ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК. 515.123.

DOI:10.35803/1694-5298.2021.3.429-433

Ч. А. Аблабекова¹

¹КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика

Ch. A. Ablabekova¹

¹KSUCTA n.a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО С РАВНОМЕРНЫМ АБСОЛЮТОМ

UNIFORM SPACE WITH UNIFORM ABSOLUTE

Берилген иште бир калыптуу мейкиндиктин абсолют түшүнүгү киргизилген, топологиялык абсолюттар жөнүндөгү кээ бир жыйынтыктар бир калыптуу учурга жалпыланган жана өткөрүлгөн»;

Өзөк сөздөр: бир калыптуу мейкиндиктер, абсолют, бир калыптуу абсолют.

В данной статье вводится понятие абсолюта равномерного пространства, обобщаются и переносятся некоторые результаты о топологических абсолютах на равномерный случай.

Ключевые слова: равномерные пространства, абсолют, равномерный абсолют.

In this article introduced the concept of the absolute in uniform space, and some results on topological absolutes are generalized and carried over to the uniform case.

Key words: uniform spaces, absolute, uniform absolute.

Введение. В теории топологических пространств изучение абсолютов имеет большую значимость. В книгах [1], [2] определены равномерные пространства, в частности, описание равномерности $\mathcal{U}$ абсолюта $\dot{X}$ тихоновского пространства X равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$.

Назовем равномерное пространство $\mu\dot{X}$ абсолютом равномерного пространства μX , если существует неприводимое u -совершенное отображение $h: \mu\dot{X} \rightarrow \mu X$ и всякое неприводимое u -совершенное отображение $g: wZ \rightarrow \mu\dot{X}$ является (равномерным) изоморфизмом, Равномерность μ назовем абсолютом равномерности μ .

ТЕОРЕМА. У всякого равномерного пространства существует единственный с точностью до изоморфизма абсолют [1].

Основная часть. Тихоновское пространство X с равномерностью $\mathcal{U}$ на нем будет, для краткости, обозначаться как $(X, \mathcal{U})$. Итак, запись $(X, \mathcal{U})$ - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$ называется равномерным покрытием.

Среди всех равномерностей на тихоновском пространстве X , порождающих тихоновскую топологию пространства X существует сильнейшая равномерность, которая называется тонкой (fine) равномерностью и обозначается с индексом f , т.е. $\mathcal{U}_f$ - тонкая равномерность на X [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тихоновское пространство X называется

сильно коллективно нормальным, если тонкая равномерность $\mathcal{U}_f$ на X состоит из всех окрестностей диагонали $/2/$.

Пусть X - тихоновское пространство, α и β – покрытия X , т.е. α и β такие семейства подмножеств в X , что $\cup \alpha = \cup \beta = X$. Говорят, что покрытие α вписано в покрытие β , если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$ и часто пишут $\alpha \succ \beta$. Внутренним пересечением $\alpha \wedge \beta$ покрытий α и β называется покрытие $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$, т.е. $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$. Пусть $Y \subset X$ и α - покрытие. Множество $\alpha(Y) = \cup \{A \in \alpha : A \cap Y \neq \emptyset\}$ называется звездой множества Y относительно покрытия α . Если $Y = \{x\}$, то $\alpha(x)$ звезда точки $x \in X$ относительно покрытия α . Говорят, что покрытие α звездно вписано в покрытие β , если для любого $x \in X$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(x) \subset B$ и покрытие α сильно звездно вписано в покрытие β , если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(A) \subset B$. Покрытие α (сильно) звездно вписано в покрытие β обозначается для краткости как $(\alpha^* \succ \beta)$ $\alpha \triangleright \beta$.

Последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ покрытий X называется нормальной, если $\alpha_{n+1}^* \succ \alpha_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и покрытие α называется нормальным, если существует нормальная последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\alpha_1^* \succ \alpha$.

Если равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ задано в терминах равномерных покрытий, то полагая для любого $\alpha \in \mathcal{U}$, $V_\alpha = \cup \{A \times A : \alpha \in \mathcal{U}\}$ получим некоторую окрестность диагонали $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ система $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{U}\}$.

Если равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ задано в терминах окружений диагонали, то для $V \in \mathcal{U}$ и любого $x \in X$ определен срез $V[x] = \{y : (x, y) \in V\}$ окружения V по точке x и система $\alpha_V \{V(x) : x \in X\}$ покрытие X . Семейство $\{\alpha_V : V \in \mathcal{U}\}$ образует базу равномерности на X в терминах равномерных покрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство $\mathcal{U}$ покрытий тихоновского пространства X называется равномерностью на X , если выполняются условия:

- I. Если $\alpha \in \mathcal{U}$ и α вписано в некоторое покрытие γ , то $\gamma \in \mathcal{U}$.
- II. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ существует такое $\gamma \in \mathcal{U}$, что γ вписано в $\alpha \wedge \beta$.
- III. Для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{U}$, сильно звездно вписанное в α .
- IV. Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathcal{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y .

