Documento No. 27

Una Alternativa para la Media Aritmética en el Calculo de Promedios Simples de Relativos de Precios:
La Geometría

por

Gabriel Vera Ferrer y Víctor M. Guerrero

Agosto, 1980

Las ideas contenidas en el presente ensayo son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan la
posición del Banco de México, S.A.

UNA ALTERNATIVA PARA LA MEDIA ARITMÉTICA EN EL CALCULO DE PROMEDIOS SIIMPLES DE RELATIVOS DE PRECIOS: LA MEDIA GEOMÉTRICA

por

Gabriel Vera Ferrer y Víctor M. Guerrero

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de las veces que se hace referencia a un promedio, se piensa de manera inmediata en la media aritmética. La razón de esta predilección evidente por la media aritmética se debe básicamente a su facilidad de interpretación y sencillez de cálculo; sin embargo, el empleo de este tipo de promedio no debe fundamentarse tan solo en estas dos características que, aunque pudiesen ser importantes, conducen a utilizarlo indiscriminadamente y, por tanto, de manera no siempre adecuada.

Por el contrario, para cada aplicación particular que se quiera hacer de la media aritmética, deben considerarse tanto sus cualidades como sus deficiencias con respecto a otros promedios alternativos, que sean aplicables al caso bajo estudio.

Estas páginas pretenden mostrar algunos argumentos por los cuales sería preferible usar como promedio simple de relativos de precios a la media geométrica y no a la media aritmética. No obstante, los argumentos aquí expuestos pueden ser generalizados fácilmente a otro tipo de relativos, ya fueran estas proporciones o tasas de cambio.

En particular se analizará el cálculo de un promedio simple de relativos de precios de artículos específicos, ya que en la actualidad la Oficina de Precios del Banco de México utiliza para dicho cálculo un promedio aritmético simple (véase la referencia 1). Es decir, la media aritmética simple de relativos de precios de artículos específicos, pretende representar al relativo de precios del concepto genérico.

II. CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Supóngase que existen m_i artículos específicos para formar el concepto genérico i , y que $P_{ni}^{(j)}$ y $P_{oi}^{(j)}$ representan los precios del artículo específico j , en el año n y en el año o respectivamente.

Entonces, el relativo de precios del concepto genérico i expresado como una media aritmética, viene a ser

$$\frac{P_{ni}}{P_{oi}} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{P_{ni}^{(j)}}{P_{oi}^{(j)}} .$$

Existen diversos promedios que pueden utilizarse en sustitución de la media aritmética; dentro de estos, el competidor más importante para el caso presente es la media geométrica, la cual se calcula mediante la fórmula:

$$\frac{P_{ni}}{P_{oi}} = \left\{ \pi \frac{P_{ni}^{(j)}}{P_{oi}^{(j)}} \right\}^{\frac{1}{m_i}}$$

Ahora bien, la elección de uno de estos dos promedios para resolver un problema específico, se efectúa por lo regular con base en convenciones o preferencias subjetivas.

Por último, ni la media aritmética ni la geométrica toman en cuenta la importancia relativa de los diferentes artículos específicos, lo cual implica que a todos y cada uno de dichos artículos se les asigna el mismo peso o importancia. Sería preferible entonces usar un promedio ponderado en lugar del promedio simple, pero aquí se supondrá que se carece de los datos para calcular las ponderaciones adecuadas; por lo tanto, estas notas se limitarán a establecer, con base en varios argumentos teóricos, que la media geométrica es más adecuada que la aritmética para representar el relativo de precios del concepto genérico cuando sólo se cuenta con los relativos a los artículos específicos.

III. ARGUMENTOS TEÓRICOS

a) Primer argumento.

Se basa en lo siguiente.

Adviértase que el relativo $\frac{P_{ni}^{(j)}}{P_{oi}^{(j)}}$ tiene como expresión alternativa

$$\frac{P_{ni}^{(j)}}{P_{oi}^{(j)}} = (1 + r_i^{(j)})$$

donde $r_i^{(j)}$ representa la tasa de cambio del precio del artículo específico j del concepto genérico i, para el año n respecto al año o.

