УДК 004.94

К.Н. Лаптев

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ В СИСТЕМЕ MAPLE ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ КУРСОВОГО АВТОПИЛОТА МОРСКОГО СУДНА

Лаптев Кирилл Николаевич, окончил факультет математики, информационных и авиационных технологий Ульяновского государственного университета, аспирант кафедры информационных технологий УлГУ. Инженер-программист 2 категории ФНПЦ АО «НПО «Марс». Область научных интересов: математическое моделирование, фильтрация Калмана, научное программирование. [e-mail: dinx0@yandex.ru].

Аннотация

В данной работе создан скрипт на языке Maple, позволяющий проверить свойства полной управляемости и наблюдаемости математической модели курсового автопилота морского судна, а также вычислить матрицы-параметры дискретной модели для ее последующего использования при построении адаптивного дискретного фильтра Калмана с целью идентификации параметров неопределенности модели.

Ключевые слова: курсовой автопилот морского судна, система Maple, дискретная модель.

doi: 10.35752/1991-2927-2021-2-64-86-94

AUTOMATION OF THE MAPLE SYSTEM CALCULATIONS FOR BUILDING THE DISCRETE MODELS OF THE MARINE-VESSEL COURSE AUTOPILOT

Kirill Nikolaevich Laptev, graduated from the Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technologies of Ulyanovsk State University; Postgraduate Student at the Department of Information Technologies of UISU; Software Engineer at FRPC JSC 'RPA 'Mars'; his research interests are in the field of mathematical modeling, Kalman filtering, scientific programming. e-mail: dinx0@yandex.ru.

Abstract

The article deals with a script created in the Maple language that allows to check the properties of complete controllability and observability of a mathematical model for a ship's course autopilot as well as to compute the matrix parameters of a discrete model for its subsequent use when building an adaptive discrete Kalman filter in order to identify the uncertainty parameters of the model.

Keywords: course autopilot of a marine vessel, Maple system, discrete model.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является описание математической модели курсового автопилота морского судна, создание скрипта на языке Maple, позволяющего проверить свойства полной управляемости и наблюдаемости модели, а также вычислить матрицы-параметры дискретной модели курсового автопилота для ее последующего использования при построении адаптивного дискретного фильтра Калмана с целью идентификации параметров неопределенности модели.

На сегодняшний день на практике применяется принципиально иной подход для реализации курсового автопилота, основанный на численных вычислениях па-

раметров. В данной статье предлагается автоматизация вычисления матриц-параметров дискретной модели.

Актуальность темы и результатов обусловлена тем, что на практике расчеты при построении дискретной модели в пространстве состояний по исходной непрерывной модели являются сложными. Ручные расчеты, как правило, подвержены ошибкам. Автоматизация расчетов с помощью специализированной системы компьютерной математики Maple позволяет обеспечить надежность и точность результатов символьных вычислений.

Морским судном называют плавучее сооружение, предназначенное для транспортных, военных и других

целей. Судно может быть как военным, так и гражданским. Каждое из них с передвижением по заданному курсу при волнении моря испытывает колебания корпуса вокруг центра масс. Обычно для судна выделяют следующие колебательные перемещения:

- рыскание – это колебательное перемещение, соответствующее вращению корабля относительно вертикальной оси;
- килевая качка – это колебательное перемещение, соответствующее вращению корабля относительно поперечно-горизонтальной оси;
- крен – это колебательное перемещение, соответствующее вращению корабля относительно продольной оси.

В данной работе рассматривается математическая модель курсового автопилота морского судна. В этом случае следует рассматривать только рыскание.

Контроль управления морского судна с обратной связью возможно проводить с использованием только прибора, указывающего направление на земной поверхности. Таким прибором является компас или же гироскоп, так как угол рыскания может быть довольно хорошо оценен.

Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель для системы проектирования курсового автопилота морского судна. В данной модели волновое движение первого порядка рассматривается как входное возмущение.

Основными компонентами датчика для морского судна с управляемым курсом являются магнитные и/или гироскопические компасы, измеряющие Ψ (отклик, обусловленный управляющим действием и низкочастотным возмущением) и угловую скорость r . Измеренный угол рыскания y можно разложить на составляющие $y = \Psi + \Psi_w + v$, где Ψ_w – волновое движение первого порядка, а v – гауссовский белый шум, произведенный компасом.

