UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2020-3-135-154>

ერთი ფუნდამენტური ამოცანის შესახებ ბიდიოფანტურ გეომეტრიულ ფიგურებზე

ზურაბ აღდგომელაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

რეცენზენტები:

ალ. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

მ. მანია, თსუ-ის ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

E-mail: mania@rmi.ge

ანოტაცია. ნაშრომში დასმულია და შესწავლილია ბიდიოფანტური n -კუთხედების (სტატიის ავტორი ბიდიოფანტურს უწოდებს ისეთ მთელრიცხვას მრავალკუთხედს, რომლის ყოველი წვეროს კოორდინატები მთელი რიცხვებია) შემსწავლელი ამოცანებიდან ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანა.

ამოცანა $(n; k)$: არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე k -ს ტოლია, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

საკვანძო სიტყვები: ბიდიოფანტური; დიოფანტური; ფუნდამენტური კვლევა.

შესავალი

დიოფანტური ვუწოდოთ მრავალკუთხედს, რომლის ყოველ ორ წვეროს შორის მანძილი ნატურალური რიცხვით გამოისახება.

ბიდიოფანტური ვუწოდოთ ისეთ დიოფანტურ მრავალკუთხედს, რომლის ყოველი წვეროს კოორდინატები მთელი რიცხვებია.

ამ ნაშრომში განვიხილავთ ჩვენ მიერ დასმულ ერთ ამოცანას, რომელიც უდავოდ არის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანა ბიდიოფანტური მრავალკუთხედების თვისებების შემსწავლელი ამოცანებიდან.

ძირითადი ნაწილი

ამოცანა $(n; k)$** არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის, ბიდიო-

ფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k -სი, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

ჯერ განვიხილოთ ამოცანა* ($n; k$).

დიოფანტური გეომეტრიული ფიგურების შემსწავლელი ამოცანებიდან ცხადია, ერთ-ერთი უმთავრესი ადგილი უჭირავს შემდეგს:

ამოცანა* ($n; k$) არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის, დიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k -სი, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

ჩვენ მიერ ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n -კუთხედი, როგორც ამოზნექილი, ისე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია 1-ის. ე.ი. $k=1$ -სათვის ზემოთ ხსენებული საკითხი გადაჭრილია.

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ლემა 1. თუ დიოფანტური სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი ტოლია 1-ის, მაშინ მისი დანარჩენი გვერდები წარმოადგენს ამ სამკუთხედის ტოლფერდებს.

მოც: $\triangle ABC$;

$$\begin{array}{l} |BC|, |AC| \in N; \\ |AB| = 1. \end{array} \quad \text{სურ. 1} \quad \frac{}{u.d: |BC| = |AC|}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $|BC| \leq |AC|$. სამკუთხედის უტოლობის ძალით $|AB| + |BC| > |AC|$ ანუ $1 + |BC| > |AC|$.

$$\begin{cases} |BC|, |AC| \in N; \\ |BC| \leq |AC| < |BC| + 1. \end{cases} \Rightarrow (|BC| = |AC|). \text{ რ.დ.გ.}$$

ეს შესანიშნავი თვისება არის ერთ-ერთი ქვაკუთხედი დიოფანტური და ბიდიოფანტური გეომეტრიული ფიგურების კვლევის აპარატისა.

ლემა 2. ამოზნექილი დიოფანტური ოთხკუთხედის ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია.

სურ. 2

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. ვთქვათ ოთხკუთხედ $ABCD$ -ში თითოეული გვერდისა და დიაგონალის სიგრძე

გამოისახება ნატურალური რიცხვით და ამასთან ერთ-ერთი გვერდის სიგრძე, ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $|AB| = 1$.

ლემა 1-ის თანახმად $|BC| = |AC|$ და $|BD| = |AD|$.

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან მაშინ C და D წერტილები უნდა მდებარეობდეს $[AB]$ -ს შუამართოზე. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია. მაშასადამე ამ პირობით $\triangle ABCD$ -ს თითოეული გვერდის სიგრძე 1-ზე მეტია.

ახლა ვთქვათ $\triangle ABCD$ -ს დიაგონალის სიგრძე ტოლია 1-ის, ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $|AC| = 1$.

ლემა 1-ის თანახმად $|AB| = |BC|$ და $|CD| = |AD|$. ამასთან $\triangle BOC$ და $\triangle AOD$ -დან სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$|BD| + |AC| > |BC| + |AD| \quad \text{ანუ} \quad |AB| + |AD| < |BD| + 1.$$

$\triangle ABD$ -დან გვაქვს $|AB| + |AD| > |BD|$. ე.ი.

$$\begin{cases} |AB|, |BD|, |AD| \in N; \\ |BD| < |AB| + |AD| < |BD| + 1. \end{cases} \quad \text{ეს შეუძლებელია. ამრი-}$$

გად დაშვება მცდარია ანუ $|AC| > 1$.

ე.ი. საბოლოოდ გვაქვს, რომ ყოველი ამოზნექილი დიოფანტური ოთხკუთხედის თითოეული გვერდი-სა და დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია. რ.დ.გ.

ლემა 3. თუ სიბრტყეზე მდებარე ოთხი წერტილიდან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე და ამასთან მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით, მაშინ ამ მანძილებიდან თითოეული მათგანი 1-ზე მეტია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. ვთქვათ სიბრტყეზე მოიმეზნება ისეთი ოთხი წერტილი, რომელთაგან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით და ამასთან რომელიმე ამ მანძილებიდან 1-ის ტოლია. მაშინ **ლემა 1**-ის თანახმად დანარჩენი ორივე წერტილი უნდა მდებარეობდეს 1-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთის შუამართობზე. აქ გვექნებოდა ორი შემთხვევა

სურ. 3

სურ. 4

1) ეს შემთხვევა განხილულია **ლემა 2**-ში.