Тихоновское пространство X с равномерностью $\mathcal{U}$ на нем будет, для краткости, обозначаться как $(X, \mathcal{U})$. Итак, запись $(X, \mathcal{U})$ - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$ называется равномерным покрытием.

Если семейство покрытий $\mathcal{U}$ на множестве X удовлетворяет аксиомам I – III определения 2., то $\mathcal{U}$ называется псевдоравномерностью, а $(X, \mathcal{U})$ - псевдоравномерным пространством.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ называется базой равномерности (псевдоравномерности) $\mathcal{U}$, если для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{B}$ такое, что $\beta \succ \alpha$. Наименьшее из кардинальных чисел $|\mathcal{B}|$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ база равномерности (псевдоравномерности) $\mathcal{U}$ называется весом равномерности (псевдоравномерности) $\mathcal{U}$ и обозначается $w(\mathcal{U})$, $w(\mathcal{U}) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ база } \mathcal{U}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство $\mathcal{B}$ покрытий образует базу некоторой равномерности $\mathcal{U}$ на X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (B1) Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ существует такое $\gamma \in \mathcal{B}$ такое, что $\gamma \succ \alpha \wedge \beta$.

(B2) Для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ существует $\beta \in \mathcal{B}$ такое, что $\beta^* \succ \alpha$.

(B3) $\cap \{\beta(x) : \beta \in \mathcal{B}\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой равномерности $\mathcal{U}$ на X семейство $\tau_u = \{O \subset X : \text{для каждого } x \in O \text{ существует такое } \alpha \in \mathcal{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset O\}$ есть тихоновская топология пространства X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Внутренность $\langle A \rangle$ множества $A \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ определяется как: $\langle A \rangle = \{x \in X : \text{существует такое } \alpha \in \mathcal{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset A\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для каждой точки $x \in X$ и каждого равномерного покрытия $\alpha \in \mathcal{U}$ множество $\langle \alpha(x) \rangle$ - открытая окрестность точки x относительно топологии τ_u .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Замыкание $\bar{A}$ или $[A]_X$ множества $A \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$ на X определяется как $\bar{A} = [A]_X = \{x \in X : \alpha(x) \cap A \neq \emptyset \text{ для любого } \alpha \in \mathcal{U}\}$ или $\bar{A} = [A]_X = \cap \{\alpha(A) : \alpha \in \mathcal{U}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Фильтр $\mathcal{F}$ называется фильтром Коши в равномерном пространстве $(X, \mathcal{U})$, если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathcal{U}$.

Точками абсолюта $\dot{X}$ тихоновского пространства X согласно С. Илиадису /5/, является ультрафильтры из открытых в X множеств, сходящихся к точкам пространства X . Таким образом, $p \in \dot{X}$ тогда и только тогда, когда существует такая точка $x \in X$, что $\mathcal{B}(x) \subset p$, где $\mathcal{B}(x)$ - фильтр открытых окрестностей точки $x \in X$.

Для любого открытого $U \subset X$ объявляются открытыми на $\dot{X}$ множества $\hat{U} = \{p \in \dot{X} : U \in p\}$, которые образуют базу топологии $\dot{X}$, относительно которой $\dot{X}$ является экстремально несвязным пространством.

Каждой точке $x \in X$ соответствует ультрафильтр $p \in \dot{X}$, который содержит фильтр открытых окрестностей $\mathcal{B}(x)$ точки x и определена естественная проекция $\pi_X : \dot{X} \rightarrow X$ таким образом, что $\pi_X^{-1}(x) = \{p \in \dot{X} : \mathcal{B}(x) \subset p\}$.

Естественная проекция $\pi_X : \dot{X} \rightarrow X$ является совершенным неприводимым отображением /5/.

Равномерность $\mathcal{U}$ обладает базой $\mathcal{B}$, состоящей из открытых равномерных покрытий /1/, /4/. Для каждого $\alpha \in \mathcal{B}$ положим $\hat{\alpha} = \{\hat{A} : A \in \alpha\}$. Тогда семейство $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\alpha} : \alpha \in \mathcal{B}\}$ образует базу некоторой псевдоравномерности $\hat{\mathcal{U}}$ на $\dot{X}$. Пусть $\hat{\mathcal{U}}_\rho$ - Стоун – Чеховская равномерность на $\dot{X}$. Положим $\hat{\mathcal{U}} = \sup \{\hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{U}}_\rho\}$. Тогда $\hat{\mathcal{U}}$ - равномерность абсолюта $\dot{X}$, причем естественная проекция $\pi_X : (\dot{X}, \hat{\mathcal{U}}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ является равномерно совершенным отображением.