Con esta notación, se desea encontrar una tasa r_i que represente el cambio de precio en el concepto genérico i o, equivalentemente, una r_i tal que

$$P_{ni} = P_{oi} \times \text{Promedio de } \left\{ (1 + r_i^{(1)}), (1 + r_i^{(2)}), \dots, (1 + r_i^{(m_i)}) \right\}$$

se pueda expresar como:

$$P_{ni} = P_{oi} (1 + r_i)^{m_i}$$

Este problema es, en esencia, el que se encuentra al trabajar con interés compuesto en donde la tasa de interés es variable, por tanto, la solución viene dada por:

$$(1 + r_i)^{m_i} = (1 + r_i^{(1)})(1 + r_i^{(2)}), \dots, (1 + r_i^{(m_i)})$$

o bien

$$(1 + r_i) = \left\{ \pi_{j=1}^{m_i} (1 + r_i^{(j)}) \right\}^{\frac{1}{m_i}}$$

y, en consecuencia

$$\frac{P_{ni}}{P_{oi}} = \left\{ \pi_{j=1}^{m_i} \frac{P_{ni}^{(j)}}{P_{oi}^{(j)}} \right\}^{\frac{1}{m_i}}.$$

Es decir, el relativo de precios del concepto genérico se debe representar por la media geométrica de ellos relativos de artículos específicos.

b) Segundo argumento

Puesto que el relativo del concepto genérico es un número índice de los relativos de los artículos específicos que lo constituyen, es pertinente utilizar para la presente situación los criterios convencionales para determinar la bondad de los números índice. Dichos criterios constituyen pruebas teóricas a las que según se ha sugerido, deben someterse los números índice para ver si cumplen con

ciertas propiedades deseables. Así, se cuenta con la propiedad del tiempo inverso, la propiedad circular (o cíclica) y la propiedad del factor inverso.

1. Propiedad del tiempo inverso

Cuando los períodos n y o se intercambian, los correspondientes relativos (I_{no} e I_{on}) son recíprocos entre sí. En otras palabras, se cumple con esta propiedad, si el producto de dos números índices –calculados mediante el mismo tipo de promedio–, con los subíndices de tiempo intercambiados en el segundo número índice, es igual a 1 (o sea $I_{no} \text{ e } I_{on} = 1$).

2. Propiedad circular (o cíclica)

Esta es una extensión de la propiedad anterior y consiste en que, si un índice se construye para el año con base en el año $b(I_{ab})$, y para el año b con base en el año $c(I_{bc})$ entonces el índice para el año a con base en el $c(I_{ac})$ debe ser el producto de los dos anteriores, esto es:

$$I_{ac} = I_{ab} \bullet I_{bc}$$

3. Propiedad del factor inverso

Esta propiedad indica que el producto de un índice de precios por un índice de cantidades debe dar como resultado un índice de valores.

Dado que esta última propiedad exige del conocimiento de cantidades, y aquí se dio por supuesto que no existía tal información, dicha propiedad no será requerimiento que deba cumplir el número índice en estudio. Por otro lado, este índice sí debe satisfacer las propiedades 1 y 2, para considerarlo como satisfactorio. Para probar si la media aritmética o la geométrica cumplen estas dos propiedades se tiene, obviando los sufijos i y j :

i) Media aritmética

Como:

$$I_{no} = \frac{1}{m} \sum \frac{P_n}{P_o} \text{ e } I_{on} = \frac{1}{m} \sum \frac{P_o}{P_n}$$

entonces

$$I_{no} \cdot I_{on} = \frac{1}{m^2} \left(\sum \frac{P_n}{P_o} \right) \left(\sum \frac{P_o}{P_n} \right) > 1 *$$

ii) Media geométrica

En este caso se tiene

$$I_{no} = \left\{ \pi \frac{P_n}{P_o} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad \text{e} \quad I_{on} = \left\{ \pi \frac{P_o}{P_n} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

así que

$$I_{no} \cdot I_{on} = \left\{ \pi \frac{P_n}{P_o} \cdot \pi \frac{P_o}{P_n} \right\}^{\frac{1}{m}} = 1,$$

de donde se concluye que se cumple con la propiedad 1.

