MATHEMATICAL MODELING

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.377

А.К. Иванов, А.Л. Савкин, И.В. Чернышев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ОРГАНАХ УПРАВЛЕНИЯ

Иванов Александр Куприянович, доктор технических наук, окончил физический факультет Иркутского государственного университета, аспирантуру Московского высшего технического училища им. Н.Э. Баумана, докторантуру Ульяновского государственного технического университета. Главный научный сотрудник ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет монографии, учебное пособие, статьи в области математического моделирования иерархических АСУ реального времени. [e-mail: mars@mv.ru].

Савкин Александр Леонидович, кандидат военных наук, доцент, окончил Ульяновское высшее военное командное училище связи, Военную академию связи им. С.М. Буденного, адъюнктуру при ВАС. Начальник службы обеспечения научно-технической деятельности ФНПЦ АО «НПО «Марс». Имеет научные работы, учебные пособия, статьи в области разработки и моделирования систем управления и связи, автоматизированных информационных систем. [e-mail: mars@mv.ru].

Чернышев Илья Васильевич, кандидат военных наук, окончил Новосибирский электротехнический институт связи, адъюнктуру ВАС им. С.М. Буденного. Доцент кафедры «Организация аэропортной деятельности и информационных технологий» Ульяновского института гражданской авиации. Имеет учебные пособия, статьи в области разработки автоматизированных систем управления и информационных технологий, математического моделирования. [e-mail: chernyshev@ulstu.ru].

Аннотация

Обоснована актуальность совершенствования систем поддержки принятия решений, обеспечивающих автоматизацию интеллектуальной деятельности должностных лиц органов управления. Приведен краткий обзор научных направлений исследования психологических составляющих поведения, восприятия и мышления. Показана перспективность построения математических моделей принятия решений на основе аналогов из других областей науки и техники с соответствующим математическим аппаратом. Построена схема информационных решений органа управления, включающая несколько этапов преобразования исходных данных и градиентное распределение информационных ресурсов в одномерном пространстве структурных единиц. Разработан комплекс математических моделей формирования информационных решений для трех этапов преобразования и различных режимов поступления исходных данных. Первая модель описывает градиентное распространение исходных данных в виде уравнения с частными производными и этапы преобразования в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Вторая модель включает градиентное распространение в пространстве органа управления исходных данных и результатов преобразования и представляет собой систему уравнений с частными производными. В третьей и четвертой моделях дополнительно учтены конвективные члены в уравнениях с частными производными. Получены аналитические решения всех моделей, приведены примерные графики распространения информационных ресурсов.

Ключевые слова: принятие решений, математические модели, уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения.

doi: 10.35752/1991-2927-2021-1-63-56-73

THE MATHEMATICAL MODELS OF INFORMATION DECISIONS IN OPERATIONS CONTROLS

Aleksandr Kupriianovich Ivanov, Doctor of Sciences in Engineering; graduated from the Faculty of Physics at Irkutsk State University, completed his postgraduate studies at Bauman Moscow Technical School, doctoral studies at Ulyanovsk State Technical University; Chief Staff Scientist of FRPC JSC 'RPA 'Mars'; an author of monographs, tutorial, articles in the field of the mathematical modeling of hierarchical real-time computer-aided control systems. e-mail: mars@mv.ru.

Aleksandr Leonidovich Savkin, Candidate of Military Sciences, Associate Professor; graduated from the Ulyanovsk Higher Military Command School of Communications and the Marshal Budjonny Military Academy of Signal Corps; completed his postgraduate studies in the Military Academy of Communications; Head of Science and Engineering Support Department of FRPC JSC 'RPA 'Mars'; an author of scientific works, manuals, and articles in the field of the development and modeling of communication control systems, automated information systems. e-mail: mars@mv.ru.

Iliia Vasilevich Chernyshev, Candidate of Military Sciences; graduated from the Novosibirsk Electronic Technical Institute of Communications; completed his postgraduate studies at the Marshal Budjonny Military Academy of Signal Corps; Associate Professor of the Department in Organizing Airport Activity and Information Technologies of Ulyanovsk Civil Aviation Institute; an author of textbooks and articles in the field of computer-aided control systems design, information technologies, and mathematical modeling. e-mail: chernyshev@ulstu.ru.

Abstract

The article proves the relevance of developing decision-support systems that ensure an automation of intellectual activity of operation controls officers. It gives a brief review of scientific researches in terms of psychology of behavior, perception and thinking; and shows the viability of mathematical models for decision-making based on the analogue ones in other science and technology domains having a corresponding mathematical apparatus. The authors create the scheme of information decisions made by operation controls, which includes several stages of initial data conversion and gradient distribution of information resources in a one-dimensional space of structural units. The complex of mathematical models for information decision making for three stages of conversion and for various modes of initial data entry has been developed. The first model describes the gradient distribution of initial data in the form of a partial differential equation, while converting stages are given as an ordinary differential one. The second model includes the gradient distribution of initial data and subsequently converted data in the space of operating controls. It is represented as a partial differential system. The third and fourth models additionally incorporate convective terms of partial differential equations. The article gives the analytical solutions of all models and the estimated structures of information resources allocation.

Keywords: decision-making, mathematical models, partial differential equations, ordinary differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время повышение эффективности автоматизированных систем управления различного назначения связывают с созданием систем поддержки принятия решений (СППР), обеспечивающих автоматизацию интеллектуальной деятельности должностных лиц органов управления [1, 2].

Краткий обзор основных направлений понимания и моделирования интеллектуальной деятельности приведен в [3].

Первое и самое большое направление связано с кибернетикой – наукой об управлении в технике, природе и обществе. Содержательная часть кибернетики, предложенная Н. Винером, состоит в попытке обобщения понятия управления и в провозглашении единства (схожести) принципов и процессов управления в технике, живой природе и обществе. Утверждалось, что в живой природе реализуются те же принципы управления, что и в технике, а именно: управление по отклонению на ос-

нове отрицательных обратных связей и управление по возмущениям – схема стимул-реакция. В начале работ по кибернетике часто и в разных аспектах проводились неправомерные прямые параллели между мозгом и вычислительной машиной.

