УДК. 515.123

DOI:10.35803/1694-5298.2021.3.434-438

Ч. А. Аблабекова¹

¹КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика

Ch. A. Ablabekova¹

¹KSUCTA n.a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

О ПЕРИСТЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ON PEROUS UNIFORM SPACES

Бул макалада канатчалуу мейкиндиктердин аныктамасы жана τ - канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктердин шартары киргизилген. Бир калыпта τ - канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктердин муноздомосу жана бул классында бир калыптуу мейкиндиктердин τ - канатчасы бар экени далилденет.

Өзөк сөздөр: калыптуу мейкиндиктер, τ - канатчалуу мейкиндиктер, бир калыптуу мейкиндиктердин τ - канатчасы.

В данной работе вводятся определение перистых пространств и условия τ - перистых равномерных пространств. Устанавливаются их характеристики и доказывается, что в этом классе равномерные пространства имеют равномерное τ - оперение.

Ключевые слова: равномерные пространства, τ - перистые пространства, равномерное τ - оперение.

In this article introduced the concept of cirrus spaces and the conditions of cirrus τ - pluming uniform spaces. There are their characteristics established and proved that in this class uniform spaces have uniform τ - plumage.

Key words: uniform spaces, τ - pluming uniform spaces, uniform τ - plumage.

Введение. Класс перистых пространств изучался А. В. Архангельским [1]. Им перистое пространство определено как пространство, которое содержит в себе класс всех метрических и всех локально бикомпактных пространств. В теории топологических пространств изучение класса перистых пространств имеет большую значимость.

А. А. Борубаевым [2], [3] определены равномерно τ - перистые и равномерно τ - полные по Чеху равномерные пространства, топология которых при $\tau = \aleph_0$ дает перистую паракомпактность и полную по Чеху паракомпактность.

Основная часть. Пусть X — подпространство пространства Y , A — множество, и для каждого $a \in A$ задано семейство γ_a открытых в Y множеств, покрывающее X : $X \subset \bigcup_{a \in A} \gamma_a \subset Y$.

Семейство $\{\gamma_a : a \in A\}$ называется оперением пространства X в пространстве Y , если для каждой точки $x \in X$, $\bigcap_{a \in A} \text{St}_{\gamma_a}(x) \subset X$.

Тихоновское пространство X называется перистым, или p -пространством, если оно обладает счетным оперением в каком-нибудь своем компактном хаусдорфовом расширении. Можно показать, что если пространство обладает счетным оперением в каком-нибудь компактном хаусдорфовом расширении, то оно обладает счетным оперением и в любом своем компактном хаусдорфовом расширении [1].

Определение 1 [2]. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется **равномерно τ -перистым**, если существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что выполнены следующие свойства:

- 1) вес $w(\mathcal{V}) \leq \tau$;
- 2) $\cap\{v(x) : v \in \mathcal{V}\} = B_x$ - бикомпакт в X для любой точки $x \in X$;
- 3) Система $\{v(B_x) : v \in \mathcal{V}\}$ - база окрестностей бикомпакта B_x в X для любой точки $x \in X$.

В случае, когда $\tau = \aleph_0$ равномерно $\aleph_0$ -перистые пространства называются **равномерно перистыми равномерными пространствами**.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ база равномерности $\mathcal{V}$, состоящая из открытых равномерных покрытий. Для любого $\beta \in \mathcal{B}$ положим $\beta^\# = f^\#(\beta) = \{f^\#(B) : B \in \beta\}$ и $\mathcal{B}^\# = \{\beta^\# : \beta \in \mathcal{B}\}$.

Определение 2. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется **сильно равномерно τ -перистым**, если существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что выполнены следующие условия:

- 1⁰. $w(\mathcal{V}) \leq \tau$
- 2⁰. $\cap\{\alpha((x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = B_x$ - бикомпакт для любого $x \in X$
- 3⁰. Семейство $\{\alpha(B_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ образует базу окрестностей бикомпакта B_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$
- 4⁰. $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_p, \mathcal{V}\}$, т.е. равномерность $\mathcal{U}$ есть верхняя грань равномерности $\mathcal{U}_p$ псевдоравномерности $\mathcal{V}$.