2) $\triangle AOC$ და $\triangle DOB$ -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2; \\ |BD|^2 = |OB|^2 + |OD|^2; \\ |OD| = |OC| + |CD|, \quad |AO| = |OB| = 0,5; \\ |AC| = |CB| = m, \quad |AD| = |DB| = n, \quad |CD| = l, \quad m, n, l \in N. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + |OC|^2; \\ n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (l + |OC|)^2; \\ m, n, l \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |OC| = \frac{n^2 - m^2 - l^2}{2l}; \\ 4m^2 - 1 = (2|OC|)^2; \\ m, n, l \in N. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OC| = \frac{n^2 - m^2 - l^2}{l} = q \in Q_+; \\ 4m^2 - 1 = q^2; \\ m, n, l \in N. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m, q \in N; \\ 4m^2 - q^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m, q \in N; \\ (2m - q)(2m + q) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m, q \in N; \\ 2m - q = 1; \\ 2m + q = 1. \end{cases}$$

ეს კი შეუძლებელია. მაშასადამე მანძილი ნებისმიერ ორ წერტილს შორის ამ მოცემული წერტილებიდან, 1-ზე მეტია. რ.დ.გ.

თეორემა 1. ამოზნექილი დიოფანტური n -კუთხედის ($n > 3$), ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. დავუშვათ ამოზნექილი დიოფანტური n -კუთხედის ($n > 3$), რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია 1-ის. **ლემა**

1-ის ძალით დანარჩენი წვეროები უნდა მდებარეობდეს ამ ორი წვეროს შემართებული მონაკვეთის შუამართობზე. ვინაიდან ეს n -კუთხედი უნდა იყოს ამოზნექილი, ამიტომ ცხადია $n=4$, მაგრამ ლემა 2-ის თანახმად ასეთი ოთხკუთხედი არ არსებობს. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ ყოველი ამოზნექილი დიოფანტური n -კუთხედის ($n > 3$), ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია. რ.დ.გ.

თეორემა 2. თუ სიბრტყეზე მდებარე n -წერტილიდან ($n > 3$), არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ

წრფეზე და ამასთან მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით, მაშინ ამ მანძილებიდან ყოველი მათგანი 1-ზე მეტია.

ისევე, როგორც წინა თეორემაში, თუ მანძილი დიოფანტური მრავალკუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის ტოლია 1-ის, მაშინ მისი დანარჩენი წვეროები უნდა მდებარეობდეს ამ ორი წვეროს შემართებული მონაკვეთის შუამართობზე. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ამ წვეროებიდან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, მაშინ გვექნება მხოლოდ შემდეგი შემთხვევები (იხ. სურ. 5).

სურ. 5

პირველ ოთხს არ გააჩნია ამონახსნი **თეორემა 1**-ის თანახმად (ოთხივე შევსებით ღებულობს 1)-ის სახეს და ვინაიდან არ არსებობს ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, ამიტომ არ იარსებებს არც 2), 3) და 4) სახის დიოფანტური ოთხკუთხედები, ხოლო ბოლო ოთხს არ გააჩნა ამონახსნი **თეორემა 2**-ის ძალით. (აქაც შევსებით 6), 7) და 8) დადის 5)-ის სახეზე. ე.ი.

ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ ამოცანის პირობით მოცემული მანძილებიდან ყოველი მათგანი 1-ზე მეტია. ამით მთლიანად დამტკიცებულია.

ე. ი. ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

ბიდიოფანტური გეომეტრიული ფიგურების შემსწავლელი ამოცანებიდან ცხადია, ერთ-ერთი უმთავრესი ადგილი უჭირავს შემდეგს.

ამოცანა ($n; k$)** არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის, ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k -სი, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

ჩვენ მიერ **ამოცანა* ($n;1$)**-ის ამოხსნისას, ნაჩვენები იყო, რომ არ არსებობს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n > 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლია. აქედან გამომდინარე ვერ იარსებებს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედიც ($n > 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლია. რაც შეეხება ბიდიოფანტურ სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი გვერდი 1-ის ტოლია, ის ლემა 1-ის თანახმად უნდა იყოს ტოლფერდა, მაგრამ მაშინ, ამ ბიდიოფანტური სამკუთხედის წვერო (ფერდების საერთო წერტილი) ვერ იქნება ბიდიოფანტური. ე.ი. არ არსებობს ასეთი ბიდიოფანტური სამკუთხედი. ამით მთლიანად გაეცა პასუხი ამოცანა** ($n;1$)-ს, $k=1$ -სათვის ანუ

თეორემა ($n;1$)** არ არსებობს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), როგორც ამოზნექილი, ასევე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ **ამოცანა** ($n;k$)**-ს $k=2$ -სათვისაც არ მოიძებნება ბიდიოფანტური n -კუთხედი.

თეორემა ($n;2$)** არ მოიძებნება ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია 2-ის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. დავუშვათ, რომ $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ n -კუთხედის ყოველი გვერდის და ყოველი დიაგონალის სიგრძე გამოისახება ნატურალური რიცხვით და ამასთან ერთ-ერთი მათგანის სიგრძე 2-ის ტოლია. მაშინ ყველა იმ სამკუთხედებისათვის,

რომელთა ფუძე არის 2 სიგრძის ტოლი მონაკვეთი, ხოლო მესამე წვეროს კი ამ n -კუთხედის რომელიმე წვერო, ფერდების სიგრძეთა სხვაობის მოდული 0-ის ან 1-ის ტოლია (ეს ადვილი საჩვენებელია სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით).

ვინაიდან არ არსებობს კოორდინატა ღერძის არაპარალელური, 2-ის ტოლი სიგრძის ბიდიოფანტური მონაკვეთი (ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ არ არსებობს პითაგორასეული სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა 2-ის ტოლია). ამიტომ ყოველი ზემოთ ხსენებული სამკუთხედისათვის გვაქვს მხოლოდ ერთ-ერთი ქვემოთ ჩამოთვლილი შემთხვევიდან (იხ. სურ. 6 და სურ. 7)

სურ. 6

სურ. 7

I. ამ შემთხვევაში, ვინაიდან $[A_p A_k]$ და $\Delta A_p A_q A_k$ -ბიდიოფანტურებია, ამიტომ $\Delta A_p M A_q$ -ც, ასევე უნდა იყოს ბიდიოფანტური, მაგრამ ეს შეუძ-

ლებელია, ვინაიდან არ არსებობს ისეთი დიოფანტური მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის რომელიმე კათეტის სიგრძე 1-ის ტოლია, მაშასადამე თუ არსებობს ასეთი ბიდიოფანტური სამკუთხედი, მაშინ ის არ უნდა იყოს ტოლფერდა.

II. ამ შემთხვევაში ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და $\Delta A_k M A_q$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ (a+1)^2 = (b+2)^2 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ a^2 + 2a + 1 = b^2 + 4b + 4 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ 2a + 1 = 4b + 4; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

ეს კი შეუძლებელია.