Бионика инициировалась кибернетикой, общая цель бионики формулировалась как перенос в технику «изобретений» природы. Одной из наиболее важных задач бионики считалось использование в вычислительной технике знаний из области нейрофизиологии мозга. Однако достаточно быстро выяснилось, что переносить из нейрофизиологии в вычислительную технику нечего, при этом не только потому, что физиология не располагает достаточной конструктивной и целостной информацией о работе мозга, но и потому, что эта информация не нужна вычислительной технике. Устройство и принципы работы современной вычислительной машины не имеют ничего общего с устройством и принципом работы мозга. Результатами исследований стали многочисленные

попытки применения к описанию мозга и мышления как формальных аналитических средств, так и средств программного и (или) технического моделирования.

Традиционно к искусственному интеллекту относятся следующие задачи: понимание машиной естественного языка, т. е. вопросно-ответные системы и доступ к базам данных на естественном языке; перевод с одного языка на другой; распознавание образов, анализ изображений 3-мерных сцен; логистические системы представления знаний и логический вывод; эвристическое программирование; принятие решений; экспертные системы и др. [4]. В общем случае большинство задач может представляться как поиск пути на графе путем перебора. Перебор сокращается, если возможны точные или эвристические оценки промежуточных ситуаций в отношении приближения к цели. Серьезных обобщений, полезных для общего понимания проблемы мышления, на этом направлении получено не было.

Моделирование нейронных сетей проводилось, но эти работы велись и ведутся независимо от алгоритмического искусственного интеллекта. Не ориентировались эти работы и на решение обычных «интеллектуальных» задач. Единственной практической задачей, успешно решаемой нейронными сетями, было и остается распознавание образов. Можно выделить три разных вида формальных нейронных сетей – логические сети, растровые распознаватели, признаковые распознаватели. Серьезных теоретических успехов, имеющих значение для понимания механизмов мышления у направления, называемого нейронаукой, нет.

Работам в области искусственного интеллекта в последнее время часто противопоставляется синергетика [5]. Развиваемый в этом новом направлении подход иногда называют теорией всего и говорят о возможности применения аппарата синергетики к описанию любых систем, в том числе живых и даже мозга. Синергетика использует аппарат нелинейной динамики для описания изменений в мультистабильных системах, теряющих устойчивость при внешних воздействиях и переходящих в результате происходящих изменений в новое стабильное состояние. Переход в новое состояние определяется градиентом действующих сил, а также сочетанием внешних и внутренних случайных факторов. Новое стабильное состояние может быть как равновесным, так и неравновесным. Две главные решаемые мозгом задачи – это построение иерархической активной модели среды и использование этой модели для целостного целенаправленного восприятия, а также для быстрого решения многопереборных многоэкстремальных задач поведения путем сведения этих задач к малопереборным одноэкстремальным. Все это в целом аппаратом нелинейной динамики не описывается. В связи с этим претензии синергетики на роль теории всего не выглядят обоснованными.

В отсутствии четкого понимания процессов мышления можно использовать для математического моделирования интеллектуальной деятельности аналоги из различных областей науки и техники, где широко используется математический аппарат [6–8]. В [9] динамика

преобразования информационных ресурсов в органах управления описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В [10] уравнения с частными производными используются для представления информационного пространства органов управления.

В данной статье рассматривается возможность построения моделей, учитывающих содержательное преобразование информационных ресурсов и их пространственное распределение. Аналогом для таких моделей стали системы типа реакции – диффузии. Впервые модель такого рода была использована А. Тьюрингом при математическом моделировании морфогенеза. В этой работе были получены результаты, определившие развитие большого научного направления [11].

1 Модель информационных решений с градиентным распространением исходных данных

Орган управления образован структурными единицами, выполняющими содержательные преобразования информационных ресурсов в несколько этапов и формирование выходных результатов. Считаем, что структурные единицы образуют одномерное пространство органа управления, в котором происходит градиентное распространение исходных данных и результаты преобразования (рис. 1).

Для случая, когда происходит градиентное распределение только исходных данных при постоянном поступлении информации на вход и трех этапов преобразования, математическая модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \beta U, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \beta U - K_1 V_1, \quad \frac{dV_2}{dt} = K_1 V_1 - K_2 V_2,$$

$$\frac{dV_3}{dt} = K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A, \quad U(x, 0) = 0;$$

$$V_1(0, t) = B_1, \quad V_2(0, t) = B_2, \quad V_3(0, t) = B_3;$$

$$V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = V_3(x, 0) = 0,$$

где U – объем исходных данных;

V_i – объем данных на i -м этапе.

Путем преобразования $U(x, t) = e^{-\beta t} W(x, t)$ первое уравнение приводится к однородному уравнению с изменением граничного условия [12]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\beta e^{-\beta t} W + e^{-\beta t} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^{-\beta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

$$-\beta e^{-\beta t} W + e^{-\beta t} \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 e^{-\beta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta e^{-\beta t} W;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

Орган управления							
	Исходные данные		Результаты первичной обработки		Результаты вторичной обработки		Выходные результаты
Γ_1	$U_1 = U(\Gamma_1)$	$\rightarrow$	$V_{11} = F_{11}(U_1)$	$\rightarrow$	$V_{12} = F_{12}(V_{11})$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$V_{1m} = F_{1m}(V_{1m-1})$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Γ_2	$U_2 = U(\Gamma_2)$	$\rightarrow$	$V_{21} = F_{21}(U_2)$	$\rightarrow$	$V_{22} = F_{22}(V_{21})$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$V_{2m} = F_{2m}(V_{2m-1})$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Γ_n	$U_n = U(\Gamma_n)$	$\rightarrow$	$V_{n1} = F_{n1}(U_n)$	$\rightarrow$	$V_{n2} = F_{n2}(V_{n1})$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$V_{nm} = F_{nm}(V_{nm-1})$

