contiene la misma intuición que la ecuación (3.2), donde el premio a la liquidez tiende a cero.

Ahora, el siguiente paso es relacionar los precios de los instrumentos de corto plazo con los de largo plazo. La decisión que harán los agentes será comprar un instrumento de largo plazo al principio del primer periodo, o comprar uno de corto plazo en ese mismo instante y ver si compran otro de corto plazo al inicio del siguiente periodo.

Si los individuos deciden comprar el instrumento de largo plazo, el rendimiento que obtengan debe ser igual a lo que obtendrían si hubieran comprado instrumentos de corto plazo. El rendimiento de los instrumentos de corto plazo esta dado por

$$1 + R_1 = (1 + r_1) (1 + E(r_2)) + \phi \quad (3.6)$$

que es igual a la ecuación (2.1).

Si al inversionista le es posible cobrar el instrumento al final del primer periodo, puede decidir, si la tasa de interés es suficientemente alta, reinvertir o no el efectivo comprando el instrumento de corto plazo en el segundo periodo. El instrumento de largo plazo no permite al inversionista tomar tal decisión sin un castigo. Con base en la misma línea de razonamiento seguida en párrafos anteriores, el inversionista podría vender el instrumento de largo plazo si creyera que hay una mejor alternativa para el dinero. Pero, si los mercados son eficientes, el castigo por vender el instrumento antes de su periodo de maduración compensaría exactamente los beneficios de hacerlo.

Dado que los instrumentos no tienen pagos en cupones o dividendos, comprar un instrumento de corto plazo en lugar de uno de largo plazo, implica también comprar la opción sobre tasas de interés

crecientes. El precio de la opción $\phi(T, X)$ estaría dado por las fórmulas de Black-Scholes (1973) y de Merton (1973). Entonces, la tasa de interés de largo plazo será

$$R(T, t) = \Pi_i (1 + r(t)_i) + \phi(T, X) \quad (3.7)$$

Está bien establecido que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} > 0, \frac{\partial \phi}{\partial T} > 0 \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial X} < 0 \quad (3.8)$$

En este caso, mantener el instrumento de largo plazo es equivalente a mantener el de corto plazo menos la opción que este último implica.¹

Dado lo anterior, sería posible esperar que:

1. La mayor volatilidad cambiará la estructura de plazos, extendiendo el diferencial. Esto puede verse a partir de que la opción aumenta de valor si hay más volatilidad. En tal situación, la opción valdrá más y el inversionista que mantiene el instrumento de largo plazo tendrá que ser compensado por no tener la opción. (Esto puede verse tomando la derivada parcial de $R - r$ con respecto a σ).
2. La disminución en las tasas de interés esperadas para el futuro podría no disminuir la tasa de interés de largo plazo si hay mayor volatilidad. En este sentido, la credibilidad puede ser crucial para alcanzar un proceso de estabilización exitoso.
3. La misma lógica se aplica a bonos denominados en diferentes monedas. Como veremos en la sección 6, dada la estructura de tasas *forward* y tasas *spot*, hay una opción implícita en ciertos bonos indizados, que sigue la misma lógica anterior.

¹ Puede hacerse el mismo análisis para un proceso diferente al que corresponde a la ecuación (3.5). podríamos tener un proceso donde se agregue un proceso Poisson al proceso Wiener normal. Podemos pensar que, además de la volatilidad usual de las tasas de interés dada por el proceso Wiener normal, puede haber choques mayores frecuentes. Estos choques tendrían un efecto anormal en las expectativas futuras, en particular sobreestimando la volatilidad usual de las tasas de interés. Encontramos el análisis formal en Merton (1973). Aunque la ecuación (3.7) se modificaría ligeramente, habría un gran cambio en las expectativas. Si λ es el parámetro Poisson, éste aparecería en la opción incluida en la ecuación (3.7)

4. EXPECTATIVAS

Toda vez que el propósito del documento es contrastar la posible relación entre la estructura de tasas y la volatilidad esperada de las mismas, es necesario hacer algunas observaciones sobre la manera en que estas expectativas serán modeladas en la sección empírica.

A éste respecto es útil apuntar que la literatura recurre usualmente a rezagos tipo Koycy para determinar las tasas racionales ex-ante. Séller (1989) describe lo siguiente:

$$R_T = (1 - g) \sum_{i=1}^T \lambda^i r_i \quad (4.1)$$

Utiliza (4.1) para compararla con la tasa actual de largo plazo y observar si la estructura temporal es racional (similar a Mankiw [1986]).