Чтобы оценить Ψ и r по y и одновременно получить волновую фильтрацию, можно использовать модель волновой фильтрации для прогнозирования волновых движений Ψ_w . Основным инструментом для этого является линейный инвариантный по времени фильтр Калмана, основанный на уравнениях математической модели

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_w &= \Psi_w, \\ \dot{\Psi}_w &= -\omega_0^2 \xi_w - 2\lambda\omega_0 \Psi_w + w_1,\end{aligned}$$

где λ и ω_0 – относительный коэффициент демпфирования и пиковая частота фильтра, используемого для представления волнового движения рыскания. Динамика рыскания морского судна задается моделью Номото [1]:

$$\dot{\Psi} = r,$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{1}{T}r + \frac{1}{m}(\tau_{wind} + \tau_N) + b + w_2, \\ \dot{b} &= w_3,\end{aligned}$$

где b – отклонение, а w_1, w_2, w_3 – процессы гауссовского белого шума. Постоянная $m = I_z - N_{\dot{r}}$ вводится для удобства таким образом, чтобы угол поворота руля δ генерировал момент рыскания τ_{wind} :

$$\tau_N = m \frac{K}{T} \delta = N_{\delta} \delta,$$

в то время как τ_{wind} представляет собой необязательную переменную передачи ветра. Стоит обратить внимание, что ни скорость рыскания r , ни волновые состояния ξ_w и Ψ_w не измеряются. Полученная модель в пространстве состояний будет иметь следующий вид:

$$\dot{x} = A_x + b_u + E_w, \quad (1)$$

$$y = h^T x + v, \quad (2)$$

где $x = [\xi_w, \Psi_w, \Psi, r, b]^T$, $u = \tau_{wind} + \tau_N$,

$w = [w_1, w_2, w_3]^T$ и

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\lambda\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/T & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h^T = [0, 1, 1, 0, 0]. \quad (4)$$

При построении системы курсового автопилота с использованием математической модели (1)–(2) с параметрами (3)–(4), фильтр Калмана может быть как дискретным, так и непрерывным во времени. Для реализации дискретного фильтра Калмана необходимо определить параметры соответствующей дискретной модели

$$x_k = \Phi x_{k-1} + B_d u_{k-1} + G_d w_k, \quad (5)$$

$$y_k = h^T x_k + v_k; k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

т.е. переходную матрицу состояний Φ , матрицу управления B_d , матрицу усиления шума G_d и ковариационную матрицу дискретного белого шума Q_d в уравнении состояния.

Для обеспечения корректности и надежности результатов вычислений воспользуемся системой компьютерной математики Maple [2,3].

АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

Maple — программный пакет, ориентированный на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Maple — типичная интегрированная система, объединяющая в себе следующие компоненты: мощный язык программирования (он же язык для интерактивного общения с системой); редактор для подготовки и правки документов и программ; современный многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме; мощную справочную систему со многими тысячами примеров; ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений; численный и символьный процессоры; систему диагностики; библиотеки встроенных и дополнительных функций; пакеты функций сторонних производителей и поддержку некоторых других языков программирования и программ.

Рассмотрим исходную математическую модель (1)–(2) с параметрами (3)–(4), заданную в непрерывном времени. Исследуем свойства полной управляемости и полной наблюдаемости модели.

Управляемость — свойство системы, описывающее возможность перевести её из одного состояния в другое. Управляемая модель — это такая модель, в которой имеется вход, который переводил бы вектор состояния системы из нулевого начального состояния в конечное за конечный интервал времени. Одним из критериев полной управляемости линейной динамической системы является равенство ранга матрицы управляемости [4]

$$W = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

размеру вектора состояния системы.

Свойство полной наблюдаемости модели системы позволяет по выходу системы судить о процессах внутри модели. Одним из способов проверки свойства полной наблюдаемости системы является построение матрицы наблюдаемости [4]

$$M = \begin{bmatrix} h^T & A^T h^T & (A^2)^T h^T & \dots & (A^{n-1})^T h^T \end{bmatrix}^T,$$

а затем вычисление ее ранга. Если ранг матрицы наблюдаемости равен размеру вектора состояния модели системы, модель считаем полностью наблюдаемой.

Для вычисления параметров дискретной модели (5)–(6) воспользуемся формулами из [4, С. 21–23].

