УДК 519.226

В.Р. Крашенинников, Ю.Е. Кувайскова, О.Е. Маленова, А.Ю. Субботин

КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, профессор, окончил Казанский государственный университет, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет работы по статистическим методам обработки сигналов и изображений. [e-mail: kvrulstu@mail.ru].

Кувайскова Юлия Евгеньевна, кандидат технических наук, доцент, окончила УлГТУ, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет работы по статистическим методам обработки систем временных рядов. [e-mail: u.kuvaiskova@mail.ru].

Маленова Ольга Евгеньевна, окончила УлГТУ, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет работы по статистическим методам обработки сигналов и изображений. [e-mail: nika-lilu@yandex.ru].

Субботин Алексей Юрьевич, окончил УлГТУ, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет работы по статистическим методам обработки сигналов и изображений. [e-mail: ashkael@mail.ru].

Аннотация

Общепринятой математической моделью самых разнообразных природных, технических, экономических и других объектов, существующих во времени, являются случайные процессы. Например, морское волнение, ветер, вибрации двигателей и гидроагрегатов, биоритмы и т. д. Обычно объект описывается несколькими параметрами, то есть системой случайных процессов или временных рядов. Процессы, протекающие во многих объектах, имеют близкий к периодическому вид – квазипериодический, то есть наблюдается периодичность с элементом непредсказуемости. Например, звуки речи, вибрации различных технических объектов, суточные колебания температуры и так далее. Для постановки задач обработки систем квазипериодических процессов необходимы их математические модели. В данной работе для этой цели используются модели, в которых процессы представлены в виде разверток по спиралям на авторегрессионных цилиндрических изображениях. Подходящий набор значений параметров этих моделей обеспечивает заданную степень квазипериодичности отдельных процессов и заданные ковариационные связи между процессами системы. Предлагается критерий для проверки гипотез о соответствии наблюдаемой системы временных рядов их модели описанного вида. Приводятся примеры применения этого критерия с анализом чувствительности к отклонениям параметров модели от предполагаемых.

Ключевые слова: квазипериодический случайный процесс, ковариационная функция, проверка гипотез, критерий, уровень значимости, мощность.

doi: 10.35752/1991-2927-2020-4-62-93-102

THE HYPOTHESIS TEST OF COVARIATION FUNCTIONS OF QUASIPERIODIC PROCESSES SYSTEMS REPRESENTED BY CYLINDRICAL IMAGE MODELS

Viktor Rostislavovich Krasheninnikov, Doctor of Sciences in Engineering, Professor; graduated from Kazan State University; Head of Department of Applied Mathematics and Computer Sciences at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles in the field of statistical methods of signal and image processing. e-mail: kvrulstu@mail.ru.

Iulia Evgenевна Kuvaiskova, Candidate of Sciences in Engineering, Associate Professor; graduated from Ulyanovsk State Technical University; Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and

Computer Sciences at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles in the field of statistical methods for processing the time series systems. e-mail: u.kuvaiskova@mail.ru.

Olga Evgenyevna Malenova, *Postgraduate Student of the Department of Applied Mathematics and Computer Sciences at Ulyanovsk State Technical University; graduated from UISTU; an author of articles in the field of statistical methods of signal and image processing. e-mail: nika-lilu@yandex.ru.*

Aleksei Iurievich Subbotin, *Postgraduate Student of the Department of Applied Mathematics and Computer Sciences at Ulyanovsk State Technical University; graduated from UISTU; an author of articles in the field of statistical methods of signal and image processing. e-mail: ashkael@mail.ru.*