Ahora bien, en éste caso lo que nos interesa es la volatilidad esperada. Nuestra sugerencia es que los individuos forman sus expectativas como en un modelo GARCH (p,q)

$$h_t = E(\sigma_t^2) = \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (4.2)$$

Bollerslev (1986, 1992) proporciona una larga lista de argumentos a favor de este procedimiento. Partiendo de ésta ecuación, en la siguiente sección se implementaran un par de pruebas:

- 1) Determinar r , R y s de acuerdo con un modelo de expectativas como el descrito, y ver si los individuos en realidad forman sus expectativas así (Séller [1979]).
- 2) Mostrar si, justo después de perturbaciones exógenas que tengan un impacto significativo sobre las tasas de interés, la volatilidad esperada es “mayor” que la usual, y por tanto, se presenta un período para el cual la opción sea “demasiadocostosa”. Esto puede aplicarse directamente al caso de México. A medida que la volatilidad aumentaba (mediados de 1994), la tasa de interés que el gobierno tendría que haber ofrecido a los inversionistas para que éstos mantuvieran bonos de largo plazo hubiera sido tan grande que la respuesta óptima por parte de las autoridades fue reducir el plazo de vencimiento de la deuda emitida. Esto tiene

sentido porque no hay necesidad de que las tasas sean tan altas si la volatilidad es temporal. Más aún, si las tasas de interés se elevan por una percepción errónea de alta volatilidad, tiene sentido no responder, es decir, no pagar tasas excesivas.

5. ANÁLISIS EMPÍRICO

5.1 LOS DATOS

En esta sección se utilizan tanto datos semanales como datos mensuales para los CETES con vencimiento a uno y tres meses. Los datos semanales van de Noviembre de 1989 a Julio de 1995, mientras que los datos mensuales van de Agosto de 1982 a Julio de 1995. Estos datos fueron obtenidos a partir de la base de datos de la Gerencia de Mercado de Valores del Banco de México. En una primera aproximación se utilizan tan solo los datos de CETES a 28 y 91 días. En una primera instancia se calculó la sobretasa que es pagada por el gobierno sobre los CETES de largo plazo. Las tasas que se utilizan son nominales y los rezagos utilizados son 4 y 8 periodos respectivamente, cuando así es necesario. Esto se hace con el propósito de calcular la sobretasa arriba mencionada.

5.2 ESTIMACIÓN

La primera ecuación que se estima es similar a aquella propuesta por Sélker (1989), y que corresponde a la ecuación (3.4)

$$\chi_i = c + \varepsilon_i \quad (5.1)$$

Donde el primer término representa el concepto definido en la literatura como sobretasa en bonos de largo plazo. Este término se calcula de la siguiente forma, siguiendo a *Engle et al* (1987).

$$\chi_i = 3R_i - (r_i + r_{i+1} + r_{i+2}) \quad (5.2)$$

Donde R representa la tasa a tres meses, r la tasa a un mes y la constante c en la ecuación (5.1) precisamente representa la prima temporal –o premio por liquidez– explicada anteriormente.

La regresión con datos semanales es la siguiente:

$$\chi_i = 1.249 + \varepsilon_i \quad (5.3)$$

con un estadístico t de 3.84, y significativa de más del 1%. Esto nos permite establecer que existe una prima temporal significativa equivalente a alrededor del 5% anual:

$$1 - \left(1 + \frac{1.249}{300}\right)^{12} = 0.0511$$

Cuando se usan los datos mensuales, se obtienen los siguientes resultados:

$$\chi_i = 1.5329 + \varepsilon_i \quad (5.4)$$

con un valor t de 2.46, al 2% de significancia. Nuevamente, nos permite afirmar que existe una prima temporal positiva de 6.33%.

cuando se realiza una prueba ARCH(4) para analizar el comportamiento del componente de error de estas regresiones con datos semanales, prueba de bondad de ajuste propuesta por Bollerslev (1992) la cual se distribuye como χ^2 , da un valor de 130.41 lo cual permite rechazar la hipótesis nula de no heteroscedasticidad a un nivel de significancia de 5%. Sin embargo, cuando se utilizan datos mensuales, la hipótesis nula no se rechaza para niveles de significancia razonables.

Esta es una conclusión relevante porque implica que “grandes movimientos son seguidos de grandes movimientos, y que pequeños movimientos son seguidos de pequeños movimientos”. La ecuación es

$$\varepsilon_i^2 = 0.581\varepsilon_{i-1}^2 - 0.2879\varepsilon_{i-2}^2 + 0.4625\varepsilon_{i-3}^2 \quad (5.5)$$

Este modelo no explica el signo del segundo coeficiente, pero la magnitud es menor que la de los otros además de ser poco significativa.