Рис. 1. Схема формирования информационного пространства органа управления,

где Γ_i – структурная единица органа управления; $\downarrow$ – градиентное распространение информации в пространстве органа управления; $\rightarrow$ – формирование новых данных в процессе преобразования информации; F_{ij} – функциональная зависимость результатов от поступившей информации; U_i – объем исходных данных в определенной структурной единице; V_{ij} – объем результатов конкретного этапа обработки в структурной единице

$$U(0, t) = e^{-\beta t} W(0, t) = A, \quad W(0, t) = e^{-\beta t} A;$$

$$U(x, 0) = e^{-\beta \cdot 0} W(x, 0) = 0, \quad W(x, 0) = 0.$$

Решение уравнения разбивается на три простых шага. На первом шаге выполняется синус-преобразование Фурье по переменной x , тогда получается обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t :

$$F_s \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] = \alpha^2 F_s \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right];$$

$$\begin{aligned} F_s \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \sin(\omega, x) dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty W(x, t) \sin(\omega, x) dx \right] = \\ &= \frac{d}{dt} F_s[W] = \frac{d}{dt} Q(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] &= \frac{2}{\pi} \omega W(0, t) - \omega^2 F_s[W] = \\ &= \frac{2}{\pi} \omega W(0, t) - \omega^2 Q(t) = \frac{2A\omega}{\pi} e^{\beta t} - \omega^2 Q(t); \end{aligned}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \omega^2 \alpha^2 Q(t) = \frac{2A\omega \alpha^2}{\pi} e^{\beta t}.$$

Начальное условие для функции $Q(t)$ получается применением преобразования к начальному условию $W(x, 0) = 0$:

$$F_s[W(x, 0)] = Q(0) = 0.$$

На втором шаге решается полученное обыкновенное дифференциальное уравнение. Для решения можно использовать метод вариации постоянных:

$$Q(t) = C(t) e^{-\omega^2 \alpha^2 t};$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} e^{-\omega^2 \alpha^2 t} - C(t) \omega^2 \alpha^2 e^{-\omega^2 \alpha^2 t} + \\ + C(t) \omega^2 \alpha^2 e^{-\omega^2 \alpha^2 t} = \frac{2A\omega \alpha^2}{\pi} e^{\beta t}; \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{dt} e^{-\omega^2 \alpha^2 t} = \frac{2A\omega \alpha^2}{\pi} e^{\beta t};$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{2A\omega \alpha^2}{\pi} e^{(\omega^2 \alpha^2 + \beta)t};$$

$$C(t) = \frac{2A\omega \alpha^2}{\pi(\omega^2 \alpha^2 + \beta)} e^{(\omega^2 \alpha^2 + \beta)t} + C_1;$$

$$Q(0) = \left(\frac{2A\omega \alpha^2}{\pi(\omega^2 \alpha^2 + \beta)} e^{(\omega^2 \alpha^2 + \beta) \cdot 0} + C_1 \right) e^{-\omega^2 \alpha^2 \cdot 0} = 0, \quad C_1 = -\frac{2A\omega \alpha^2}{\pi(\omega^2 \alpha^2 + \beta)};$$

$$Q(t) = \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} e^{(\omega^2\alpha^2 + \beta)t} - \frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} \right] e^{-\omega^2\alpha^2 t} = \frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}).$$

На третьем шаге применяется обратное преобразование к функции $Q(t)$:

$$\begin{aligned} W(x, t) = F_s^{-1}[Q] &= F_s^{-1} \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

Решение уравнения:

$$U(x, t) = e^{-\beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega.$$

Второе и третье уравнения системы решаются методом вариации постоянных:

$$V_1 = C(t)e^{-K_1 t};$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} e^{-K_1 t} - K_1 C(t) e^{-K_1 t} &= \\ &= \beta U(x, t) - K_1 C(t) e^{-K_1 t}; \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{dt} = \beta U(x, t) e^{K_1 t};$$

$$C(t) = \beta \int U(x, t) e^{K_1 t} dt + C_1, \quad C_1 = 0;$$

$$V_1 = \beta e^{-K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt =$$

$$= \beta e^{-K_1 t} \int e^{(K_1 - \beta)t} \left[\int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega \right] dt;$$

$$V_2 = C(t)e^{-K_2 t};$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} e^{-K_2 t} - K_2 C(t) e^{-K_2 t} &= \\ &= K_1 V_1 - K_2 C(t) e^{-K_2 t}; \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{dt} = K_1 V_1 e^{K_2 t};$$

$$C(t) = K_1 \int V_1(x, t) e^{K_2 t} dt + C_1, \quad C_1 = 0;$$

$$V_2 = K_1 e^{-K_2 t} \int V_1(x, t) e^{K_2 t} dt =$$

$$= K_1 e^{-K_2 t} \int \left\{ \beta e^{-K_1 t} \int e^{(K_1 - \beta)t} \left[\int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega \right] dt \right\} e^{K_2 t} dt.$$

Четвертое уравнение системы решается простым интегрированием:

$$V_3 = K_2 \int V_2(x, t) dt + C_1, \quad C_1 = 0;$$

$$V_3 = K_2 \int \left\{ K_1 \int \left\{ \beta e^{K_1 t} \int e^{(K_1 - \beta)t} \left[\int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega \right] dt \right\} e^{K_2 t} dt \right\} dt.$$