Abstract

The generally accepted mathematical model of a wide variety of natural, technical, economic and other objects that exist in time are random processes, for example sea waves, wind, vibrations of engines and hydraulic units, biorhythms, etc. An object is usually described by several parameters, that is a system of random processes or time series. The processes occurring in many objects have a form close to periodic – quasiperiodic, namely there is a periodicity with an element of unpredictability, for example speech sounds, vibrations of various technical objects, daily temperature fluctuations, etc. In order to formulate the problems of processing the quasiperiodic process systems, their mathematical models are required. For this purpose, authors propose models in which the processes are presented in the form of spiral sweeps on autoregressive cylindrical images. A suitable set of parameter values for these models provides a given degree of quasiperiodicity of individual processes and the given covariance relationships between the processes of the system. A criterion is proposed for testing the hypotheses about the correspondence of the observed system of time series to their model of the described type. The authors provide the examples of the application of this criterion with an analysis of the sensitivity to deviations of the model parameters from the expected ones are given.

Keywords: quasiperiodic process, covariance function, hypothesis test, criterion, significance level, test power.

ВВЕДЕНИЕ

Многие объекты в технике, экономике, медицине и т. д. описываются системой параметров, регистрируемых через определенные моменты времени, что образует систему временных рядов, поэтому большое внимание уделяется математическим моделям и методам обработки временных рядов или случайных процессов и их систем [1–11].

Часто контролируемые показатели объекта имеют нерегулярную периодичность – квазипериодичность. Квазипериодическое поведение есть повторения с компонентом непредсказуемости, не поддающимся точному прогнозу. Например, вибрация различных двигателей и турбин, биоритмы, суточные колебания температуры и тому подобное. Для описания квазипериодических процессов используются различные способы, например, введение гармонических составляющих в явном виде со случайными амплитудами или применение авторегрессионных моделей с комплексными корнями характеристического уравнения. В [12–14] для описания квазипериодических процессов предложено использование авторегрессионных моделей на цилиндре. Эта модель при подходящем выборе ее параметров дает возможность описывать и имитировать широкий класс квазипериодических процессов, в том числе нестационарных. В настоящей работе рассматриваются модели систем квазипериодических процессов в виде изображений, определенных на многослойных (или толстостенных) цилиндрах. Каждый из этих слоев соответствует одному из процессов системы. Корреляции между процессами определяются «внешним» уравнением авторегрессии, что

позволяет задавать широкий класс различных зависимостей между этими процессами.

Для адекватного описания конкретной наблюдаемой системы временных рядов, предположительно описываемой некоторой моделью рассматриваемого вида, возникает задача идентификации этой модели, то есть нахождения значений ее параметров, при которых модель реализует систему квазипериодических процессов, максимально приближенную по своим свойствам к наблюдаемой системе временных рядов. Эту задачу предлагается решать с помощью псевдоградиентной адаптивной процедуры. Кроме того, нужно решить вопрос о соответствии модели наблюдаемой системе временных рядов. Имеется много работ по критериям для проверки гипотез о случайных процессах, например, проверка гипотез о гауссовости, среднем значении, однородности и т. д. [1, 2, 5, 6, 9]. В [15] был предложен критерий проверки гипотез о ковариационной функции (КФ) одного временного ряда. В настоящей работе рассмотрен критерий для проверки гипотез о КФ системы квазипериодических временных рядов, представленных моделями цилиндрических изображений. Приводятся примеры применения этого критерия с анализом чувствительности к отклонениям параметров модели от гипотетических.

МОДЕЛЬ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ВИДЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ЦИЛИНДРЕ

Для описания квазипериодических процессов используются различные способы, например, введение гармонических составляющих в явном виде или применение авторегрессионных моделей с комплексными

ми корнями характеристического уравнения. В данной работе будет применено представление таких процессов с помощью изображений. Характерной особенностью квазипериодического процесса (сигнала) является его двойная коррелированность: высокая корреляция как между соседними отсчетами, так и между отсчетами, отстоящими на несколько периодов. Такое свойство имеют различные изображения, описываемые плоскими случайными полями: отсчеты коррелированы и вдоль строк, и вдоль столбцов. Поэтому можно было бы представить квазипериодический сигнал в виде построчной развертки изображения. Однако при этом конечная точка строки будет приставлена к начальной точке следующей строки. Но на исходном изображении эти точки находятся на большом расстоянии друг от друга, поэтому на этих стыках развернутый сигнал будет иметь очень малую корреляцию, не свойственную реальным квазипериодическим процессам.