La dinámica que muestra la volatilidad de tasas abre la posibilidad para que los agentes económicos, aprovechen la información para tomar decisiones sobre el plazo de sus inversiones en términos de lo descrito en las secciones 2 y 3. en otras palabras, el diferencial podría ser explicado

en parte por el término de la opción en la estructura y, a medida que la varianza percibida cambie, también lo hará el premio de espera medido como una opción²

En éste punto se puede pasar a probar la hipótesis central de ésta investigación mediante el análisis de lo que sucede cuando la varianza se incluye como regresor. Esto se realiza por el método de máxima verosimilitud, obteniendo simultáneamente la estimación de la ecuación de la estructura temporal de tasas y de la volatilidad de las mismas. Los resultados se reportan en (5.6) Y (5.7).

$$\chi_t = 1.31195 + 0.53477 \sigma_1^2 + \varepsilon_1 \quad (5.6)$$

En la prueba de las regresiones la constante tiene un estadístico t de 4.2, mientras que el coeficiente que corresponde a la volatilidad, una t de 10.06. Claramente ambas son significativas. La R^2 es igual a 0.2482. Este resultado apoya de manera muy clara la idea de que el público toma en cuenta la volatilidad de las tasas de interés para decidir el plazo de su inversión en respuesta a la estructura de tasas en el mercado. Además, es importante resaltar que el término de la constante en la ecuación (5.6) disminuye con respecto al de la ecuación (5.4), dado que parte del efecto está capturado por el término de la varianza (opción). Sin embargo, también debe notarse que dicho premio continua siendo significativo por lo que deben existir otros factores, ligados al marco institucional del mercado de deuda gubernamental en México que requerirán de análisis posterior.

Finalmente se reporta el resultado del modelo GARCH (1,2) que describe la dinámica de la volatilidad de tasas. La ecuación GARCH (1,2) a partir de la ecuación (4.2) es la siguiente:

$$\sigma_i^2 = 45.8 + 0.802\varepsilon_{i-1}^2 + 0.154\sigma_{i-1}^2 + 0.32\sigma_{i-2}^2 \quad (5.7)$$

Los estadísticos t correspondientes son 3.8, 14.7 y 4.35 respectivamente, claramente significativas y con una R^2 de 0.22.

² Debe notarse que, de acuerdo a Merton o Black-Scholes, el precio de una opción no puede determinarse en forma apropiada si la varianza no es constante. Estamos conscientes de tal dificultad y confiamos en que el problema se resuelva.

6. CONCLUSIONES

Este documento presenta un resultado de gran importancia para avanzar en la comprensión de los factores que determinan la estructura de tasas de interés. A diferencia de lo que sucede en economías caracterizadas por largos periodos de estabilidad, en países donde las tasas de interés son volátiles, puede verse cómo el público toma en cuenta tal información para la conformación de sus portafolios, con el correspondiente efecto que ello tiene sobre la estructura de tasas y plazo de la deuda.

A partir de estas conclusiones, resulta interesante proponer, como extensiones para esta línea de investigación, el estudio empírico del plazo de la deuda en un entorno de volatilidad como el descrito, así como sus aplicaciones para el caso en que los agentes pueden adquirir opciones sobre tasas de interés y/o tipo de cambio, ya sea directamente o a través de instrumentos que ofrezcan tal cobertura, como fue el caso de los Tesobonos en México en 1994.

BIBLIOGRAFÍA

- Babatz, G & Conesa, A. "The Term Structure of Interest Rates: An Empirical Analysis for Mexico" Mimeo Harvard U. 1995
- Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" Journal of Econometrics 31 1986
- Campbell, J. and Shiller, R. "Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View" Review of Economic Studies 1991
- Egle, R. et al. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : The ARCH-M Model Econometrica 55 (2) March 1987
- Huang, C.F. & Lizenberger, R. "Foundations of Financial Economics" Prentice Hall 1988
- Hull, J. "Options, Futures and Other Derivative Securities" Prentice Hall 1990
- Mankiw, N.G. "The Term Structure of Interest Rates Revisited" Brookings Papers on Economic Activity 1: 1986
- Mankiw, N.G. & Miron, J. "The Changing Behavior of the Term Structure of Interest Rates" Quarterly Journal of Economics May 1986
- Merton, R. "A Theory of Rational Option Pricing" Bell Journal of Economics 1973
- Merton, R. "Continuous Time Finance" Basil Blackwell 1990
- Shiller, R. "Market Volatility" MIT Press 1989
- Shiller, R. "The Volatility of Long-Term Interest Rates and the Expectations Model of the Term Structure" Journal of Political Economy 1979