მაშასადამე ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ არ არსებობს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n > 3$), როგორც ამოზნექილი ასევე, ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია 2-ის. რ.დ.გ.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა**(n ; k) $k = 3$ -სათვის.

ამოცანა**(n ; 3) არსებობს თუ არა ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n > 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 3-ის ტოლია.

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n > 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 3-ის ტოლია. მაშინ ყველა იმ სამკუთხედებისათვის, რომელთა ფუძეც არის 3-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთი, ხოლო მესამე წეროს კი – ამ n -კუთხედის რომელიმე წერო, ფერდების სიგრძეთა სხვაობის მოდული 0 ტოლია; 1 ან 2-ის. (ეს ადვილი საჩვენებელია სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით).

ვინაიდან არ არსებობს კოორდინატა ღერძის არაპარალელური ბიდიოფანტური

მონაკვეთი სიგრძით 3-ის ტოლი, ამიტომ ყველა ასეთი სამკუთხედებისათვის გვაქვს ერთ-ერთი ქვემოთ ჩამოთვლილი შემთხვევებიდან (იხ. სურ. 8, სურ. 9, სურ. 10).

სურ. 8

სურ. 9

სურ. 10

I. ამ შემთხვევაში ვინაიდან $[A_p A_k]$ და $\Delta A_p A_q A_k$ -ბიდიოფანტურებია, ამიტომ $\Delta A_p M A_q$ უნდა იყოს ბიდიოფანტური. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან $[A_p M]$ არ არის ბიდიოფანტური.

II. ამ შემთხვევაში ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და $\Delta A_k M A_q$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ (a+1)^2 = (b+3)^2 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ 2a + 1 = 6b + 9; \\ a, b, h \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 2(b+1)(b+2); \\ a = 3b + 4; \\ b, h \in N. \end{cases} \quad (1)$$

III. ამ შემთხვევაში ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და

$$2(b+1)(b+2) = 4(2p+1)(p+1) = t^2. \quad (3)$$

$\Delta A_k M A_q$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს:

და $b = 2p$ -სათვის

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ (a+2)^2 = (b+3)^2 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ a^2 + 4a + 4 = b^2 + 6b + 9 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ 2(2a - 3b - 4) = 1; \\ a, b, h \in N. \end{cases} \quad (2)$$

მაგრამ ეს შეუძლებელია.

მაშასადამე ყველა ასეთი სამკუთხედებისათვის

$[A_p A_k]$ კოორდინატა ღერძის პარალელურია და

$$|A_p A_k| = 3; \quad |A_p A_q| = 3b + 5; \quad |A_q A_k| = 3b + 4;$$

$$|A_k M| = b; \quad |A_p M| = h = 2\sqrt{2(b+1)(b+2)},$$

სადაც $b \in N$ და $2(b+1)(b+2)$ არის ნატურალური

რიცხვის კვადრატი.

$b = 2p$ -სათვის

$$2(b+1)(b+2) = 4p(2p+1) = t^2 \quad (4)$$

(3)-სა და (4)-ს გააჩნიათ უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში. მართლაც, ვინაიდან $(p+1; 2p+1) = 1$, ამიტომ (3)-დან გამომდინარეობს ის, რომ უნდა მოიძებნებოდეს ისეთი $m, n \in N$, რომელთათვისაც

$$\begin{cases} p+1 = m^2; \\ 2p+1 = n^2. \end{cases} \Rightarrow n^2 - 2m^2 = -1. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (a_1^2 - 2b_1^2)(c_1^2 - 2d_1^2) &= (a_1c_1 + 2b_1d_1)^2 - 2(a_1d_1 + b_1c_1)^2 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (a_1^2 - 2b_1^2)(c_1^2 - 2d_1^2) &= (a_1c_1 - 2b_1d_1)^2 - 2(a_1d_1 - b_1c_1)^2 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

(6)-ისა და (7)-ის მეშვეობით, განტოლებების $(c_1^2 - 2d_1^2 = 1$ და $a_1^2 - 2b_1^2 = -1)$ ამონახსნების კომბინირებით შეგვიძლია მივიღოთ ყველა ახალი ამონახსნი (5)-ისა. ქვემოთ მოგვყავს გამოთვლების რამდენიმე შედეგი:

n	m	$n^2 - 2m^2$	b	$2\sqrt{2(b+1)(b+2)}$
7	5	-1	48	140
41	29	-1	1680	4756
239	169	-1	57120	80782
1393	985	-1	1 940 448	2 744 210
8119	5741	-1	65 918 160	93 222 358

სურ. 11

გაცილებით ადვილად მიიღება (4)-ის ამონახსნები. მართლაც, ვინაიდან $(p; 2p+1) = 1$, ამიტომ (4)-ის ამონახსნები შეგვიძლია მივიღოთ მარტივად. გამომ-

დინარეობს, რომ უნდა არსებობდეს ისეთი m_1 ,
 $n_1 \in N$, რომელთათვისაც

$$\begin{cases} p = m_1^2; \\ 2p+1 = n_1^2. \end{cases} \Rightarrow n_1^2 - 2m_1^2 = 1. \quad (8)$$

მაშასადამე (4)-ის ამონახსნები შეგვიძლია მივიღოთ პელის (8) განტოლების ამოხსნით. ამასთან $b = 2m_1^2 - 1$.

III. ტიპის ბიდიოფანტურ სამკუთხედთა სიმრავლე, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, არ არის ცარიელი სიმრავლე.

$$\cos \angle A_p \hat{A}_K A_q = -\cos \angle A_q \hat{A}_K M = -\frac{b}{3b+4}.$$

$$\cos \angle A_q \hat{A}_p A_k = \frac{b+3}{3b+5}.$$

სურ. 12

მაშასადამე b -ს გადიდებით მცირდება $\cos \angle A_p \hat{A}_K A_q$ და $\cos \angle A_q \hat{A}_p A_k$. ე.ი. იზრდება $\angle A_p \hat{A}_K A_q$ და $\angle A_q \hat{A}_p A_k$.

აქედან გამომდინარე, თუ $b, d \in N$ ($d > b$), მაშინ III ტიპის სამკუთხედებისათვის შეიძლება გვექონდეს IV ან V შემთხვევა.