В данной работе для автоматизации вычислений с целью обеспечения корректности и надежности результатов был написан скрипт на языке Maple, который позволяет вычислить матрицы-параметры дискретной модели (5)–(6) по исходной непрерывной модели (1)–(2) с параметрами (3)–(4). Также созданный скрипт позволяет исследовать свойства управляемости и наблюдаемости моделей.

Текст скрипта на языке Maple:

With(LinearAlgebra) : with(intrinsics) :

#Задаем параметры непрерывной модели

$$A := \text{Matrix}([0, 1, 0, 0, 0], [(omega)^2, -2 * lambda *$$

$$omega, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, -\frac{1}{T}, 1], [0, 0, 0, 0, 0])$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\lambda\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \text{Matrix}([0], [0], [0], [\frac{1}{m}], [0])$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E := \text{Matrix}([0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h := \text{Matrix}([0, 1, 1, 0, 0])$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислим матрицу управляемости непрерывной системы

$$W_CTI := \text{Matrix}([b, A.B, (A^2).B, (A^3).B, (A^4).B])$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{Tm} & \frac{1}{T^2m} & -\frac{1}{T^3m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{Tm} & \frac{1}{T^2m} & -\frac{1}{T^3m} & \frac{1}{T^4m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#Вычислим ранг матрицы управляемости

$Rank(W_CTI)$

2

#Вычислим матрицу наблюдаемости

$M_CTI := Matrix\left(\left[[h], [h.A], [h.(A^2)], [h.(A^3)], [h.(A^3)]\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \omega & -2\lambda\omega & 0 & 1 & 0 \\ -2\lambda\omega^3 & 4\lambda^2\omega^2 + \omega^2 & 0 & -\frac{1}{T} & 1 \\ (4\lambda^2\omega^2 + \omega^2)\omega^2 & -2\lambda\omega^3 - 2(4\lambda^2\omega^2 + \omega^2)\lambda\omega & 0 & \frac{1}{T^2} & -\frac{1}{T} \\ -2\lambda\omega^5 - 2(4\lambda^2\omega^2 + \omega^2)\lambda\omega^3 & 4\lambda^2\omega^4 + (4\lambda^2\omega^2 + \omega^2)^2 & 0 & -\frac{1}{T^3} & \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

#Вычислим ранг матрицы наблюдаемости

$Rank(M_CTI)$

5

$Q := Matrix\left(\left[[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\right]\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#Вычислим параметры дискретной модели. Сначала найдем переходную матрицу состояния.

$\Phi_s := simplify\left(\left(IdentityMatrix(5)*s - A\right)^{-1}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda\omega + s}{2\lambda\omega s - \omega^2 + s^2} & \frac{1}{2\lambda\omega s - \omega^2 + s^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega^2}{2\lambda\omega s - \omega^2 + s^2} & \frac{s}{2\lambda\omega s - \omega^2 + s^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{T}{s(Ts+1)} & \frac{T}{s^2(Ts+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T}{Ts+1} & \frac{T}{s(Ts+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$\Phi := simplify\left(map\left(x \rightarrow invlaplace(x, s, \Delta T), \Phi_s\right)\right)$ (7)

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -T \left(e^{\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) & T \left(e^{\frac{\Delta T}{T}} T - T + \Delta T \right) \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Delta T}{T}} & -T \left(e^{\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{(\lambda^2 + 1)\omega} \left(e^{-\Delta T \lambda \omega} \left(\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right) \right),$$

$$\phi_{12} = \frac{e^{-\Delta T \lambda \omega} \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)}{\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)}},$$

$$\phi_{21} = \frac{e^{-\Delta T \lambda \omega} \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)}}{\lambda^2 + 1},$$

$$\phi_{22} = -\frac{1}{(\lambda^2 + 1)\omega} \left(e^{-\Delta T \lambda \omega} \left(-\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda - \cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right) \right).$$

#Вычислим матрицу управления дискретной системы

$$Bd := \text{simplify} \left(\text{map} \left(x \rightarrow \text{int} (x, \tau = 0.. \Delta T), \Phi, B \right) \right) \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \left(e^{\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T \\ \hline m \\ e^{\frac{\Delta T}{T}} \Delta T \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$$

