UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-3-145-151>

Применение математических методов при решении практических задач по охране окружающей среды

- Русудан Манагадзе** Департамент технологий газа и нефти. Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава 75.
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- Вера Абзианидзе** Институт гидрогеологии и инженерной геологии, Грузия, Тбилиси, 0159, село Дигоми, ул. Св. Нины 1
E-mail: veriko_abz@mail.ru
- Дмитрий Абзианидзе** Институт гидрогеологии и инженерной геологии, Грузия, Тбилиси, 0159, село Дигоми, ул. Св. Нины 1
E-mail: dimitri.abz@mail.ru

Рецензенты:

М. Мардашова, профессор горно-геологического факультета ГТУ

E-mail: m_mardashova@gtu.ge

В. Хитаришвили, профессор горно-геологического факультета ГТУ

E-mail: v.khitarishvili@gtu.ge

Аннотация. Вопрос об эффективности применения математических методов при анализе экологических процессов авторы данной статьи рассматривали в четвертом номере данного журнала за 2018 г. В предложенной статье авторы продолжают развивать эту идею, рассматривая на этот раз взаимодействие человека с окружающей средой. Основное внимание авторов сосредоточено на том, чтобы показать важную роль математики в взаимодействии человека с окружающей средой.

Известно, что антропогенные объекты (населенные пункты, различные промышленные предприятия, транспорт и др.) в результате своего функционирования оказывают на человека разного рода воздействия. Для изучения этих процессов возникает

необходимость в развитии наук, чтобы прогнозировать состояние окружающей среды и управлять процессами экологического равновесия в геологической среде, между природой и техносферой (техногенной деятельностью людей).

В изучении этих процессов математикам отводится решающая роль. Однако, предмет исследования неизменно сложен, т.к изучение требует объединения взаимосвязанных между собой процессов самой разнообразной природы.

Заметим, что и организация этих исследований очень трудна, т.к. изучение антропогенного влияния человека на окружающую среду требует объединения деятельности целого ряда специалистов самых разных сфер. Специалистом-интерпретатором, способным создать общий язык исследований в этих условиях, оказывается математик.

Таким образом, математические теории возникли естественным путем в процессе изучения окружающего мира; математические теории являются необходимой составной частью нашего представления о мире.

Ключевые слова: модель; окружающая среда; разностная схема; экологические процессы.

Введение

Проблемы окружающей среды носят системный характер и являются главной заботой человека. Следовательно, для сохранения экологического равновесия в природе возникает необходимость применения, так называемого, системного подхода [1].

Системный подход представляет собой весьма эффективное решение сложных проблем, обычно, недостаточно четко сформулированных.

На начальном этапе мы можем наметить некоторые задачи, исходя из общих принципов системного подхода. Мы можем выявить и описать системные характеристики и связи с совокупностью объектов, взаимодействующих с окружающей средой, саму окружающую среду, условия взаимодействия объектов, а также прогнозировать развития процессов.

На последующих этапах анализа предполагается изучение возможности снижения отрицательных последствий взаимодействий за счет улучшения технологий производства и создания альтернативных процессов и управления всем комплексом мероприятий [2].

Любые методы системного подхода опираются на математическое описание экологических процессов.

Построение математической модели является основой системного подхода.

Математическое моделирование заключается в переводе, так называемого, «реального мира» на язык математики, что позволит нам получить более точное представление о его наиболее существенных свойствах и предсказать будущие события. Это обстоятельство отражает термин «математическое моделирование» [3].

Практическими задачами моделирования являются, во-первых, анализ экологических процессов, во-вторых – экологическое прогнозирование, в-третьих – выработка управленческих решений.

Модели, описывающие экологические процессы, являются нестационарными, т.к. параметры, входящие в модель, изменяются во времени. Численное интегрирование таких моделей осуществляется с помощью конечных разностей или метода сеток [4].