De igual manera, ya que

$$I_{ab} = \left\{ \pi \frac{P_a}{P_b} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad \text{e} \quad I_{bc} = \left\{ \pi \frac{P_b}{P_c} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

se tiene

$$I_{ab} \cdot I_{bc} = \left\{ \pi \frac{P_a}{P_b} \cdot \pi \frac{P_b}{P_c} \right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{ \pi \frac{P_a}{P_c} \right\}^{\frac{1}{m}} = I_{ac}$$

lo cual satisface la propiedad 2.

El hecho de que la media aritmética no tenga la propiedad (1) significa, de acuerdo con Fisher (1927, pág. 87), que tiene un error positivo, es decir, una tendencia a sobrestimar la cantidad que pretende estimar. Por el contrario, la media geométrica no contiene sesgo, y puede demostrarse que siempre es menor que la media aritmética**

Aparte de los argumentos expuestos, el uso preferente de la media geométrica sobre la aritmética ha sido recomendado por diversos autores, entre ellos se encuentran Fisher (1927) y Zizek (1913); este último en particular sugiere (en la página 197 de su libro) calcular ambas medias, y si éstas difieren

(*) Prueba de este hecho se encuentra en Fisher (1927, pág. 383).

(**) Una demostración de este hecho aparece en Zizek (1913, pág. 195).

substantialmente, escoger a la media geométrica como más apropiada debido a que: “si tanto la media aritmética como la geométrica se calculan usando los mismos datos, entonces se observa que la geométrica no es afectada en el mismo grado por cambios extremos como lo es la aritmética. La media geométrica de tasas de cambio de precios es, por consiguiente, menos influenciada que la media aritmética, por fluctuaciones violentas en los precios de artículos específicos. Esta propiedad de la media geométrica es una ventaja en problemas como los de la representación de los movimientos del nivel de precios, donde no se considera justificado que un cambio excepcionalmente fuerte en el precio de un solo artículo afecte al resultado, como ocurre cuando se aplica la media aritmética”.

IV. CONCLUSIONES

La media geométrica surge de una manera natural como expresión para relativos de precios de un concepto genérico, si se piensa en función de tasas de cambio en precios de artículos específicos. Satisface las propiedades de tiempo inverso y circular, que la media aritmética no cumple y, por otra parte, es más recomendada que la media aritmética en la bibliografía existente sobre el tema.

Por estas razones se sugiere que, salvo mejor justificación de carácter operacional, es más conveniente y recomendable utilizar la media geométrica para calcular el relativo de precios del concepto genérico.

REFERENCIAS

1. Banco de México, S.A. (Octubre, 1979) Indicadores Económicos. Cuaderno Mensual Vol. VII No. 11. Subdirección de Investigación Económica.
2. Fisher, I. (1927) The Making of Index Numbers. Publications of the Pollack Foundation for Economic Research – No. 1. Third Edition, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd.
3. Zizek, F (1913) Statistical Averages. Henry Holt and Co.

BANCO DE MÉXICO, S.A.
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN ECONÓMICA
SERIE DOCUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

1. ESTRUCTURA FINANCIERA Y EXPERIENCIA CAMBIARIA: MÉXICO 1954-1977.
Víctor M. Guerrero y Gabriel Vera Ferrer
Julio, 1980.
2. EL FINANCIAMIENTO DEL GASTO PÚBLICO EN UNA ECONOMÍA EN CRECIMIENTO:
EL CASO DE MÉXICO.
Alain Ize
Noviembre, 1978.
3. ALGUNOS ASPECTOS DEL ENDEUDAMIENTO PÚBLICO EXTERNO EN MÉXICO.
Ernesto Zedillo.
Diciembre, 1978.
4. UNA APLICACIÓN DEL MODELO BAYESIANO DE DECISIÓN EN EL ANÁLISIS DE
FUNCIONES DE PRODUCCIÓN AGRÍCOLA.
Héctor E. González Mendez.
Diciembre, 1978.
5. POLÍTICA MACROECONÓMICA EN EL CORTO PLAZO: UNA RESEÑA.
Alain Ize.
Marzo, 1979.
6. ESTUDIOS DE MONEDA Y BANCA Y POLÍTICA MONETARIA SOBRE MÉXICO:
SELECCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE 1943 A 1978.
Abril, 1979.
7. COMERCIO EXTERIOR MÉXICO-ESTADOS UNIDOS: PROBLEMAS DE
COMPARABILIDAD ESTADÍSTICA.
Jorge Carriles Rubio.
Mayo, 1979.
8. EXPLOTACIÓN ÓPTIMA DE RESERVAS PETROLERAS EN UN CONTEXTO
MACROECONÓMICO.
José Córdoba
Mayo, 1979.