#Вычислим матрицу ковариации дискретного шума w_d в объекте

$$Qd := \text{simplify} \left(\text{map} \left(x \rightarrow \text{int} (x, \tau = 0.. \Delta T), \Phi.E.Q.E^{\%T}.\Phi^{\%T} \right) \right) \quad (9)$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} & T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} T - T + \Delta T \right) \Delta T \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} & -T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T \\ 0 & 0 & T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} T - T + \Delta T \right) \Delta T & -T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T & \Delta T \end{bmatrix}$$

$$q_{11} = \frac{e^{-2\Delta T\lambda\omega} \Delta T \left(\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 - 1 \right)}{\omega^2 (\lambda^2 + 1)},$$

$$q_{12} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} (\lambda^2 + 1) \omega} \left(e^{-2\Delta T\lambda\omega} \Delta T \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \left(\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega - \right. \right. \\ \left. \left. - \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right), \right.$$

$$q_{21} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} (\lambda^2 + 1) \omega} \left(e^{-2\Delta T\lambda\omega} \Delta T \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \left(\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega - \right. \right. \\ \left. \left. - \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right), \right.$$

$$q_{22} = \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2 \omega^2} \left(e^{-2\Delta T\lambda\omega} \Delta T \left(-\cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega - \right. \right. \\ \left. \left. - \sinh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \cosh \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right)^2 \right),$$

$$q_{33} = -T^2 \Delta T \left(2T^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 2Te^{-\frac{\Delta T}{T}} \Delta T - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T^2 - T^2 + 2\Delta T T - \Delta T^2 + 2e^{-\frac{\Delta T}{T}} - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} - 1 \right),$$

$$q_{34} = \Delta T T \left(2T^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}} - Te^{-\frac{\Delta T}{T}} \Delta T - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T^2 - T^2 + \Delta T T + e^{-\frac{\Delta T}{T}} - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} \right),$$

$$q_{43} = \Delta T T \left(2T^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}} - Te^{-\frac{\Delta T}{T}} \Delta T - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T^2 - T^2 + \Delta T T + e^{-\frac{\Delta T}{T}} - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} \right),$$

$$q_{44} = -\Delta T \left(2T^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}} - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T^2 - T^2 - e^{-\frac{2\Delta T}{T}} \right), -T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T].$$

#Вычислим матрицу управляемости дискретной системы

$$W_DTI := simplify\left(Matrix\left(\left[Bd, \Phi.Bd, (\Phi^2).Bd, (\Phi^3).Bd, (\Phi^4).Bd\right]\right)\right)$$

$$W_{DTI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} \\ e^{-\frac{\Delta T}{T} \Delta T} & e^{-\frac{2\Delta T}{T} \Delta T} & e^{-\frac{3\Delta T}{T} \Delta T} & e^{-\frac{4\Delta T}{T} \Delta T} & e^{-\frac{5\Delta T}{T} \Delta T} \\ m & m & m & m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_{31} = -\frac{T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T}{m},$$

$$w_{34} = -\frac{\Delta T T \left(e^{-\frac{4\Delta T}{T}} - 1 \right)}{m},$$

$$w_{32} = -\frac{T \Delta T \left(e^{-\frac{2\Delta T}{T}} - 1 \right)}{m},$$

$$w_{35} = -\frac{\Delta T T \left(e^{-\frac{5\Delta T}{T}} - 1 \right)}{m}$$

$$w_{33} = -\frac{T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) \Delta T \left(e^{-\frac{2\Delta T}{T}} + e^{-\frac{\Delta T}{T}} + 1 \right)}{m},$$

#Вычислим ранг матрицы управляемости

$$simplify(Rank(W_DTI))$$

2

#Вычислим матрицу наблюдаемости дискретной модели.

$$M_DTI := simplify\left(Matrix\left(\left[H], [H.\Phi], [H.(\Phi)^2], [H.(\Phi)^3], [H.(\Phi)^4]\right)\right)\right)$$