Основная часть

Цель статьи – научить экологов обращению с подобными моделями. Задача, решаемая в статье, не является особенно трудной с точки зрения математики, во всяком случае, она не представляет «проблему». Важно, чтобы экологи поняли, как им действовать в подобных случаях.

Для наглядности рассматривается простейшая модель взаимодействия производства с окружающей средой. Это объясняется тем, что всякую модель со сложной структурой всегда можно заменить (при определенных допущениях) упрощенной приближенной моделью [5].

Модель, характеризующая загрязненность окружающей среды, может быть записана в виде:

$$\dot{x}(t) = q(t) - \varphi(x) \quad (1)$$

где $x(t)$ – характеризует качество среды;

$\varphi(x)$ – естественная очистка;

$q(t)$ – загрязняющие окружающую среду вещества.

По данным Всемирной организации здравоохранения здоровье человека на 18-40% зависит от состояния окружающей среды.

Для простоты допустим, что

$$\varphi(x) = z \cdot x(t) \quad (2)$$

где z – коэффициент пропорциональности.

Величина $q(t)$ зависит как от количества продукции ($p(t)$), выпускаемой производством, так и от затрат предприятия на совершенствование технологий ($v(t)$):

$$q(t) = f[p(t), v(t)]$$

Величина q находится в прямой зависимости от количества продукции, выпускаемой производством

и в обратной от $v(t)$, т.е. с увеличением $v(t)$, $q(t)$ уменьшается.

$$\text{Итак, } q(t) = \frac{a \cdot p(t)}{b \cdot v(t)} \quad (3)$$

где, a и b – коэффициенты пропорциональности.

Количество продукции, выпускаемое производством, определяется объемом используемых ресурсов (основных и оборотных фондов $\Phi(t)$) и количеством рабочей силы:

$$p(t) = f[\Phi(t), L]$$

Функция $p(t)$ носит название производственной функции. Производственная функция – это экономико-математическое уравнение, которое связывает переменные величины затрат (ресурсов) с величиной продукции (выпуска).

Наиболее широкое распространение получила функция Кобба-Дугласа, которая для рассматриваемого случая имеет вид [7]:

$$p(t) = \alpha \Phi^k(t) L^{k-1} \quad (4)$$

$$0 < k < 1$$

где α и k – некоторые характеристики производства.

Проведем иллюстрированный расчет для предельно простой ситуации, когда $k = 1$, тогда на основании (4):

$$p(t) = \alpha \cdot \Phi(t) \quad (5)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) с учетом (5), получим:

$$\dot{x}(t) = -zx(t) + y(t) \quad (6)$$

$$\text{где } y(t) = \frac{a}{b} \alpha \frac{\Phi(t)}{v(t)}$$

Запишем дифференциальное уравнение (6) в виде символического равенства

$$L \cdot x = f \quad (7)$$

$$\text{где } L(x) \equiv \dot{x}(t) + zx(t); f = y(t)$$

Как уже было сказано, на практике такое уравнение решается численно с помощью метода сеток или метода конечных разностей.

Рассчитаем модель на интервале времени $0 \leq t \leq T$. Предполагаем, что момент времени $t=0$ – это момент, когда производство начинает функционировать, T – время функционирования.

Для приближенного решения (6) уравнения разобьем отрезок времени $(0, T)$ последовательностью точек $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=T$ на N интервалы длительностью h так, чтобы h принимал малые положительные значения. Совокупность точек деления составляет

сетку. Точка деления $t_n=nh$ – узлы сетки. Функцию, определенную в узлах сетки, называют сеточной функцией.