Математическая модель при периодическом поступлении информации на вход:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \beta U, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \beta U - K_1 V_1; \quad \frac{dV_2}{dt} = K_1 V_1 - K_2 V_2;$$

$$\frac{dV_3}{dt} = K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A[\cos(\sigma t) + 1], \quad U(x, 0) = 0;$$

$$V_1(0) = V_2(0) = V_3(0) = 0.$$

Путем преобразования $U(x, t) = e^{-\beta t} W(x, t)$ первое уравнение приводится к однородному уравнению с изменением граничного условия:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\beta e^{-\beta t} W + e^{-\beta t} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^{-\beta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

$$-\beta e^{-\beta t} W + e^{-\beta t} \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 e^{-\beta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta e^{-\beta t} W;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

$$U(0, t) = e^{-\beta t} W(0, t) = A[\cos(\sigma t) + 1],$$

$$W(0, t) = e^{\beta t} A[\cos(\sigma t) + 1];$$

$$U(x, 0) = e^{-\beta \cdot 0} W(x, 0) = 0, \quad W(x, 0) = 0.$$

Решение уравнения с использованием синус-преобразования:

$$U(x, t) = e^{\beta t} \int_0^\infty \frac{A\omega\alpha^2}{\pi} \left\{ \frac{\sigma(\omega^2\alpha^2 - \beta) \sin(\sigma t) e^{(\omega^2\alpha^2 - \beta)t} - \cos(\sigma t) e^{(\omega^2\alpha^2 - \beta)t}}{(\omega^2\alpha^2 - \beta)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{e^{(\omega^2\alpha^2 - \beta)t}}{(\omega^2\alpha^2 - \beta)} \right\} \times \\ \times e^{-\omega^2\alpha^2 t} \sin(\omega x) d\omega - e^{\beta t} \int_0^\infty \frac{A\omega\alpha^2}{\pi} \left\{ \frac{\sigma(\omega^2\alpha^2 - \beta)}{(\omega^2\alpha^2 - \beta)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{1}{(\omega^2\alpha^2 - \beta)} \right\} e^{-\omega^2\alpha^2 t} \sin(\omega x) d\omega.$$

Второе и третье уравнения системы решаются методом вариации постоянных:

$$V_1 = \beta e^{K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt;$$

$$V_2 = C(t) e^{-K_2 t};$$

$$\frac{dC}{dt} e^{-K_2 t} - K_2 C(t) e^{-K_2 t} = K_1 V_1 - K_2 C(t) e^{-K_2 t};$$

$$\frac{dC}{dt} = K_1 V_1 e^{K_2 t};$$

$$V_2 = K_1 e^{-K_1} \int V_1(x, t) e^{K_2 t} dt =$$

$$= K_1 e^{-K_1} \int \left[\beta e^{K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt.$$

Решение четвертого уравнения, получаемое простым интегрированием:

$$V_3 = K_2 \int V_2(x, t) dt = K_2 \int \left\{ K_1 e^{-K_1} \int \left[\beta e^{K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt \right\} dt.$$

2 МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ С ГРАДИЕНТНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С учетом пространственного распределения решения, получаемого путем многократного преобразования исходных данных, и при постоянном поступлении

информации на вход математическая модель может быть представлена системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \beta U, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty; \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \gamma_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \beta U - K_1 V_1, \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} &= \gamma_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + K_1 V_1 - K_2 V_2,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$\begin{aligned}U(0, t) &= A, \quad U(x, 0) = 0; \\ V_1(0, t) &= V_2(0, t) = V_3(0, t) = 0; \\ V_1(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad V_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ V_3(x, 0) &= \varphi_3(x),\end{aligned}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ – известные фрагменты решений в органе управления, накопленные в процессе эксплуатации.

Решение первого уравнения получено:

$$U(x, t) = e^{-\beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega.$$

Для решения второго уравнения применяем преобразование переменной $V_1 = e^{-K_1 t} W$:

$$\begin{aligned}-K_1 e^{-K_1 t} W + e^{-K_1 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_1^2 e^{-K_1 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U - e^{-K_1 t} W; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \gamma_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U;\end{aligned}$$

$$W(0, t) = 0; \quad W(x, 0) = \varphi_1(x).$$

Полученное неоднородное уравнение решается методом разложения по собственным функциям:

$$\begin{aligned}W(x, t) &= \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right]; \\ c_n &= 2 \int_0^1 \varphi_1(x) \sin(n\pi x) dx;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{n1} &= 2 \int_0^1 \beta U(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 \beta \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi(\omega^2\alpha^2 + \beta)} (e^{\beta t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t}) \right] \sin(\omega x) d\omega \right\} \sin(n\pi x) dx e^{-\beta t}; \\ V_1(x, t) &= e^{-K_1 t} W(x, t) = \\ &= e^{-K_1 t} \left\{ \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}.\end{aligned}$$

Третье уравнение также решается путем преобразования исходной переменной и разложением по собственным функциям:

$$\begin{aligned}V_2 &= e^{-K_2 t} W; \\ -K_2 e^{-K_2 t} W + e^{-K_2 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_2^2 e^{-K_2 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1 - e^{-K_2 t} W;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1;$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(x, 0) = \varphi_2(x);$$

$$\begin{aligned}W(x, t) &= \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n2}(\tau) d\tau \right];\end{aligned}$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \varphi_2(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$\begin{aligned} u_{n2} &= 2 \int_0^1 K_1 V_1(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 K_1 \left\{ e^{-K_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(x, t) &= e^{-K_2 t} W(x, t) = \\ &= e^{-K_2 t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned}$$

Четвертое уравнение решается методом разложения по собственным функциям без преобразования исходной переменной:

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$V_3(0, t) = 0, \quad V_3(x, 0) = \varphi_3(x);$$

$$\begin{aligned} V_3(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n3}(\tau) d\tau \right]; \\ c_n &= 2 \int_0^1 \varphi_3(x) \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n3} &= 2 \int_0^1 K_2 V_2(x, t) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 K_2 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ &\left. + e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx. \end{aligned}$$

При периодическом поступлении информации на вход и пространственном распределении решений на всех этапах математическая модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \beta U, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \beta U - K_1 V_1;$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + K_1 V_1 - K_2 V_2;$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A [\cos(\sigma t) + 1];$$

$$U(x, 0) = 0, \quad V_1(0, t) = V_2(0, t) = V_3(0, t) = 0;$$

$$V_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad V_2(x, 0) = \varphi_2(x),$$

$$V_3(x, 0) = \varphi_3(x).$$

Решение первого уравнения с использованием синус-преобразования:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= e^{\beta t} \int_0^{\infty} \frac{A \omega \alpha^2}{\pi} \left[\frac{\sigma (\omega^2 \alpha^2 - \beta) \sin(\sigma t) e^{(\omega^2 \alpha^2 - \beta) t} - \cos(\sigma t) e^{(\omega^2 \alpha^2 - \beta) t}}{(\omega^2 \alpha^2 - \beta)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{e^{(\omega^2 \alpha^2 - \beta) t}}{(\omega^2 \alpha^2 - \beta)} \right] \times \\ &\times e^{-\omega^2 \alpha^2 t} \sin(\omega x) d\omega - \\ &- e^{\beta t} \int_0^{\infty} \frac{A \omega \alpha^2}{\pi} \left[\frac{\sigma (\omega^2 \alpha^2 - \beta)}{(\omega^2 \alpha^2 - \beta)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{1}{(\omega^2 \alpha^2 - \beta)} \right] e^{-\omega^2 \alpha^2 t} \sin(\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