Коррелированность сигнала на стыках соседних периодов можно получить следующим образом. Рассмотрим цилиндрическое изображение, например, изображение вала вращения. Если его разрезать вдоль и развернуть в плоскость, то оно превращается в прямоугольное изображение. На исходном цилиндрическом изображении точки вдоль линии разреза были рядом, поэтому отсчеты в них сильно коррелированы и сигнал в виде последовательности строк этого разрезанного изображения будет иметь характерные свойства квазипериодического изображения.

Для построения модели цилиндрического изображения рассмотрим спиралевидную сетку на цилиндре, показанную на рисунке 1а. Строки этой сетки представляют собой витки спирали (винтовой линии). Тогда изображение может рассматриваться как одна последовательность отсчетов вдоль этой спирали, что очень удобно для авторегрессионного представления. Рассмотрим, например, аналог авторегрессионной модели Хабиби [12]:

$$x_{k,l} = sx_{k,l-1} + rx_{k-1,l} - sr x_{k-1,l-1} + q\xi_{k,l}, \quad (1)$$

где k – номер витка спирали; l – номер узла в витке; s и r – параметры модели; $\xi_{k,l}$ – независимые стандартные случайные величины; при этом $l = 0, T-1$;

Рис. 1. Сетки: (а) на спирали; (б) на системе окружностей; (в) на системе цилиндров

$x_{k,l} = x_{k+1,l-T}$ при $l \geq T$; T – период, то есть количество точек в одном витке. Для использования (1) значения на первом витке должны быть заданы отдельно. Отметим, что в модели (1) сетка может рассматриваться и как обычная цилиндрическая (в цилиндрической системе координат), то есть как последовательность окружностей (рисунок 1б).

Полученная модель цилиндрического изображения может быть представлена в эквивалентном виде как модель случайного процесса, представляющего собой развертку изображения вдоль спирали:

$$x_n = sx_{n-1} + rx_{n-T} - sr x_{n-T-1} + q\xi_n, \quad (2)$$

где $n = kT + l$. Параметр s влияет на коррелированность вдоль строк, то есть на гладкость процесса. Параметр r влияет на коррелированность отсчетов на расстоянии периода. Очевидно, при значениях r , близких к единице, соседние строки изображения (витки спирали) будут сильно коррелированы, поэтому эту модель можно использовать для описания и имитации квазипериодических сигналов. В [12] эта модель применена для представления вокализованных звуков речи. КФ $V(n) = \text{cov}(x_k, x_{k+n})$ модели (2) имеет вид:

$$V(n) = q^2 \left\{ \frac{1}{(1-r^2)T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{z_k}{(1-sz_k)(z_k-s)} z_k^n + \frac{u}{(1-s^2)(1-ru)(u-r)} s^n \right\}, \quad (3)$$

где $z_k = \sqrt[T]{r} \exp(i2k\pi/T)$ и $u = s^T$.

В частности, при $n = kT$ получаем ковариации между витками

$$V(kT) = \frac{q^2}{(1-s^2)(1-r^2)(1-ur)(r-u)} \times \left((1-u^2)r^{k+1} - (1-r^2)u^{k+1} \right). \quad (4)$$

Из (4) при $k = 0$ находим дисперсию процесса:

$$\sigma^2 = \frac{q^2(1+ru)}{(1-s^2)(1-r^2)(1-ru)}. \quad (5)$$

Из этих выражений следует, что КФ модели (2) является затухающе-периодической (на рисунке 2 показан

Рис. 2. График корреляционной функции

график коэффициента корреляции). Значения этой функции постепенно убывают с увеличением номера периода, то есть с увеличением расстояния значения процесса становятся менее коррелированными, но на расстояниях, кратных периоду, корреляция большая.