Напомним [4], [2], если $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$ - псевдоравномерности, тогда семейство $\{\omega \wedge \beta : \omega \in \mathcal{W}, \beta \in \mathcal{V}\}$ образует базу псевдомерности $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{W}, \mathcal{V}\}$.

Теорема 3. Для равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ следующие условия равносильны:

- /1/ $(X, \mathcal{U})$ сильно равномерно τ -перисто.
- /2/ $(X, \mathcal{U})$ равномерно совершенно отображается на некоторое равномерное пространство веса $\leq \tau$.
- /3/ $(X, \mathcal{U})$ равномерно гомеоморфно и замкнуто вкладывается в произведение $(sX \times Z, s\mathcal{U} \times \mathcal{W})$, где $(sX, s\mathcal{U})$ Самуэловское бикомпактное расширение $(X, \mathcal{U})$ и $(Z, \mathcal{W})$ некоторое равномерное пространство веса $\leq \tau$, т.е. $w(\mathcal{W}) \leq \tau$. [6].

Доказательство: /1/ $\Rightarrow$ /2/. Пусть $(X, \mathcal{U})$ - сильно равномерно τ -перисто и $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ псевдоравномерность, удовлетворяющая всем требованиям определения 2. Тогда для любых $x, y \in X, x \neq y$ либо $B_x \cap B_y = \emptyset$, либо $B_x \cap B_y \neq \emptyset$. Легко показать, что $B_x \cap B_y \neq \emptyset$ влечет $B_x \neq B_y$. Тогда имеем разбиение $Z = \{B_x : x \in X\}$ пространства X на попарно непересекающиеся бикомпакты B_x . Определим отображение $f : X \rightarrow Z$ по правилу $f^{-1}(z) = B_x$ для некоторого $x \in X$. Это отображение является сюръективным по определению. Пусть база $\mathcal{B}$ псевдоравномерности $\mathcal{V}$ и $|\mathcal{B}| \leq \tau$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathcal{B}$ положим $\alpha^\# = \{f^\#(A) : A \in \alpha\}$, где $f^\#(A) = Z \setminus f(X \setminus A)$. Пусть $z \in Z$ произвольная точка, тогда $f^{-1}(z) = B_x$ для некоторого $x \in X$. Пусть $\beta \in \mathcal{B}$ звездно вписано в α , тогда $x \in B_x = \beta(x) \subset A$ для некоторого $A \in \alpha$. Тогда $f(B_x) = y \in f^\#(A)$, т.е. семейство $\alpha^\#$ является покрытием множества Z .

Выполнение условий $(1^0) - (3^0)$ определения 2 показывает, что система $\mathcal{B}^\#$ база некоторой равномерности $\mathcal{W}$ на Z при этом т.к. $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^\#|$, то $w(\mathcal{W}) \leq \tau$. Условие (4^0) показывает, что отображение $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ равномерно непрерывно. В силу условия (4^0) определения 2, для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{V}$ и конечное $\gamma \in \eta_p$ такие, что $\beta \wedge \gamma$ вписано в α . Тогда в силу условия (5), $f^{-1}(\beta^\#) \wedge \gamma$ вписано в α . Это означает, что отображение $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ предкомпактно. По определению отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$, $f^{-1}(z) = B_x$ бикомпактно для любого $z \in Z$, следовательно f - бикомпактное отображение. Покажем теперь замкнутость отображения $f: (X, \tau_n) \rightarrow (Z, \tau_w)$. Пусть $\mathcal{V}$ открыто в X и $f^{-1}(z) = B_x \subset U$. Тогда $B_x \cap F = \emptyset$ и $F = X \setminus U$ замкнуто в X , следовательно, существует такое $\alpha \in \mathcal{U}$, что $\alpha(B_x) \cap \alpha(F) = \emptyset$ [5]. Тогда $\alpha(B_x) \subset X \setminus \alpha(F) \subset X \setminus F = U$ или $\alpha(f^{-1}(y)) \subset U$. По одному из критериев замкнутых отображений [6], последнее доказывает замкнутость отображения $f: (X, \tau_n) \rightarrow (Z, \tau_w)$. Итак отображение $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ является равномерно совершенным отображением $(X, \mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Z, \mathcal{W})$ веса $w(\mathcal{W}) \leq \tau$.