განვიხილოთ IV შემთხვევა.

$$\Delta A_p A_q A_{q_1} \text{ -დან } c > (3d+5) - (3b+5) = 3(d-b)$$

$$A_q \in [MN] \parallel [A_p A_k] \Rightarrow \Delta MNA_q$$

$$\begin{aligned} \Delta \angle EA_{q_1} &\Rightarrow \frac{|MA_{q_1}|}{|A_p A_{q_1}|} = \frac{|NA_{q_1}|}{|EA_{q_1}|} \Rightarrow |MA_{q_1}| = \\ &= (3d+5) \left(\frac{|2\sqrt{2(d+1)(d+2)} - 2\sqrt{2(b+1)(b+2)}|}{2\sqrt{2(d+1)(d+2)}} \right) = \\ &= (3d+5) \left(1 - \sqrt{\frac{b+1}{d+1} \cdot \frac{b+2}{d+2}} \right) < (3d+5) \left(1 - \frac{b+1}{d+1} \right) = \\ &= \frac{(3d+5)(d-b)}{d+1} = 3(d-b) + \frac{2(d-b)}{d+1} < 3(d-b) + 2. \\ &\begin{cases} 3(d-b) < c < 3(d-b) + 2; \\ b, d \in N. \end{cases} \Rightarrow c = 3(d-b) + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta A_q NA_{q_1} \text{ -დან } |A_q A_{q_1}|^2 &= |A_q N|^2 + |NA_{q_1}|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3(d-b) + 1)^2 = (d-b)^2 + \\ &+ 8(\sqrt{(d+1)(d+2)} - \sqrt{(b+1)(b+2)})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8(d-b)^2 + 6(d-b) + 1 = \\ &= 8(\sqrt{(d+1)(d+2)} - \sqrt{(b+1)(b+2)})^2, \end{aligned}$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან ბოლო ტოლობის მარცხენა მხარე კენტია, ხოლო მარჯვენა კი, თუ ის ნატურალური იქნება, – ლუწი.

სურ. 13

ახლა განვიხილოთ V შემთხვევა. ცხადია, რომ $|A_q O| \in (3b+4; 3b+5)$ და $|A_l O| \in (3d+4; 3d+5)$, ამი-

ტომ $|A_q A_l| \in (3b+3d+8; 3b+3d+10)$ და თუ საიდანაც ვღებულობთ $9(b+d+3)^2 = (b+d+3)^2 + |A_q A_l|^2 \in N$, მაშინ $|A_q A_l| = 3b+3d+9 = 3(b+d+3)$. $|A_q E|^2 \Leftrightarrow 8(b+d+3)^2 = |A_q E|^2$. ეს კი შეუძლებელია,

($A_l N M E$ მართკუთხედიდან)

$$\begin{cases} |A_l E| = |NM| = b+d+3; \\ |ME| = |A_l N|. \end{cases},$$

$$(|A_q M|, |A_l N| \in N) \Rightarrow |A_q E| \in N,$$

ვინაიდან $|A_q E| = |A_q M| + |A_l N|$.

მართკუთხა $\Delta A_l E A_q$ -დან $|A_l A_q|^2 = |A_l E|^2 + |A_q E|^2$,

ვინაიდან $b, d, |A_q E| \in N$. ე.ი. არ არსებობს IV და V ტიპის ბიდიოფანტური ოთხკუთხედი, ამიტომ ყველა ბიდიოფანტური n -კუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძე 3-ის ტოლია, უნდა იყოს მხოლოდ VI ტიპის (3-ის ტოლი სიგრძის გვერდის შემცველი წრფის ერთ მხარეს მოქცეული) ხოლო რომლის დიაგონალის სიგრძე 3-ის ტოლია, უნდა იყოს მხოლოდ VII ტიპის.

სურ. 14

სურ. 15

სურ. 16

სურ. 17

სურ. 18

სურ. 19

სურ. 20

სურ. 21

VIv

სურ. 22

VIvI

სურ. 23

შემთხვევა VI-სათვის, $\Delta A_l E A_q$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს: $|A_l A_q|^2 = |A_l E|^2 + |A_q E|^2$. საიდანაც ვღებულობთ

$$c^2 = (b + d + 3)^2 + 4 \left(\sqrt{2(b+1)(b+2)} - \sqrt{2(d+1)(d+2)} \right)^2. \quad (9)$$

განვიხილოთ (9) $d = 0$ -სათვის (ეს არის შემთხვევა VI_I). ამ შემთხვევისათვის გვაქვს: $|A_p A_l| = 4$, $|A_p A_k| = 3$, $|A_l A_k| = 5$,

$$|A_p A_q| = 3b + 5, \quad |A_k A_q| = 3b + 4, \quad |A_k M| = b,$$

$$|A_q M| = 2\sqrt{2(b+1)(b+2)}, \quad |A_q E| = 2\sqrt{2(b+1)(b+2)} - 4.$$

ამიტომ (9) მიიღებს სახეს:

$$c^2 = (b + 3)^2 + 4 \left(\sqrt{2(b+1)(b+2)} - 2 \right)^2. \quad (10)$$

ბლაგვკუთხა $\Delta A_p A_l A_q$ -დან სამკუთხედის

უტოლობით გვაქვს:

$$\begin{cases} c + 4 > 3b + 5; \\ c < 3b + 5. \end{cases} \Rightarrow c \in (3b + 1; 3b + 5).$$

ვინაიდან $c \in \mathbb{N}$, ამიტომ

$$c \in \{3b + 2; 3b + 3; 3b + 4\}. \quad (11)$$

(10)-ის გარდაქმნით მივიღებთ:

$$16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 9b^2 + 30b + 41 - c^2. \quad (12)$$

(11)-ისა და (12)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{cases} 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 9b^2 + 30b + 41 - (3b + 2)^2; \\ 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 9b^2 + 30b + 41 - (3b + 3)^2; \\ 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 9b^2 + 30b + 41 - (3b + 4)^2. \end{cases} \quad b \in \mathbb{Z}_0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 18b + 37; \\ 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 12b + 32; \\ 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 6b + 25. \end{cases} \quad (13) \quad b \in \mathbb{Z}_0.$$

(13) სისტემის პირველ და მესამე განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი მთელ დადებით რიცხვებში, ვინაიდან ამ განტოლებების მარცხენა მხარე, თუ ის ნატურალურია – ლუწია, მარჯვენა კი – კენტი. მასადავს (13)-დან ვღებულობთ:

$$\begin{cases} 16\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 12b + 32; \\ b \in \mathbb{Z}_0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2b^2 + 6b + 4} = 3b + 8; \\ b \in \mathbb{Z}_0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(2b^2 + 6b + 4) = 9b^2 + 48b + 64; \\ b \in \mathbb{Z}_0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23b^2 + 48b = 0; \\ b \in \mathbb{Z}_0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{48}{23}; \\ b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow (b = 0).$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიღეთ VI_{III} ტიპის მართკუთხედი.