9. ASPECTOS DEFLACIONARIOS DE LA DEVALUACIÓN DEL PESO MEXICANO DE 1976.
José Córdoba y Guillermo Ortíz.
Mayo, 1979.
10. EXTRACCIÓN ÓPTIMA DE PETRÓLEO Y ENDEUDAMIENTO EXTERNO: EL CASO DE MÉXICO.
Ernesto Zedillo.
Junio, 1979.
11. IMPUESTOS DIRECTOS: PROGRESIVIDAD ÓPTIMA.
Jesús Seade.
Septiembre, 1979.
12. OPCIONES DE POLÍTICA ECONÓMICA 1979-1982.
Sócrates Rizzo y Leopoldo Solís.
Septiembre, 1978.
13. INTERMEDIARIOS FINANCIEROS Y MERCADOS IMPERFECTOS DE CAPITAL.
Guillermo Ortíz.
Septiembre, 1979.
14. ESTIMACIONES DE EQUILIBRIO GENERAL DE LOS EFECTOS DE LAS DISTORSIONES EN LOS MERCADOS DE FACTORES: EL CASO DE MÉXICO.
José J. Sidaoui y Richard H. Sines.
Octubre, 1979.
15. UN ANÁLISIS DE LA INFLACIÓN EN MÉXICO.
Alain Ize.
Octubre 1979.
16. ANÁLISIS DE LOS COMPONENTES DEL CAMBIO ESTRUCTURAL CON UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL, 1970-75.
José J. Sidaoui y Richard H. Sines.
Enero, 1980.
17. TIPOS DE CAMBIO FLOTANTES Y DESLIZ CAMBIARIO: LAS EXPERIENCIAS DE ALGUNOS PAÍSES EN DESARROLLO.
Guillermo Ortíz y Leopoldo Solís.
Enero, 1980.
18. UN MODELO DE INFLACIÓN Y CRECIMIENTO EN UNA ECONOMÍA CAPITALISTA EN DESARROLLO.

Alain Ize.

Enero, 1980.

19. CRECIMIENTO E INFLACIÓN: ALTERNATIVAS CAMBIARIAS PARA MÉXICO.

Guillermo Ortiz y Leopoldo Solís.

Febrero, 1980.

20. COMPORTAMIENTO DE LA CAPTACIÓN BANCARIA EN MÉXICO.

Héctor E. González Méndez.

Mayo, 1980.

21. LA ENCUESTA DE TURISMO RECEPTIVO, REPORTE METODOLÓGICO.

Alberto Vargas Aguayo.

Junio, 1980.

22. AJUSTE ESTACIONAL DE UNA SERIE DE TIEMPO MEDIANTE EL USO COMPLEMENTARIO DE MÉTODOS TRADICIONALES Y LA TÉCNICA DE BOX-JENKINS.

Gabriel Vera Ferrer y Víctor M. Guerrero.

Junio, 1980.

23. DISTRIBUCIÓN DEL FINANCIAMIENTO OTORGADO POR EL SISTEMA BANCARIO MEXICANO A LA BANCA PRIVADA Y MIXTA.

Víctor M. Guerrero y Gabriel Vera Ferrer.

Julio, 1980.

24. LA MIGRACIÓN INDOCUMENTADA A ESTADOS UNIDOS: UN NUEVO ENFOQUE.

Juan Díez-Canedo.

Julio, 1980.

25. UN MODELO FINANCIERO DE DESEQUILIBRIO A CORTO PLAZO PARA LA ECONOMÍA MEXICANA.

Alain Ize.

Julio, 1980.

26. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE IMPORTACIONES PARA MÉXICO.

Javier Salas.

Agosto, 1980.

27. UNA ALTERNATIVA PARA LA MEDIA ARITMÉTICA EN EL CÁLCULO DE PROMEDIOS SIMPLES DE RELATIVOS DE PRECIOS: LA MEDIA GEOMÉTRICA.

Gabriel Vera Ferrer y Víctor M. Guerrero

Agosto, 1980.