На каждом интервале времени (t_{n-1}, t_n) уравнение (6) представляет собой дифференциальное уравнение с постоянными параметрами ввиду малости интервалов. Поэтому, рассматриваемое уравнение решается с помощью традиционных точных методов [8]. Его решение на каждом интервале (t_{n-1}, t_n) с учетом начального условия $x(t)_{t=t_{n-1}} = x(n-1)$ имеет вид:

$$x(n) = e^{-z(t_n-t_{n-1})} x(n-1) + \frac{y}{z} [1 - e^{-z(t_n-t_{n-1})}]$$

принимая во внимание, что $h = t_n - t_{n-1}$, получим:

$$x(n) = sx(n-1) + \beta(1-s), \quad (8)$$

$$\text{где } s = e^{-zh}, \beta = \frac{y}{z}$$

Пользуясь рекуррентной формулой (8), находим:

$$x(n) = s^n x(0) + \beta(1-s) \sum_{j=1}^n s^{j-1} \quad (9)$$

Исследуем ее свойства на устойчивость и сходимость.

Обозначим через

$$L_h x^h = f^h \quad (10)$$

разностную схему для приближенного вычисления x дифференциального уравнения (6).

Назовем разностную схему (10) с линейным оператором L_h устойчивой, если при любом f^h уравнение (10) имеет единственное решение x^h , которое удовлетворяет неравенство [9]:

$$\|x^{(h)}\| \leq C \|f^{(h)}\|,$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h , $\|\cdot\|$ – норма.

Это вытекает непосредственно из рекуррентной формулы (9).

Теперь исследуем на устойчивость неоднородную схему (8).

Для её устойчивости достаточно чтобы все S удовлетворяли оценку $\|S\| \leq 1$, что очевидно.

Схему (8) назовем равномерно устойчивой по начальным данным, если для решения однородного уравнения $x(n) = Sx(n-1)$, выполняется оценка [9] $\|x(n)\| \leq c_0 \|x(j)\|$, для всех $0 \leq j \leq n$, где c_0 постоянная, независимая от h .

Рассмотрим схему $x(n) = Sx(n-1)$, тогда $\|x(n)\| \leq \|S\| \|x(n-1)\|$, но $\|S\| \leq 1$, поэтому, $\|x(n)\| \leq \|x(n-1)\|$ или $\|x(n)\| \leq \|x(0)\|$.

Таким образом, требование равномерной устойчивости выполнено.

Схему (8) назовем устойчивой по правой части, если:

$$\|x(n)\| \leq c_0 \|\beta(1-S)\|$$

Из равномерной устойчивости по начальным данным следует её устойчивость по правой части.

Построенная схема является корректной (корректно поставленной), т.к.

при достаточно малом h :

1. решение заданного дифференциального уравнения существует и единственное при любых начальных условиях и заданных правых частях;
2. существуют такие постоянные M_1 и M_2 , не зависящие от h , начальных условий, а также от правых частей, что при любых x справедлива оценка

$$\|x(n)\| \leq M_1 \|x(0)\| + M_2 \|\beta(1-S)\| \quad (11)$$

В неравенстве (11) выражена непрерывная зависимость решения от выходных данных. Это свойство называется устойчивостью.

Рассмотрим вопрос об оценке близости решения разностной схемы (10) к решению дифференциального уравнения (7).

Будем считать, что решение разностной схемы (10) равномерно сходится к решению задачи (7), если $\lim_{h \rightarrow 0} \|x^{(h)} - x\| = 0$

Из курса математического анализа известно [10], что для того, чтобы $x^{(h)}$ равномерно сходилась к x , необходимо и достаточно $\|(n+1) - x(n)\| \rightarrow 0$

Имеем:

$$\begin{aligned} \max_n [x(n+1) - x(n)] &\leq \\ &\leq \max_n [(S^{n+1} - S^n)x(0)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \max_n \left| \beta(1S) \left[\sum_{j=1}^{n+1} S^{j-1} - \sum_{j=1}^n S^{j-1} \right] \right| \leq \\ &\leq \max_n |S^n(S-1) - x(0)| + \max_n |\beta(1-S)S^{n+1}| \end{aligned}$$

При достаточно малых значениях h оба слагаемых стремятся к нулю.