/2/ $\Rightarrow$ /3/. Пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно совершенно отображается на равномерное пространство $(Z, \mathcal{W})$ веса $w(\mathcal{W}) \leq \tau$ посредством отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ и $(sX, s\mathcal{U})$ - Самуэловское бикомпактное расширение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$. Тогда по одному из критериев равномерно совершенных отображений [5], равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $(Gr, s\mathcal{U} \times \mathcal{W} \wedge Gr)$, где $Gr = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq sX \times Z$ график отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$.

/3/ $\Rightarrow$ /2/. Пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ замкнуто равномерно гомеоморфно вкладывается в произведение $(sX \times Z, s\mathcal{U} \times \mathcal{W})$. Тогда $f = \pi_Y|_X: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ - равномерно совершенное отображение, как сужение равномерно совершенного отображения $\pi_Y: (sX \times Z, s\mathcal{U} \times \mathcal{W}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ на замкнутое подпространство $(X, \mathcal{U})$ [2], [4].

/2/ $\Rightarrow$ /1/. Пусть $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ - равномерно совершенное отображение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Z, \mathcal{W})$ веса $\leq \tau$, т.е. $w(\mathcal{W}) \leq \tau$. Тогда семейство $\mathcal{B} = \{f^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{W}\}$ база некоторой псевдоравномерности $\mathcal{V}$ в $\mathcal{U}$. Тогда имеем в силу предкомпактности отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$, для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существуют $\omega \in \mathcal{W}$ и конечное $\gamma \in \mathcal{U}_p$ такие, что $f^{-1}(\omega) \wedge \gamma$ вписано в α . Но $\beta = f^{-1}(\omega) \in \mathcal{V}$, следовательно, $\beta \wedge \gamma$, вписано в α . Это означает, что $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_p, \mathcal{V}\}$, т.е. равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ является сильно равномерно τ - перистым. Теорема доказана

Теорема 4. Тихоновское произведение счетного множества перистых пространств является перистым пространством.

Ограничимся доказательством для случая вполне регулярных сомножителей. **Доказательство.** Предположим, что $X_i, i=1, 2, \dots, \infty$, — перистые пространства, βX_i — их чеховские расширения $\varphi_i = \{\gamma_i^j, j=1, 2, \dots, \infty\}$, $\gamma_i^j = \{\bigcup_{i,\alpha}^j \alpha \in M_{i,j}\}$ — их оперения в βX_i

Покажем, что тогда пространство $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, обладает оперением в $bX = \prod_{i=1}^{\infty} \beta X_i$ где bX как следует из теоремы Тихонова, — бикомпактное расширение пространства X .

В самом деле, обозначим через $\lambda^{j,k}$ при произвольно фиксированных j и k совокупность всех множеств, представляющихся в виде произведения каких либо элементов, взятых по одному из каждого γ_i^j для которого $i \leq k$, на все βX_i , удовлетворяющие условию $i > k$.

Очевидно, каждое $\lambda^{j,k}$ является открытым в bX покрытием множества X . Совокупность $\mathcal{W}$ этих покрытий, отвечающих всевозможным различным парам целых чисел j и k , счетна.