Решение второго уравнения с преобразованием переменной и разложением по собственным функциям:

$$V_1(x, t) = e^{-K_1 t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\};$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \phi_1(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n1} = 2 \int_0^1 \beta U(x, t) \sin(n\pi x) dx.$$

Решение третьего уравнения с преобразованием переменной и разложением по собственным функциям:

$$V_2(x, t) = e^{-K_2 t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n2}(\tau) d\tau \right] \right\};$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \phi_2(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n2} = 2 \int_0^1 K_1 V_1(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ = 2 \int_0^1 K_1 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx.$$

Решение четвертого уравнения с разложением по собственным функциям и без преобразования переменной:

$$V_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n3}(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \phi_3(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n3} = 2 \int_0^1 K_2 V_2(x, t) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 K_2 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n2}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx.$$

Для решения второго уравнения применяем преобразование переменной $V_1 = e^{-K_1 t} W$:

$$-K_1 e^{-K_1 t} W + e^{-K_1 t} \frac{\partial W}{\partial t} = \\ = \gamma_1^2 e^{-K_1 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U - e^{-K_1 t} W;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U;$$

$$W(0, t) = 0; W(x, 0) = \phi_1(x).$$

Полученное неоднородное уравнение решается методом разложения по собственным функциям:

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \phi_1(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_n = 2 \int_0^1 \beta U(x, t) \sin(n\pi x) dx; \\ V_1(x, t) = e^{-K_1 t} W(x, t) = \\ = e^{-K_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right].$$

Третье уравнение также решается путем преобразования исходной переменной и разложением по собственным функциям:

$$V_2 = e^{-K_2 t} W; \\ -K_2 e^{-K_2 t} W + e^{-K_2 t} \frac{\partial W}{\partial t} = \\ = \gamma_2^2 e^{-K_2 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1 - e^{-K_2 t} W;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1;$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(x, 0) = \varphi_2(x);$$

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \varphi_2(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_n = 2 \int_0^1 K_1 V_1(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ = 2 \int_0^1 K_1 \left\{ e^{-K_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx;$$

$$V_2(x, t) = e^{-K_2 t} W(x, t) = \\ = e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right].$$

Четвертое уравнение решается методом разложения по собственным функциям без преобразования исходной переменной:

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$V_3(0, t) = 0; \quad V_3(x, 0) = \varphi_3(x);$$

$$V_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \varphi_3(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_n = 2 \int_0^1 K_2 V_2(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ = 2 \int_0^1 K_2 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx.$$

Неоднородное второе уравнение с частными производными решается методом разложения по собственным функциям.

Постановка задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \beta U, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$V(0, t) = 0, \quad V(x, t) = 0.$$

Решение ищется в виде ряда:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ – собственные функции соответствующей однородной задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$V(0, t) = 0, \quad V(x, t) = 0,$$

а функции $T_n(t)$ определяются как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод решения таких задач аналогичен методу вариации произвольных постоянных из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и называется методом разложения по собственным функциям.

Известно, что решение однородной задачи записывается в виде ряда [12]:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n\pi\gamma)^2 t} X_n(x),$$

где $X_n(x)$ – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0;$$

$$X(0) = 0.$$

Решение неоднородной задачи ищется в виде ряда по собственным функциям, но более общего вида:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Для такого предположения есть определенные физические основания. Слагаемые $\beta U(x, t)$ описывают источник данных внутри органа управления. Значит, зависимость решения от времени будет выражаться не экспонентами $e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t}$, как это было в случае однородной задачи, а другими функциями.

Основная идея метода состоит в разложении плотности источника $\beta U(x, t)$ в ряд по собственным функциям:

$$\beta U(x, t) = \beta [U_1(t) X_1(t) + U_2(t) X_2(t) + \dots \\ \dots + U_n(t) X_n(t) + \dots]$$

и определение откликов системы $V_n(x, t)$ на воздействие каждой компоненты $\beta U_n(t) X_n(t)$. Если все отклики будут найдены, то решение задачи будет иметь вид:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, t).$$

Основная трудность в этом методе – разложение плотности источника на компоненты $f_n(t) X_n(t)$. Множители $X_n(t)$ в данной задаче являются собственными векторами системы Штурма-Лиувилля, которая возникает при решении методом разделения переменных соответствующей однородной задачи, а именно:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

$$U(0, t) = 0, U(1, t) = 0, U(x, 0) = f(x).$$

Задача Штурма-Лиувилля в этом случае имеет вид:

$$\frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0;$$

$$X(0) = 0; X(1) = 0,$$

а ее решениями являются функции $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Следовательно, разложение плотности источника представимо в виде ряда:

$$F(x, t) = F_1(t) \sin(\pi x) + F_2(t) \sin(2\pi x) + \dots \\ \dots + F_n(t) \sin(n\pi x) + \dots$$

Чтобы найти функции $F_n(t)$, умножим обе части последнего соотношения на $\sin(n\pi x)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по координате x . В результате получаем:

$$F_n(t) = 2 \int_0^1 F(x, t) \sin(n\pi x) dx.$$

Заменим плотность источника его разложением в ряд:

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(n\pi x)$$

и попытаемся найти индивидуальные отклики, т. е. функции $T_n(t)$ в

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x).$$

Подставим это выражение в исходную задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(n\pi x);$$

$$U(0, t) = 0; U(1, t) = 0; U(x, 0) = \varphi(x),$$

в результате чего получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n}{dt} \sin(n\pi x) = \\ = -R^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \sin(n\pi x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 0 = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = f(x).$$