ახლა განვიხილოთ (9) $d = b \neq 0$ -სათვის. ამ შემთხვევაში გვაქვს VI_{III}. ასეთი ბიდიოფანტური ოთხკუთხედები არსებობს იმ $b \in N$ -სათვის, რომელთათვისაც $\sqrt{2(b+1)(b+2)}$ – ნატურალური რიცხვია. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ასეთი რიცხვები უამრავია.

რაც შეეხება (9)-ს, მისი ამონახსნი იმ შემთხვევაში, როცა $b, d \in N$ და $b \neq d$, ჩვენ მიერ პროგრამა **Basic**-ზე შემოწმებული იყო b და d 1 000 000-მდე, მაგრამ ასეთი ნატურალური c , b და d არ მოიძებნა.

ჩვენი აზრით ასეთი c , b და d არ არსებობს. აღსანიშნავია, რომ ეს შემთხვევა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ამოცანა ბიდიოფანტურ ელიფსზე, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია A_l და A_q წერტილებში და რომლის დიდი დიამეტრის სიგრძე $3b + 3d + 9$ -ს ტოლია. მაშასადამე არსებობა ასეთი $A_p A_l A_q A_K$ ბიდიოფანტური ოთხკუთხედისა ტოლფასია არსებობისა ბიდიოფანტურ ელიფსზე ისეთი ბიდიოფანტური ქორდისა, რომელიც არ არის პარალელური კოორდინატა ღერძის.

(9)-ის ანალოგიურად შემთხვევა VII-სათვის მართკუთხა $\Delta A_q E A_l$ -დან მივიღებთ:

$$c^2 = (d - b)^2 + 4\left(\sqrt{2(b+1)(b+2)} + \sqrt{2(d+1)(d+2)}\right)^2. \quad (14)$$

$b = d$ -სათვის მივიღებთ შემთხვევა VII_I და (14) მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} c^2 = 4\left(\sqrt{2(b+1)(b+2)}\right)^2; \\ c, b \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{2(b+1)(b+2)}; \\ c, b \in N. \end{cases} \quad (15)$$

როგორც უკვე ზემოთ იყო ნაჩვენები (15)-ს გააჩნია უამრავი ამონახსნი, ხოლო რაც შეეხება (14)-ს, (9)-ის მსგავსად პროგრამა **Basic**-ზე შემოწმებული b და d 1 000 000-მდე, მაგრამ ასეთი ნატურალური c , b და d ვერ მოიძებნა. (ჩვენი აზრით ასეთი ოთხკუთხედი არ არსებობს).

VI_{III}-ს არ გააჩნია ამონახსნი, ვინაიდან $[EA_q]$ -ს სიდიდე უნდა იყოს ნატურალური.

VI_{IV}-ს არ გააჩნია ამონახსნი, ვინაიდან $\Delta A_l N A_p$ და $\Delta A_k N A_p$ ერთდროულად უნდა იყოს დიოფანტური მართკუთხა სამკუთხედები, რაც შეუძლებელია ვინაიდან დიოფანტურ განტოლება $x^2 + 3^2 = y^2$ -ს გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში $x=4$ და $y=5$.

VI_V – შეუძლებელია, ვინაიდან $|A_l A_k| + |A_l A_p| = |A_l A_p| + |A_l A_k|$, ეს კი ეწინააღმდეგება ცნობილ ამოცანას, რომლის მიხედვითაც ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამი მეტი უნდა იყოს მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეთა ჯამზე.

VI_{VI} შეუძლებელია, ვინაიდან მაშინ გვექნებოდა, რომ $|BD| = 3c+3$ ან $|BD| = 3c+5$.

პირველი შემთხვევა ($|BD| = 3c+3$) შეუძლებელია, ვინაიდან გვექნებოდა, რომ $|BD| + |AC| = |BC| + |AD|$, რაც ეწინააღმდეგება VI_{IV}-ში ხსენებულ დებულებას.

მეორე შემთხვევაში ვღებულობთ, რომ ΔBAD მართკუთხაა და $c=0$ (ეს კი განხილული იყო VI_{III}-ში).

დავუბრუნდეთ – V-ს.

$$\begin{cases} \cos \widehat{A_q A_p A_k} = \frac{b+3}{3b+5} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3(3b+5)}; \\ \cos \widehat{A_l A_p A_k} = -\frac{d}{3d+4} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3(3d+4)}; \\ d, b \in N. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_q A_p A_k} \in (0; \arccos \frac{1}{3}); \\ \widehat{A_l A_p A_k} \in (0; \pi - \arccos \frac{1}{3}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_l A_p A_q} \in (0; \pi).$$

ანალოგიურად $\widehat{A_l A_k A_q} \in (0; \pi)$.

მივიღეთ, რომ $k=3$ -სათვის ბიდიოფანტური n -კუთხედი შეძლება იყოს მხოლოდ ან სამკუთხედი, ან ოთხკუთხედი, ვინაიდან მას არ შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი ფორმები (იხ. სურ. 24, სურ. 25, სურ. 26).

სურ. 24

სურ. 25

სურ. 26

საბოლოოდ გვაქვს

თეორემა (n;3)** თუ ბიდიოფანტური n -კუთხედისათვის $k=3$, მაშინ $n \in \{3; 4\}$.

ახლა განვიხილოთ **ამოცანა** (n; k)** $k=4$ -სათვის.

ამოცანა (n;4)** არსებობს თუ არა ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 4-ის ტოლია, და თუ არსებობს ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია 4-ის. მაშინ ყველა იმ სამკუთხედებისათვის, რომელთა ფუძეც არის 4-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთი, ხოლო მესამე წვეროს კი – ამ n -კუთხედის რომელიმე წვერო, გვერდების სიგრძეთა სხვაობის მოდული ტოლია 0; 1; 2 ან 3-ის. (ეს ადვილი საჩვენებელია სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით).