Если норму определим равенством $\|x(n+1) - x(n)\| = \max_n |x(n+1) - x(n)|$,

то получим:

$$\|x(n+1) - x(n)\| \rightarrow 0$$

Заключение

В заключительной части статьи покажем, что последовательность $x^{(h)}$ может сходиться по h только к одному элементу – решению уравнения (6).

Пусть существуют два предельных элемента x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, к каждому из которых сходится $x^{(h)}$, так, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|x^{(h)} - x_1\| = \lim_{h \rightarrow \infty} \|x^{(h)} - x_2\| = 0$$

Покажем, что $x_1 = x_2$. Для этого рассмотрим разность

$$x_1 - x_2 = (x_1 - x^{(h)}) + (x^{(h)} - x_2)$$

и воспользуемся неравенством треугольника

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x^{(h)}) + (x^{(h)} - x_2)\|$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и учитывая сходимость $x^{(h)}$ к x_1 и x_2 , получим $\|x_1 - x_2\| = 0$, т.е. $x_1 = x_2$.

Таким образом, мы показали, что последовательность $x^{(h)}$ по h сходится к одному элементу.

Литература

1. Abzianidze, V., Abzianidze, D., Managadze, R. (2018). On efficiency of application of elements of higher mathematics for the solution of practical tasks of ecological systems safety. *Works of GTU*, 4(510), 117-125. (In Russian);
2. Abzianidze, D., Tabatadze, G., Managadze, R., Abzianidze, V., Inanashvili, N. (2015). Thinking of mathematicians about the ecology and its problems. *Social Economy. Actual Problems of the XXI Century, January-February*, 273-275. (In Russian);
3. Abzianidze, D., Tabatadze, G., Khudadze, N. (2013). About use of mathematical modeling in environmental protection. *Business-Engineering*, 2, 195-197 (In Georgian);
4. Abzianidze, D., Tabatadze, G., Managadze, R., Poporadze, N. (2015). *The use of methods of mathematical ecology for solving problems of environmental protection*. Georgia, Tbilisi: Georgian Technical University. (In Georgian);
5. Abzianidze, D. (1990). Abstract of dissertation for the degree of candidate of technical sciences. Ukraine, Kiev: KPI. (In Russian);
6. Poporadze, N., Abzianidze, D., Dvali, M., Meskhishvili, T. (2012). Application of mathematical methods in medical ecology. *Works of GTU*, 1(483), 54-58. (In Russian);
7. Terekhov, L. (1974). Production functions. Moscow: *Science*. (In Russian);
8. Pontriagin, L. (1974). Ordinary differential equations. Moscow: *Science*. (In Russian);
9. Somarski. Theory of difference scheme. Moscow: *Science*. (In Russian);
10. Korn, G., Korn, T. Math reference book. Moscow: *Science*. (In Russian).

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-3-145-151>

მათემატიკური მეთოდების გამოყენება გარემოს დაცვის პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად

- რუსუდან მანაგაძე** ნავთობისა და გაზის ტექნოლოგიების დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 75
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- ვერა აბზიანიძე** ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტი, საქართველო, თბილისი, 0159, სოფელი დილომი, წმინდა ნინოს ქუჩა #1
E-mail: veriko_abz@mail.ru
- დimitრი აბზიანიძე** ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტი, საქართველო, თბილისი, 0159, სოფელი დილომი, წმინდა ნინოს ქუჩა #1
E-mail: dimitri.abz@mail.ru

რეცენზენტები:

მ. მარდაშოვა, სტუ-ის სამთო-გეოლოგიური ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: m_mardashova@gtu.ge

ვ. ხიტარიშვილი, სტუ-ის სამთო-გეოლოგიური ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: v.khitarishvili@gtu.ge

ანოტაცია. მათემატიკური მეთოდების გამოყენების ეფექტურობაზე, გარემოს ეკოლოგიური პროცესების ანალიზისას, სტატისტიკის ავტორები საუბრობდნენ მოცემული ჟურნალის 2018 წლის გამოცემის მე-4 ნომერში. ამჯერად, ნაშრომში ავტორები განიხილავენ და ყურადღებას ამახვილებენ მათემატიკის მნიშვნელოვან როლზე უშუალოდ ადამიანისა და გარემოს ურთიერთქმედების პროცესების განხილვისას.