Отметим некоторые свойства псевдоравномерности $\hat{\mathcal{U}}$ на $\dot{X}$. Положим $\pi_X^{-1}(x) = s(x)$ для любой точки $x \in X$. Отметим, что $s(x)$ - бикompактно в $\dot{X}$ для любой точки $x \in X$.

ЛЕММА 1. Для любого $p \in s(x)$ имеет место равенство

$$\cap \{\hat{\alpha}(p) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\} = s(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Имеет место равенство $\cap \{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\} = s(x)$.

ЛЕММА 2. Система $\{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\}$ образует базу открытых окрестностей бикомпакта $s(x)$ в X .

ТЕОРЕМА 1. Пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ имеет равномерный вес $w(\mathcal{U}) \leq \tau$. Тогда $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ является равномерно τ -перистым пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно непрерывное замкнутое отображение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$. Тогда для любого равномерного покрытия $\alpha \in \mathcal{U}$ и произвольного бикомпакта $K \subseteq Y$ существует открытое равномерное покрытие $\beta_K \in \mathcal{V}$ такое, что $\alpha(f^{-1}(K)) \supseteq f^{-1}(\beta_K(K))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно непрерывное совершенное отображение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ в равномерно τ -перистое равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$. Тогда равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ также равномерно τ -перисто.

ТЕОРЕМА 3. Если равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ является равномерно τ -перистым пространством, тогда его абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ также является равномерно τ -перистым пространством.

Следующие определения являются переносом на псевдоравномерные пространства понятия индекса полноты равномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $(X, \mathcal{U})$ псевдоравномерное пространство, $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ - произвольная система псевдоравномерных покрытий. Фильтр $\mathcal{F}$ в множестве X называется $\mathcal{K}$ -фильтром Коши в $(X, \mathcal{U})$, если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathcal{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $(X, \mathcal{U})$ псевдоравномерное пространство и $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$. Псевдоравномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется $\mathcal{K}$ -полным, а система $\mathcal{K}$ называется полной, если всякий $\mathcal{K}$ -фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\cap\{[F] : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Индексом полноты $ic(\mathcal{U})$ псевдоравномерности $\mathcal{U}$ псевдоравномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ называется наименьшее кардинальное число τ такое, что существует $\mathcal{K}$ -полная система $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ мощности τ , т.е. $|\mathcal{K}| = \tau$. Другими словами, $ic(\mathcal{U}) = \min\{\tau : \mathcal{K} \subset \mathcal{U} \text{ и } \mathcal{K} \text{-полно, } |\mathcal{K}| \leq \tau\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(X, \mathcal{U})$ равномерное пространство и $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{W}\}$, где $\mathcal{V}$ - некоторая псевдоравномерность в $\mathcal{U}$, а $\mathcal{W}$ - некоторая предкомпактная равномерность в $\mathcal{U}$. Тогда $ic(\mathcal{U}) \leq \tau$ тогда и только тогда, когда $ic(\mathcal{V}) \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ является полным тогда и только тогда, когда $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ $\hat{\mathcal{U}}$ -полно.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $(X, \mathcal{U})$ полное равномерное пространство и $w(\mathcal{U}) \leq \tau$. Тогда для абсолюта $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ выполняется $ic(w(\mathcal{U})) \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ и его абсолюта $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ выполнено равенство $ic(\mathcal{U}) = ic(\dot{\mathcal{U}})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда равномерно полным по Чеху является его абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$.

Выводы и результаты исследования. В исследовании были введены понятия абсолюта равномерного пространства. Доказываются характеристики и свойства абсолютов равномерного пространства. Установлена сильная равномерная полнота по Чеху равномерных абсолютов, в случае таковых самих равномерных пространств.

Список литературы

1. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А. Борубаев. - Фрунзе, Илим, 1990.- 171 с.
2. Келли, Дж. Л. Общая топология. [Текст] / Дж. Л. Келли. – 2.-е изд.- М.: Наука, 1980.- 431 с.
3. Аблабекова, Ч. А. О перистности равномерных абсолютов. [Текст] / А. А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, выпуск 1 , Бишкек, 2014. С. 30-33
4. Боргес. On stratifiable spaces [Текст] / C.J.R. Borges // Pacific J. Math., 1966. – Vol. 17. – P. 1-16.
5. Илиадис, С.Д. Абсолюты хаусдорфовых пространств [Текст] / С.Д.Илиадис // ДАН СССР, 1963. - 149. - С. 22-25.
6. Акерова Дж.А. Исследование дифференциальных уравнений с управлением [Текст] / Дж. А. Акерова, Э.Кененбаев, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с.448-454.
7. Кененбаев Э. Применение функциональных соотношений к моделированию посредством дифференциальных уравнений [Текст] / Э. Кенебаев, Дж. А. Акерова, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с. 454-459.