$$M_{DTI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 1 & -T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} - 1 \right) & T \left(e^{-\frac{\Delta T}{T}} T - T + \Delta T \right) \\ m_{31} & m_{32} & 1 & -e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T + T & T \left(e^{-\frac{2\Delta T}{T}} T - T + 2\Delta T \right) \\ m_{41} & m_{42} & 1 & -e^{-\frac{3\Delta T}{T}} T + T & T \left(e^{-\frac{3\Delta T}{T}} T - T + 3\Delta T \right) \\ m_{51} & m_{52} & 1 & -e^{-\frac{4\Delta T}{T}} T + T & T \left(e^{-\frac{4\Delta T}{T}} T - T + 4\Delta T \right) \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{e^{-\Delta T \lambda \omega} \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)}}{\lambda^2 + 1},$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= -\frac{1}{(\lambda^2 + 1)\omega} \left(e^{-\Delta T \lambda \omega} \left(-\cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda - \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \omega \right) \right), \\
m_{31} &= \frac{2e^{-\Delta T \lambda \omega} \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)}{\lambda^2 + 1}, \\
m_{32} &= \frac{1}{\omega(\lambda^2 + 1)} \left(\left(2 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \right)^2 \lambda^2 \omega - \right. \\
&\quad \left. - 2 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 \omega - \lambda^2 \omega - \omega \right) e^{-2\Delta T \lambda \omega}, \\
m_{41} &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left(\left(4 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 - 1 \right) \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) e^{-3\Delta T \lambda \omega} \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \right), \\
m_{42} &= \frac{1}{\omega(\lambda^2 + 1)} \left(\left(4 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \right)^3 \lambda^2 \omega - \right. \\
&\quad \left. - 4 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \right. \\
&\quad \left. + 4 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^3 \omega - 3 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega + \right. \\
&\quad \left. + \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda - 3 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 \omega e^{-3\Delta T \lambda \omega} \right), \\
m_{51} &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left(4 \left(2 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 - 1 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} e^{-4\Delta T \lambda \omega} \right), \\
m_{52} &= \frac{1}{\omega(\lambda^2 + 1)} \left(e^{-4\Delta T \lambda \omega} \left(8 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^4 \lambda^2 \omega - \right. \right. \\
&\quad \left. - 8 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^3 \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda + \right. \\
&\quad \left. + 8 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^4 \omega - 8 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \lambda^2 \omega + \right.
\end{aligned}$$

$$+ 4 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sin h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right) \sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \lambda - \\ - 8 \cos h \left(\sqrt{\omega^2 (\lambda^2 + 1)} \Delta T \right)^2 \omega + \lambda^2 \omega + \omega \Bigg),$$

#Вычислим ранг матрицы наблюдаемости
simplify(Rank(M - DTI))

5

В результате выполнения скрипта мы вычислили параметры дискретной модели (5)–(6) с помощью команд (7)–(9), а также проверили критерии полной управляемости и наблюдаемости исходной непрерывной модели (1)–(2) и построенной дискретной модели (5)–(6). Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что свойства полной управляемости и наблюдаемости обеих моделей совпадают. При этом они являются не полностью управляемыми, но полностью наблюдаемыми.

Свойство полной наблюдаемости дискретной модели (5)–(6) позволяет использовать ее в дальнейшем для построения адаптивного дискретного фильтра Калмана с целью идентификации параметров неопределенности модели T , m , ω_0 и λ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был создан скрипт на языке Maple, который позволяет проверить свойства полной управляемости и наблюдаемости модели, а также вычислить матрицы-параметры дискретной модели курсового автопилота для ее последующего использования при построении адаптивного дискретного фильтра Калмана с целью идентификации параметров неопределенности модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fossen T.I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control* First Edition, John Wiley & Sons Ltd., 2011.
2. Таранчук В.Б. Основные функции систем компьютерной алгебры. Минск : БГУ, 2013.
3. Дьяконов В.П. *Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах*. М. : ДМК-Пресс, 2011
4. Семушин И.В., Цыганова Ю.В. *Стохастические модели, оценки и управление: метод. пособие*. Ульяновск : УлГУ, 2007.

REFERENCES

1. Fossen T.I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control* First Edition. John Wiley & Sons Ltd., 2011.
2. Taranchuk V.B. *Osnovnye funktsii system kompiuternoi algebry* [Main Functions of Computer Algebra Systems]. Minsk, BSU Publ., 2013.
3. Diakonov V.P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in Mathematical Calculations]. Moscow, DMK-Press, 2011.
4. Semushin I.V. Tsyganova Yu. V. *Stokhasticheskie modeli, otsenki i upravlenie*. Metod. posobie [Stochastic Models, Estimations and Control. Methodological Workbook]. Ulyanovsk, UISU Publ., 2007.