ცნობილია, რომ ანთროპოგენური ობიექტები (დასახლებული პუნქტები, სამრეწველო დაწესებულებები, ტრანსპორტი და სხვ.) თავიანთი ფუნქციონირების შედეგად სხვადასხვაგვარ ზემოქმედებას ახდენს როგორც გარემოზე ასევე ადამიანზე. ამ პროცესების შესასწავლად, იმისათვის, რომ მოხდეს გარემოს მდგომარეობის შეფასება და ეკოლოგიური წონასწორობის შენარჩუნება, საჭიროა ერთმანეთთან დაკავშირებული, მაგრამ სრულიად განსხვავებული პროცესების გაერთიანება. ამ პრობლემის გადაწყვეტა საკმაოდ რთულია და მოითხოვს სხვადასხვა დარგის სპეციალისტთა მოღვაწეობის შედეგების გაერთიანებას, საერთო ენის მოძებნას, რასაც კარგად ახერხებს მათემატიკა.

ამგვარად, გარემოს შესწავლის პროცესში ბუნებრივად შემოვიდა მათემატიკური თეორიები და მეტიც, მათემატიკური თეორიები განუყოფელი ნაწილია სამყაროზე ჩვენი წარმოდგენების ასახვას და გადმოსაცემად.

საკვანძო სიტყვები: გარემო; ეკოლოგიური პროცესები; მოდელი; სხვაობითი სქემები.

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-3-145-151>

Application of Mathematical Methods in Solving Practical Problems of Environmental Protection

Rusudan Managadze	Department of Oil and Gas Technology, Georgian Technical University, Tbilisi, 0160, Georgia, 75 M. Kostava str. E-mail: r.managadze@gtu.ge
Vera Abzianidze	Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Georgia, 0126, Tbilisi, Digomi Village, 1 Tsminda Nino str. E-mail: veriko_abz@mail.ru
Dimitri Abzianidze	Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Georgia, 0126, Tbilisi, Digomi Village, 1 Tsminda Nino str. E-mail: dimitri.abz@mail.ru

Reviewers:

M. Mardashova, Professor, Faculty of Mining and Geology, GTU
E-mail: m_mardashova@gtu.ge

V. Khitarishvili, Professor, Faculty of Mining and Geology, GTU
E-mail: v.khitarishvili@gtu.ge

Abstract. The authors of this article considered the question of the effectiveness of the application of mathematical methods in the analysis of ecological processes in the fourth issue of this journal for 2018.

In the proposed article, the authors continue to develop this idea, considering the interaction of a person with the environment this time. The authors' main attention is focused on showing the important role of mathematics in human interaction with the environment.

It is known that anthropogenic objects (settlements, various industrial enterprises, transport, etc.), as a result of their functioning, have different kinds of effects on a person. To study these processes, there is a need for the development of sciences in order to predict the state of the environment and manage the processes of ecological balance in the geological environment, between nature and the technosphere (technogenic activities of people).

Mathematicians play a decisive role in the study of these processes. However, the subject of research is invariably difficult, because the study requires the unification of interrelated processes of the most diverse nature. Note that the organization of these studies is very difficult, because the study of the anthropogenic influence of man on the environment requires combining the activities of a number of specialists in various fields. A specialist-interpreter, capable of creating a common language of research in these conditions, turns out to be a mathematician.

Thus, mathematical theories arose naturally in the process of studying the surrounding world; mathematical theories are an essential part of our understanding of the world.

Key words: difference scheme; environment; ecological processes; model.

Дата рассмотрения 15.05.2021

Дата поступления 15.06.2021

Подписано к печати 29.09.2021