Функции $T_n(t)$ являются решениями задачи Коши:

$$\frac{dT_n}{dt} + (n\pi\alpha)^2 T_n = F_n(t);$$

$$T_n(0) = 2 \int_0^1 f(\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi = A_n.$$

Решения этих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$T_n(t) = A_n e^{-(n\pi R)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi R)^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau.$$

Полное решение исходной задачи:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{-(n\pi R)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi R)^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau \right].$$

3 МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ С ГРАДИЕНТНЫМ И КОНВЕКТИВНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Решаемая задача при постоянном поступлении информации на вход:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - \delta \frac{dU}{dx} - \beta U,$$

$$0 < x < \infty, 0 < t < \infty;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \beta U - K_1 V_1, \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = K_1 V_1 - K_2 V_2,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A, U(x, 0) = 0,$$

$$V_1(0, t) = B_1, V_2(0, t) = B_2, V_3(0, t) = B_3;$$

$$V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = V_3(x, 0) = 0.$$

Путем двух последовательных преобразований первое уравнение приводится к простому виду:

$$U(x, t) = e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2}} W(x, t);$$

$$W(x, t) = e^{-\beta t} S(x, t);$$

$$U(x, t) = e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} - \beta t} S(x, t);$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta W;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2};$$

$$S(0, t) = A e^{\left[\frac{\delta^2}{4\alpha^2} + \beta \right] t}, S(x, 0) = 0.$$

Решение находится выполнением синус-преобразования Фурье по переменной x с получением обыкновенного дифференциального уравнения по переменной t и использованием метода вариации постоянных:

$$S(x,t) = \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta\right)t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \right] \sin(\omega x) d\omega;$$

$$U(x,t) = e^{\frac{\delta\left[x - \frac{\delta t}{2}\right]}{2\alpha^2} - \beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta\right)t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \right] \sin(\omega x) d\omega.$$

Второе и третье уравнения решаются методом вариации постоянных:

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta e^{-K_1 t} \int U(x,t) e^{K_1 t} dt = \\ &= \beta e^{-K_1 t} \int \left[e^{\frac{\delta\left[x - \frac{\delta t}{2}\right]}{2\alpha^2} - \beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta\right)t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \right] \sin(\omega x) d\omega \right] e^{K_1 t} dt; \end{aligned}$$

$$V_2 = K_1 e^{-K_2 t} \int V_1(x,t) e^{K_2 t} dt = K_1 e^{-K_2 t} \int \left[\beta e^{-K_1 t} \int U(x,t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt.$$

Четвертое уравнение системы решается простым интегрированием:

$$V_3 = K_2 \int V_2(x,t) dt + C_1, \quad C_1 = 0;$$

$$V_3 = K_2 \int K_1 e^{-K_2 t} \left\{ \int \left[\beta e^{-K_1 t} \int U(x,t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt \right\} dt.$$

Решаемая задача при периодическом поступлении информации на вход:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - \delta \frac{dU}{dx} - \beta U,$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \beta U - K_1 V_1, \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = K_1 V_1 - K_2 V_2,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = K_2 V_2;$$

$$U(0,t) = A[\cos(\sigma t) + 1]; \quad U(x,0) = 0;$$

$$V_1(0,t) = B_1, \quad V_2(0,t) = B_2, \quad V_3(0,t) = B_3;$$

$$V_1(x,0) = V_2(x,0) = V_3(x,0) = 0.$$

Путем двух последовательных преобразований первое уравнение приводится к простому виду:

$$U(x,t) = e^{\frac{\delta\left[x - \frac{\delta t}{2}\right]}{2\alpha^2}} W(x,t);$$

$$W(x,t) = e^{-\beta t} S(x,t);$$

$$U(x,t) = e^{\frac{\delta\left[x - \frac{\delta t}{2}\right]}{2\alpha^2} - \beta t} S(x,t);$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta W;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2};$$

$$S(0,t) = A[\cos(\sigma t) + 1] e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} + \beta\right)t}, \quad S(x,0) = 0.$$

Решение находится выполнением синус-преобразования Фурье по переменной x с получением обыкновенного дифференциального уравнения по переменной t и использованием метода вариации постоянных:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} - \beta t} \frac{A\omega\alpha^2 e^{-\omega^2\alpha^2 t}}{\pi} \times \\
 & \times \int_0^\infty \left\{ \frac{\sigma \left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) \sin(\sigma t) e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} - \cos(\sigma t) e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t}}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)^3 \sigma^2 - 1} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)} e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} \right\} \sin(\omega x) d\omega - \\
 & - e^{-\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} + \beta t} \frac{A\omega\alpha^2 e^{-\omega^2\alpha^2 t}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\sigma \left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{1}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)} \right\} \sin(\omega x) d\omega.
 \end{aligned}$$

Второе и третье уравнения решаются методом вариации постоянных:

$$V_1 = \beta e^{-K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt;$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= K_1 e^{-K_2 t} \int V_1(x, t) e^{K_2 t} dt = \\
 &= K_1 e^{-K_2 t} \int \left[\beta e^{-K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt.
 \end{aligned}$$

Четвертое уравнение системы решается простым интегрированием:

$$V_3 = K_2 \int V_2(x, t) dt + C_1, \quad C_1 = 0;$$

$$V_3 = K_2 \int K_1 e^{-K_2 t} \left\{ \int \left[\beta e^{-K_1 t} \int U(x, t) e^{K_1 t} dt \right] e^{K_2 t} dt \right\} dt.$$

4 МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ С ГРАДИЕНТНЫМ И КОНВЕКТИВНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И ГРАДИЕНТНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С учетом пространственного распределения решения, получаемого путем многократного преобразования исходных данных, и при постоянном поступлении информации на вход математическая модель может

быть представлена системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - \delta \frac{dU}{dx} - \beta U,$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \beta U - K_1 V_1,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + K_1 V_1 - K_2 V_2,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A, \quad U(x, 0) = 0,$$

$$V_1(0, t) = V_2(0, t) = V_3(0, t) = 0;$$

$$V_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad V_2(x, 0) = \varphi_2(x),$$

$$V_3(x, 0) = \varphi_3(x),$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ – известные фрагменты решений в органе управления, накопленные в процессе эксплуатации.