ვინაიდან არ არსებობს კოორდინატა ღერძის არაპარალელური ბიდიოფანტური მონაკვეთი, რომლის სიგრძე 4-ის ტოლია, (ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ არ არსებობს პითაგორასეული სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზის სიგრძე 4-ის ტოლია) ამიტომ ყველა ასეთი სამკუთხედებისათვის გვაქვს ერთ-ერთი შემდეგი ოთხი შემთხვევიდან (იხ. სურ. 27, სურ.28, სურ. 29, სურ. 30).

სურ. 27

სურ. 28

სურ. 29

სურ. 30

VIII_{II} – შემთხვევაში, ვინაიდან $[A_p A_k]$ და $\Delta A_p A_q A_k$ - ბიდიოფანტურებია, ამიტომ $\Delta A_p M A_q$ -ც უნდა იყოს ბიდიოფანტური ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან არ არსებობს ბიდიოფანტური მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტის სიგრძეა 2.

VIII_{II}-შემთხვევაში, ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და $\Delta A_k M A_q$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ (a+1)^2 = (b+4)^2 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ a^2 + 2a + 1 = (b^2 + h^2) + 8b + 16; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ 2a + 1 = 8b + 16; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

ეს კი შეუძლებელია.

VIII_{IV} – შემთხვევაში, ანალოგიურად VIII_{II}-ისა, მართკუთხა ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და $\Delta A_k M A_q$ -

დან გვაქვს:
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ 6a + 9 = 8b + 16; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$
 ეს კი შეუძლებელია.

VIII_{III} – შემთხვევაში ბიდიოფანტურ $\Delta A_p M A_q$ და $\Delta A_k M A_q$ პითაგორას თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ (a+2)^2 = (b+4)^2 + h^2; \\ a, b, h \in N. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + h^2; \\ a = 2b + 3; \\ a, b, h \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 3(b+1)(b+3); \\ a = 2b + 3; \\ b, h \in N. \end{cases}$$

მაშასადამე ყველა ასეთი სამკუთხედებისათვის $[A_p A_k]$ პარალელურია კოორდინატა ღერძის. ამასთან: $|A_p A_k| = 4$; $|A_p A_q| = 2b + 5$; $|A_p A_k| = 4$; $|A_p A_q| = 2b + 5$; სადაც $b \in N$ და $3(b+1)(b+3)$ წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის სრულ კვადრატს. ჩვენ მიერ შემოწმებული იყო 25 000-მდე და ასეთი b აღმოჩნდა სულ 54 ცალი.

b	$\sqrt{3(b+1)(b+3)}$	b	$\sqrt{3(b+1)(b+3)}$
5	12	5820	10084
24	45	7171	12424
95	168	7951	13775
360	627	8731	15126
1349	2340	9511	16477
5040	8733	10082	17466
5820	10084	10862	18817
7171	12424	11433	19806
7951	13775	11642	20168

სურ. 31

სურ. 32

სურ. 33

სურ. 34

სურ. 35

სურ. 36

სურ. 37

სურ. 38

სურ. 39

სურ. 40

სურ. 41

სურ. 42

სურ. 43

IX – ტიპის ბიდიოფანტურ სამკუთხედთა სიმრავლე, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, არ არის ცარიელი სიმრავლე.

$$\begin{cases} \cos \widehat{A_q A_p A_k} = \frac{b+4}{2b+5}; \\ \cos \widehat{A_p A_k A_q} = -\cos \widehat{A_q A_k M} = -\frac{b}{2b+3} \end{cases}$$

მაშასადამე, b -ს გადიდებით მცირდება

$$\cos \widehat{A_p A_k A_q} = -\cos \widehat{A_q A_k M} = -\frac{b}{2b+3}.$$

აქაც, წინა პარაგრაფის ანალოგიურად, b -ს გაზრდით მცირდება $\cos \widehat{A_p A_k A_q}$ და $\cos \widehat{A_q A_p A_k}$. ე.ი. იზრდება $\widehat{A_p A_k A_q}$ და $\widehat{A_q A_p A_k}$. ამიტომ $b, d \in N (d > b)$ -სათვის IX ტიპის სამკუთხედებისათვის შეიძლება გვეპოვდეს მხოლოდ X და XI შემთხვევა.

განვიხილოთ X შემთხვევა

$$\Delta A_p A_q A_{q_1} \text{ -იდან } c > (2d+5) - (2b+5) = 2(d-b).$$

$$[MN] \parallel [A_p A_k] \Rightarrow \Delta MNA_{q_1}$$

$$\text{თ } \Delta A_p EA_{q_1} \Rightarrow \frac{|MA_{q_1}|}{2d+5} = \frac{|NA_{q_1}|}{|EA_{q_1}|} \Rightarrow |MA_{q_1}| =$$

$$= (2d+5) \left(\frac{\sqrt{3(d+1)(d+3)} - \sqrt{3(b+1)(b+3)}}{\sqrt{3(d+1)(d+2)}} \right) =$$

$$= (2d+5) \left(1 - \sqrt{\frac{b+1}{d+1} \cdot \frac{b+3}{d+3}} \right) <$$

$$\begin{aligned} < (2d+5) \left(1 - \frac{b+1.5}{d+1.5} \right) = \frac{(2d+5)(d-b)}{d+1.5} = \\ &= 2(d-b) + \frac{d-b}{d+1.5} < 2(d-b) + 2; \\ &\begin{cases} 2(d-b) < c < 2(d-b) + 2; \\ b, d, c \in N. \end{cases} \Rightarrow c = 2(d-b) + 1. \end{aligned}$$

მართკუთხა $\Delta A_q NA_{q_1}$ -დან

$$|A_q A_{q_1}|^2 = |A_q N|^2 + |NA_{q_1}|^2$$

ე.ი.

$$\begin{aligned} (2(d-b)+1)^2 &= (d-b)^2 + \\ &+ 3 \left(\sqrt{(d+1)(d+3)} - \sqrt{(b+1)(b+3)} \right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(3db+4d+8b+8)+1 = \\ &= 6\sqrt{(b+1)(b+3)(d+1)(d+3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან მისი მარცხენა მხარე კენტი, ხოლო მარჯვენა კი, თუ ნატურალური იქნა – ლუწი.

XI – შემთხვევაში ცხადია, რომ

$$\begin{cases} |A_q O| \in (2b+3; 2b+5); \\ |A_l O| \in (2d+3; 2d+5). \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A_l A_q| \in (2b+2d+6; 2b+2d+10).$$

ამასთან თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$\Delta A_l A_q A_k \text{ -დან } |A_l A_q| < |A_l A_k| + |A_q A_k| =$$

$= 2d + 5 + 2b + 3 = 2b + 2d + 8$, და $|A_q A_l| \in N$, მაშინ მივიღებთ $|A_q A_l| = 3b + 3d + 9 = 3(b + d + 3)$.