Пусть точки $x \in X$ и $x' \in bX \setminus X$ выбраны произвольно. Подбираем j и k , чтобы выполнялось соотношение $\lambda^{j,k} x \notin x'$. Но так как $x' = \{x'_i\} \in \prod_{i=1}^{\infty} \beta X_i \setminus \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, то для некоторого значения $i = i'$ будет $x'_i \in \beta X_i \setminus X_i$. Так как $\varphi_i = \{\gamma_i^j, j = 1, 2, \dots, \infty\}$ — оперение X_i в βX_i , то для некоторого $j = j'$ будет выполняться соотношение $\gamma_{i'}^{j'} x'_i \notin x'_i$, где $\{x'_i\} = x' \in bX \setminus X$. Но тогда, как вытекает из определения систем $\lambda^{j,k}$, $\lambda^{j,i'} x \subseteq \prod_{i=i'}^{\infty} \gamma_i^{j'} x \times \prod_{i=i'}^{\infty} \beta X_i \subseteq bX \setminus x'$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ **равномерно τ - перисто** тогда и только тогда, когда X имеет равномерное τ - оперение в βX .

Доказательство. Пусть $(X, \mathcal{U})$ - равномерно τ - перистое равномерное пространство и $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ - псевдоравномерность, удовлетворяющая условиям определения 2. Для каждого $\alpha \in \mathcal{V}$ положим $Ex\alpha = \{ExA : A \in \alpha\}$, где $ExA = \beta X \setminus [X \setminus A]_{\beta X}$ наибольшее открытое множество в βX , высекающее из X множество A ([31]). Так как $|\mathcal{V}| \leq \tau$, то $|Ex\alpha : \alpha \in \mathcal{V}| \leq \tau$ и $Ex\alpha \wedge x = \alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{V}$. Следовательно, система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является равномерным τ - оперением X в βX .

Для доказательства обратного утверждения используем лемму 4.

Пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ имеет в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX равномерное τ - оперение $\mathcal{P}$. Тогда $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{U}$, $\cap \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{P}\} = B_x$ - бикомпактно в X для любой точки $x \in X$ и $|\mathcal{P}| \leq \tau$. Пусть $\mathcal{V}$ псевдоравномерность, порожденная семейством равномерных покрытий $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\}$. Тогда $w|\mathcal{V}| \leq \tau$, $K_x = \cap \{\beta(x) : \beta \in \mathcal{V}\} \subset B_x$ для любой точки $x \in X$ и K_x - замкнуто относительно топологии $\tau_{\mathcal{V}}$, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{V}$. Так как $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, то $\tau_{\mathcal{V}} \subset \tau_{\mathcal{U}}$. Следовательно, K_x - замкнуто в B_x и является бикомпактом. Теперь мы находимся в условиях леммы 4. Тогда семейство $\{\beta(K_x) : \beta \in \mathcal{V}\}$ - база фильтра открытых окрестностей бикомпакта K_x в X для любой точки $x \in X$. Это означает, что псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ удовлетворяет всем требованиям определения 2., т. е. равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ является равномерно τ - перистым. *Теорема доказана.*

Выводы и результаты исследования. В исследовании были введены понятия оперение пространства, равномерно τ - перистого пространства. Доказывается условия

равномерного пространства, когда тихоновское пространство является перистым пространством и когда равномерное пространство имеет равномерное τ - оперение.

Список литературы

1. Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства [Текст] / А.В.Архангельский // Мат. Сб.- 1965. – Т.97.- № 31.- С. 55-85.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А.Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990. – 171 с.
3. Борубаев А.А. Равномерная топология [Текст] / А.А.Борубаев. – Бишкек: Илим, 2013. – С. 338.
4. Wilhelm M. Criteria of openness relations, Fund, Math.Y.124, 1981,P.219-228.
5. Энгелькинг Р. Общая топология [Текст] / Р.Энгелькинг. – М.: Мир, 1986.
6. Аблабекова Ч. А. Об усилении равномерно перистых равномерных пространств [Текст] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2014. - № 1. – с. 113-117.
7. Акерова Дж.А. Исследование дифференциальных уравнений с управлением [Текст] / Дж. А. Акерова, Э.Кененбаев, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с.448-454.
8. Кененбаев Э. Применение функциональных соотношений к моделированию посредством дифференциальных уравнений [Текст] / Э. Кененбаев, Дж. А. Акерова, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с. 454-459.