Решение первого уравнения получено:

$$U(x, t) = e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} - \beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \right] \sin(\omega x) d\omega.$$

Для решения второго уравнения применяем преобразование переменной $V_1 = e^{-K_1 t} W$:

$$\begin{aligned} -K_1 e^{-K_1 t} W + e^{-K_1 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_1^2 e^{-K_1 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U - e^{-K_1 t} W; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \gamma_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U; \end{aligned}$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(x, 0) = \varphi_1(x).$$

Полученное неоднородное уравнение решается методом разложения по собственным функциям:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right]; \\ c_n &= 2 \int_0^1 \varphi_1(x) \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$u_{n1} = 2 \int_0^1 \beta U(x, t) \sin(n\pi x) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 \beta \left\{ e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} - \beta t} \int_0^\infty \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \right] \sin(\omega x) d\omega \right\} \sin(n\pi x) dx;$$

$$V_1(x, t) = e^{-K_1 t} W(x, t) = e^{-K_1 t} W \left\{ \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Третье уравнение также решается путем преобразования исходной переменной и разложением по собственным функциям:

$$\begin{aligned} V_2 &= e^{-K_2 t} W; \\ -K_2 e^{-K_2 t} W + e^{-K_2 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_2^2 e^{-K_2 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1 - e^{-K_2 t} W; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1;$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(x, 0) = \varphi_2(x);$$

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right]; \end{aligned}$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \varphi_2(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n2} = 2 \int_0^1 K_1 V_1(x, t) \sin(n\pi x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^1 K_1 \left\{ e^{-K_1 t} \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$V_2(x, t) = e^{-K_2 t} W(x, t) =$$

$$\begin{aligned} &= e^{-K_2 t} \left\{ \sum_{n=1}^\infty \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^\infty \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned}$$

Четвертое уравнение решается методом разложения по собственным функциям без преобразования исходной переменной:

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$V_3(0, t) = 0, \quad V_3(x, 0) = \varphi_3(x);$$

$$V_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2(t-\tau)} u_{n3}(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \varphi_3(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n3} = 2 \int_0^1 K_2 V_2(x, t) \sin(n\pi x) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 K_2 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2(t-\tau)} u_{n2}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx.$$

Решаемая задача с периодическим поступлением информации на вход:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial U}{\partial x} - \beta U,$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \gamma_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \beta U - K_1 V_1,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + K_1 V_1 - K_2 V_2,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$U(0, t) = A[\cos(\sigma t) + 1];$$

$$U(x, 0) = 0, \quad V_1(0, t) = V_2(0, t) = V_3(0, t) = 0;$$

$$V_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad V_2(x, 0) = \varphi_2(x),$$

$$V_3(x, 0) = \varphi_3(x).$$

Решение первого уравнения получено:

$$U(x, t) = e^{\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} - \beta t} \frac{A\omega\alpha^2 e^{-\omega^2\alpha^2 t}}{\pi} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sigma \left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) \sin(\sigma t) e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} - \cos(\sigma t) e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t}}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)^3 \sigma^2 - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)} e^{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} \right\} \sin(\omega x) d\omega -$$

$$- e^{-\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} + \beta t} \frac{A\omega\alpha^2 e^{-\omega^2\alpha^2 t}}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sigma \left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)^3 \sigma^2 - 1} + \frac{1}{\left(\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right)} \right\} \sin(\omega x) d\omega.$$

Для решения второго уравнения применяем преобразование переменной $V_1 = e^{-K_1 t} W$:

$$\begin{aligned} -K_1 e^{-K_1 t} W + e^{-K_1 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_1^2 e^{-K_1 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U - e^{-K_1 t} W; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \gamma_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U; \\ W(0, t) &= 0; \end{aligned}$$

$$W(x, 0) = \varphi_1(x).$$

Полученное неоднородное уравнение решается методом разложения по собственным функциям:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right]; \\ c_n &= 2 \int_0^1 \varphi_1(x) \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n1} &= 2 \int_0^1 \beta U(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 \beta \left\{ e^{\left[\frac{\delta \left[x - \frac{\delta t}{2} \right]}{2\alpha^2} \right] - \beta t} \int_0^{\infty} \left[\frac{2A\omega\alpha^2}{\pi} \frac{1}{\omega^2\alpha^2 + \frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta} \left(e^{\left(\frac{\delta^2}{4\alpha^2} - \beta \right) t} - e^{-\omega^2\alpha^2 t} \right) \sin(\omega x) d\omega \right] \sin(n\pi x) dx \right\} \\ V_1(x, t) &= e^{-K_1 t} W(x, t) = e^{-K_1 t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned}$$

Третье уравнение также решается путем преобразования исходной переменной и разложением по собственным функциям:

$$\begin{aligned} V_2 &= e^{-K_2 t} W; \\ -K_1 e^{-K_1 t} W + e^{-K_1 t} \frac{\partial W}{\partial t} &= \\ &= \gamma_1^2 e^{-K_1 t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta U - e^{-K_1 t} W; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 V_1;$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(x, 0) = \varphi_2(x);$$

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right]; \\ c_n &= 2 \int_0^1 \varphi_2(x) \sin(n\pi x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n2} &= 2 \int_0^1 K_1 V_1(x, t) \sin(n\pi x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 K_1 \left\{ e^{-K_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_n(\tau) d\tau \right] \sin(n\pi x) dx \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(x, t) &= e^{-K_2 t} W(x, t) = \\ &= e^{-K_2 t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n1}(\tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned}$$

Четвертое уравнение решается методом разложения по собственным функциям без преобразования исходной переменной:

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \gamma_3^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + K_2 V_2;$$

$$V_3(0, t) = 0, \quad V_3(x, 0) = \varphi_3(x);$$

$$V_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n3}(\tau) d\tau \right];$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \phi_3(x) \sin(n\pi x) dx;$$

$$u_{n3} = 2 \int_0^1 K_2 V_2(x, t) \sin(n\pi x) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 K_2 \left\{ e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-(n\pi\gamma_1)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + e^{-K_2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\gamma_1)^2 (t-\tau)} u_{n2}(\tau) d\tau \right] \right\} \sin(n\pi x) dx.$$

Примерные графики формирования и распространения информационных ресурсов в органе управления приведены на рисунке 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для успешной разработки и применения инновационных технологий совершенствования СППР необходимо учитывать психологические составляющие процесса принятия решений [13, 14].