მართკუთხა $A_l NME$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს $|A_l A_q|^2 = |A_l E|^2 + |A_q E|^2$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned} (2b + 2d + 7)^2 &= (b + d + 4)^2 + \\ &+ 3\left(\sqrt{(b+1)(b+3)} + \sqrt{(d+1)(d+3)}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6bd + 8(b+d) + 15 = \\ &= 6\sqrt{(b+1)(b+3)(d+1)(d+3)}. \quad (16_1). \end{aligned}$$

(16₁)-ს არ გააჩნია ნატურალურ რიცხვებში ამონახსნი, ვინაიდან მარცხენა მხარე კენტია, მარჯვენა კი ლუწი.

XII – შემთხვევაში მართკუთხა $A_l NME$ -დან პითაგორას თეორემით გვაქვს $|A_l A_q|^2 = |A_l E|^2 + |A_q E|^2$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned} c^2 &= (b + d + 4)^2 + \\ &+ 3\left(\sqrt{(b+1)(b+3)} + \sqrt{(d+1)(d+3)}\right)^2. \quad (17) \end{aligned}$$

(17)-ში $d \neq 0$ -სათვის (XII-შემთხვევა) გვექნება:

$$\begin{aligned} |A_p A_l| &= 3; |A_p A_k| = 4; |A_l A_k| = 5; \\ |A_p A_q| &= 2b + 5; |A_k A_q| = 2b + 3; \\ |A_k M| &= b; |A_q M| = \sqrt{3(b+1)(b+3)}; \\ |A_q E| &= \sqrt{3(b+1)(b+3)} - 3. \end{aligned}$$

და ამ შემთხვევაში (17) მიიღებს სახეს:

$$c^2 = (b + 4)^2 + \left(\sqrt{3(b+1)(b+3)} - 3\right)^2. \quad (18)$$

ბლაგვეუთხა $\Delta A_p A_l A_q$ -დან სამკუთხედის უტოლობით გვაქვს:

$$\begin{cases} c + 3 > 2b + 5; \\ c < 2b + 5. \end{cases} \Rightarrow c \in (2b + 2; 2b + 5), \text{ მაგრამ ვინაი-}$$

დან $c \in N$, ამიტომ

$$c \in \{2b + 3; 2b + 4\}. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (18)\text{-ის გარდაქმნით მივიღებთ } 6\sqrt{3b^2 + 12b + 9} &= \\ = 4b^2 + 20b + 34 - c^2. \quad (20) \end{aligned}$$

(18)-ის მარცხენა მხარე უნდა იყოს აუცილებლად ნატურალური რიცხვი და მაშინ ის ლუწი იქნება, ამიტომ, იმისათვის, რომ მარჯვენა მხარეც იყოს ლუწი, (19)-იდან გამოდგება მხოლოდ $c = 2b + 4$ (21) ე.ი (20)-ში (21)-ის ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{cases} 6\sqrt{3b^2 + 12b + 9} = 4b^2 + 20b + 34 - (2b + 4)^2; \\ b \in Z_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b^2 + 144b = 0; \\ b \in Z_0. \end{cases} \Leftrightarrow b = 0.$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიღეთ XII მართკუთხედი.

ახლა განვიხილოთ (17) $d = b \neq 0$ -სათვის.

ამ შემთხვევაში გვაქვს XII_{III}. ასეთი ბიდიოფანტური ოთხკუთხედები არსებობს მხოლოდ ისეთი $b \in N$, რომელთათვისაც $\sqrt{3(b+1)(b+3)}$ -ნატურალური რიცხვია. როგორც უკვე ვაჩვენეთ, ასეთი რიცხვები უამრავია.

რაც შეეხება (17)-ის ამოხსნებს, იმ შემთხვევაში, როცა $b, d \in N$ და $b \neq d$, ჩვენ მიერ Basic-ზე შემოწმებული იყო b და d 1 000 000-მდე, მაგრამ ასეთი ნატურალური c , b და d არ მოიძებნა. ჩვენი აზრით ასეთი b და d არ არსებობს. აღსანიშნავია, რომ ეს შემთხვევა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ამოცანა ბიდიოფანტურ ელიფსზე, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია A_l და A_q წერტილებში და რომლის დიდი

დიამეტრის სიგრძე ტოლია $2b+2d+8$. მაშასადამე არსებობა ასეთ $A_p A_l A_q A_k$ ბიდიოფანტური ოთხკუთხედისა ტოლფასია არსებობისა ელიფსზე ისეთი ბიდიოფანტური ქორდისა, რომელიც არ არის პარალელური კოორდინატთა ღერძის.

ანალოგიურად (17)-ისა XIII შემთხვევაში მართკუთხა $\triangle A_q E A_l$ -დან მივიღებთ

$$c^2 = (d-b)^2 + 3\left(\sqrt{(b+1)(b+3)} + \sqrt{(d+1)(d+3)}\right)^2. \quad (21)$$

$b=d$ -სათვის ვღებულობთ XIII-ს და (21) მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} c^2 = 4\left(\sqrt{3(b+1)(b+3)}\right)^2; \\ c, b \in N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3(b+1)(b+3)}; \\ c, b \in N. \end{cases} \quad (22)$$

როგორც უკვე ზემოთ იყო ნაჩვენები, (22)-ს გააჩნია არაერთი ამონახსნი, ხოლო რაც შეეხება (21)-ს $b \neq d$ -სათვის ჩვენ მიერ პროგრამა Basic-ზე შემოწმებული იყო b და d 1 000 000-მდე, მაგრამ ასეთი ნატურალური c , b და d არ მოიძებნა.

XIV-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში, ვინაიდან, მაშინ $\triangle A_k M A_q$ უნდა იყოს ბიდიოფანტური, მაგრამ არ არსებობს პითაგორასეული სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი კათეტი 2-ის ტოლია.

XV-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\square M A_p A_l A_k$ -სათვის დაირღვეოდა უტოლობა

$$|A_k A_p| + |A_l M| > |A_l A_p| + |A_k M|.$$

XVI შემთხვევა შეუძლებელია იმავე მიზეზით, რა მიზეზითაც XV.

XVII-ს ვარიანტში გვაქვს, რომ $|BD| = 2c+1$ ან $|BD| = 2c+5$. პირველი შემთხვევისათვის ირღვევა ჭეშმარიტი უტოლობა $|BD| + |AC| > |BC| + |AD|$, რაც შეუძლებელია, ხოლო მეორე შემთხვევაში ვღებულობთ, რომ $\triangle BAD$ მართკუთხაა და $c=0$ (ეს კი განხილული იყო XII-ში).

დავუბრუნდეთ XI-ს:

$$\begin{cases} \cos A_q \hat{A}_p A_k = \frac{b+4}{2b+5} = \frac{1}{2} + \frac{1.5}{2b+5}; \\ \cos A_l \hat{A}_p A_k = -\frac{d}{2d+3} = -\frac{1}{2} + \frac{1.5}{2d+3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_q \hat{A}_p A_k \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right); \\ A_l \hat{A}_p A_k \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \Rightarrow A_l \hat{A}_p A_q \in (0; \pi)$$

ანალოგიურად $A_l \hat{A}_k A_q \in (0; \pi)$.

მივიღეთ, რომ $k=4$ -სათვის ბიდიოფანტური n -კუთხედი შეიძლება იყოს მხოლოდ ან სამკუთხედი, ან ოთხკუთხედი ვინაიდან მას არ შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი ფორმები:

სურ. 44

სურ. 45

სურ.46

საბოლოოდ გვაქვს:

თეორემა (n;4)** თუ ბიდიოფანტური n -კუთხედისათვის $k = 4$, მაშინ $n \in \{3; 4\}$.

ჩვენ მიერ გამოკვლეულია **ამოცანა** (n;k)**, ასევე $k = 5$, $k = 6$, $k = 7$ -სათვის. ზოგიერთი შემთხვევა გადასამოწმებელი გვაქვს. მკითხველი მას იხილავს შემდეგ ნაშრომში.

სურ. 47

სურ. 48

კითხვაზე, ყოველი $k \in N$ ($k \geq 3$)-სათვის არსებობს თუ არა ბიდიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის რომელიმე გვერდის სიგრძე k -ს ტოლია, პასუხი ასევე დადებითია (იხ. სურ. 48).

$$m \in N \setminus \{1\}$$

დასკვნა

ფუნდამენტური კვლევის შედეგად სრულად არის პასუხი გაცემული ზემოთ დასმულ კითხვაზე:

$k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ და $k = 4$ -სათვის.

კითხვაზე, ყოველი $k \in N$ ($k \geq 3$)-სათვის არსებობს თუ არა ბიდიოფანტური სამკუთხედი, რომლის რომელიმე გვერდის სიგრძე ტოლია k -სი, პასუხი დადებითია (იხ. სურ. 47).

ნაჩვენებია, რომ $k = 1$ და $k = 2$ -სათვის ასეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი არ არსებობს, ხოლო $k = 3$ და $k = 4$ -სათვის აუცილებლად $n \in \{3; 4\}$. ასევე ნაჩვენებია $k > 2$ -სათვის ყოველთვის არსებობს ბიდიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის რომელიმე გვერდის სიგრძე k -ტოლია.

ლიტერატურა

1. Hadamard J. Elementary geometry. Moscow. 1937. (in Russian).
2. Steinhaus H. Problems and reflections. Moscow. 1974. (in Russian).
3. Sierpinski W. Pythagorean triangles. Dover Publications. 2011. (in Russian).
4. Sierpinski W. Elementary theory of numbers. Warsaw. 1959. (in Polish).
5. Vasilyev N.B. et al. Moscow mathematical olympiads. M.: "Nauka". 1986. (in Russian).
6. Dickson L.E. Introduction to the theory of numbers. Tbilisi. 1941. (in Russian).
7. Ozhigova E.P. What is number theory. Moscow. 1970. (in Russian).
8. Mikhelovich Sh.Kh. Theory of numbers. Moscow. 1962. (in Russian).
9. Shklarsky D.O. et al. Selected problems and theorems of elementary mathematics. Moscow. 1954. (in Russian).
10. Agdgomelashvili Z. Diophantine geometric figures. Problems and solutions from the mathematical tournament of gifted children "Pythagorean Cup 2001-2004". Publishing house "Tsis-Nami". Tbilisi. 2004. (in Georgian).
11. Agdgomelashvili Z. Collection of mathematical problems with solutions. Tb.: "Ganatileba". 1991. (in Georgian).
12. Agdgomelashvili Z. Mathematics (individual and group work). Publishing house "Tsis-Nami". Tbilisi. 2001. (in Georgian).

UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

About one Fundamental Task on Bidiophantine Geometric Figures

Zurab Agdgomelashvili Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str., 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Reviewers:

Al. Kirtadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

M. Mania, Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Chief Scientific Officer, Andrea Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University
E-mail: mania@rmi.ge

Abstract. The goal of the work is to study one of the fundamental tasks of the study of Bidiophantine n -gons (the author of the paper considers an integral n -gon is Bidiophantine if the coordinates of its each angle are integral numbers).

Task $^{**}(n; k)$: is there a Bidiophantine n -gon ($n \geq 3$) with any side or diagonal equal to k for each fixed natural number k ? In case it exists then let us find each such n .

Key words: Bidiophantine; Diophantine; fundamental research.

UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

Об одной фундаментальной задаче бидиофантовым геометрическим фигурам

Зураб

Агдгомелашвили

Департамент математики, Грузинский Технический Университет, Грузия, 0160,

Тбилиси, ул. М. Костава, 77

E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Рецензенты:

Ал. Киртадзе, профессор факультета информатики и систем управления ГТУ

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

М. Мания, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук Института математики имени А. Размадзе ТГУ

E-mail: mania@rmi.ge

Аннотация. В работе поставлена и изучена бидиофантовая n -угловая задача (автор статьи бидиофантным называет такой целочисленный многоугольник, у которого все вершины являются целыми числами), которая является одной из фундаментальных задач из всех изученных.

Задача $(n; k)$: Существует ли для каждого фиксированного натурального числа такой бидиофантовый n -угольник $(n \geq 3)$, длина одной из сторон или диагонали которого равно k , и если существует, то найти все такие n .

Ключевые слова: бидиофантовый; диофантовый; фундаментальное исследование.

განხილვის თარიღი 27.01.2020

შემოსვლის თარიღი 11.05.2020

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 29.09.2020