Принятие решений – волевой акт формирования последовательности действий, ведущих к достижению цели на основе преобразования исходной информации в ситуации неопределенности. Основные этапы процесса принятия решений включают информационную подготовку решений и собственно процедуру принятия решений – формирование и сопоставление вариантов, выбор и построение программы действий.

Принятие решений, с одной стороны, может выступать как особая форма мыслительной деятельности (например, управленческое решение), с другой – как один из этапов мыслительного действия при решении любых задач. Процесс принятия решений обеспечивается деятельностью интеллекта, который складывается в основном из совместной работы памяти, внимания и мышления.

Мышление в понимании психологов – это процесс познавательной деятельности человека, обеспечивающий организацию и переработку информации; это – анализ, синтез, а также обобщение условий и требова-

ний решаемой задачи и способов ее решения. Только с помощью развитого мышления человек получает возможность преодолевать пространственную ограниченность восприятия.

Психологи продолжают заниматься изучением поведения человека при выборе различного рода решений. К настоящему времени сформулирован и изучен целый ряд психологических эффектов, которые человек должен учитывать для осуществления действительно лучшего выбора.

Построение аналитических моделей принятия решений на основе математического аппарата, используемого в различных областях науки и техники, является одним из многочисленных направлений исследования интеллектуальной деятельности должностных лиц органов управления. Положительные результаты этой работы позволят повысить уровень автоматизации СППР и обеспечить более эффективное управление сложными системами различного назначения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вилкас Э.Й., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. М. : Радио и связь, 1981. 328 с.
2. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. Липецк : ЛЭГИ, 2001. 138 с.
3. Шамис А.Л. Пути моделирования мышления. М. : Комкнига, 2006. 333 с.

Рис. 2. Примерные графики распространения информации в органе управления при разных видах воздействия

4. Александров Е.А. Основы теории эвристических решений. Подход к изучению естественного и построению искусственного интеллекта. М. : Советское радио, 1975. 256 с.

5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М. : Мир, 1979. 344 с.

6. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М. : Наука, 1975. 344 с.

7. Алексеев В.В. Физическое и математическое моделирование экосистем. СПб : Гидрометеиздат, 1992. 367 с.

8. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях : пер. с англ. М. : Мир, 1983. 397 с.

9. Иванов А.К. Разработка и применение математических моделей иерархических АСУ. Ульяновск : УлГТУ, 2017. 262 с.

10. Иванов А.К. Моделирование информационных процессов. Ульяновск : УлГТУ, 2020. 246 с.

11. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. М. : Наука, 1992. 541 с.

12. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. М. : Мир, 1985. 384 с.

13. Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М. : Прогресс, 1987. 336 с.

14. Пономарев Я.А. Психология творчества. М. : Наука, 1976. 296 с.

REFERENCES

1. Vilkas E.Y., Mayminas E.Z. *Resheniia: teoriia, informatsiia, modelirovanie* [Decisions: Theory, Information, Modeling]. Moscow, Radio i Sviaz Publ., 1981. 328 p.

2. Bliumin S.L., Shuikova I.A. *Modeli i metody priniatiia reshenii v usloviakh neopredelennosti* [Models and Methods of Decision-Making under Uncertainty]. Lipetsk, LEGI Publ., 2001. 138 p.

3. Shamis A.L. *Puti modelirovaniia myshleniia* [Thinking Simulation Techniques]. Moscow, Komniga Publ., 2006. 333 p.

4. Aleksandrov E.A. *Osnovy teorii evristicheskikh reshenii. Podkhod k izucheniiu estestvennogo i postroeniiu iskusstvennogo intellekta* [Fundamentals of the Heuristic Decision Theory. An Approach to Studying the Nature and to Modeling Artificial Intelligence]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1975. 256 p.

5. Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizatsiia v neravnovesnykh sistemakh: ot dissipativnykh struktur k uporiadochennosti cherez fluktuatsii* [Self-Assembling of Nonequilibrium Systems from Dissipative Structures to Order through Fluctuations]. Moscow, Mir Publ., 1979. 344 p.

6. Romanovskii Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskii D.S. *Matematicheskoe modelirovanie v biofizike* [Mathematical Modeling in Biophysics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 344 p.

7. Alekseev V.V. *Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie ekosistem* [Physical and Mathematical Ecosystem Modeling]. St. Petersburg, Gidrometeizdat Publ., 1992. 367 p.

8. Marri J. *Nelineinye differentsialnye uravneniia v biologii*. Lektsii o modeliakh. Per. s angl. [Nonlinear Differential Equations in Biology. Lectures on Models transl. from Engl.]. Moscow, Mir Publ., 1983. 397 p.

9. Ivanov A.K. *Razrabotka i primeneniie matematicheskikh modelei ierarkhicheskikh ASU* [Development and Application of Mathematical Models of Hierarchical Computer-Aided Control Systems]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2017. 262 p.

10. Ivanov A.K. *Modelirovanie informatsionnykh protsessov* [Information Process Modeling]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2020. 246 p.

11. Akhromeeva T.S., Kurdiunov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A. *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyi kaos* [Nonstationary Structures and Diffused Chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 541 p.

12. Farlow S. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Per. s angl. [Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Transl. from Engl.]. Moscow, Mir Publ., 1985. 384 p.

13. Vertgeymmer M. *Produktivnoe myshlenie* [Productive Thinking]. Moscow, Progress Publ., 1987. 336 p.

14. Ponomarev Ia.A. *Psikhologiya tvorchestva* [The Psychology of Creativity]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 296 p.