На рисунке 3 показаны примеры графиков процессов в виде разверток по спирали изображений на цилиндре, полученных с помощью модели (1). Квазипериоды на рисунке разделены вертикальными линиями. Квазипериоды на рисунке 3б более коррелированы, чем на рисунке 3а, в силу большего значения параметра r .

Рис. 3. Графики процессов: а) с параметрами $s = 0,9$, $r = 0,85$; б) с параметрами $s = 0,9$, $r = 0,95$

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИДЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ЦИЛИНДРАХ

Для представления системы временных рядов можно использовать витки цилиндрического изображения [12–14]. Например, для одного временного ряда взять витки, начиная с 1, а для второго – начиная с 21. Однако подобное представление годится только для небольших отрезков временных рядов, так как в этом случае второй ряд будет просто повторять первый ряд с временным сдвигом на 20 периодов. Поэтому рассмотрим модель, в которой каждый временной ряд системы представлен изображением на своем цилиндре, а эти отдельные цилиндры вложены друг в друга и образуют систему цилиндров – «многослойный цилиндр». На рисунке 1в показаны два таких слоя.

Рассмотрим систему из M стационарных случайных процессов

$$X = \{x_{n,i}, i = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots\}, \quad (6)$$

которую будем представлять в виде векторного процесса

$$X = \{\bar{x}_n : n = 1, 2, \dots\} \quad (7)$$

из M -мерных векторов

$$\bar{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,M})^T. \quad (8)$$

Для построения модели системы X возьмем систему $\xi = \{\xi_n : n = 1, 2, \dots\}$ из независимых «стандартных» векторов $\xi_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,M})^T$ с независимыми стандартными гауссовскими компонентами. Системе X образуем с помощью векторной авторегрессии

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= s\bar{x}_{n-1} + r\bar{x}_{n-T} - sr\bar{x}_{n-T-1} + q_1 A \bar{\xi}_n, \\ q_1^2 &= 1/\sigma^2, \end{aligned} \quad (9)$$

подобной модели (2), где σ^2 определено в (5) и A – некоторая $M \times M$ -матрица. При таком выборе параметра q_1^2 система (7) будет иметь факторизованную КФ

$$\begin{aligned} W(n) &= \{W(i, j, n) : i, j = 1, \dots, M\} = \\ &= \{\text{cov}(x_{i,k}, x_{j,k+n}) : i, j = 1, \dots, M\} = \\ &= V(n) A A^T, \end{aligned} \quad (10)$$

где $V(n)$ – «внутрипроцессорная» или «автоковариационная» КФ из (3), а $A A^T$ – «межпроцессорная» или «кроссковариационная» матрица. Отметим, что в силу (10) $V(n)$ является фактически нормированной КФ, то есть корреляционной функцией.

Пусть теперь задана ковариационная матрица между процессами

$$C = \{C_{ij}\} = \{\text{cov}(x_{i,n}, x_{j,n})\} = M [\bar{x}_n \bar{x}_n^T]. \quad (11)$$

Тогда для того, чтобы система (6) из векторов (8) имела такую кроссковариационную матрицу, следует выбрать матрицу A , удовлетворяющую уравнению

$$A A^T = C. \quad (12)$$

Например, можно взять нижнюю треугольную матрицу [16].

В частности, если

$$C_{ij} = \sigma^2 p^{|j-i|}, \quad (13)$$

то есть процессы системы имеют одинаковую дисперсию σ^2 и коэффициент корреляции $p^{|j-i|}$ между $x_{n,i}$ и $x_{n,j}$ то можно взять матрицу

$$A = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & h & 0 & \dots & 0 \\ p^2 & ph & h & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p^{M-1} & p^{M-2}h & p^{M-3}h & \dots & h \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $h = \sqrt{1-p^2}$.

На рисунках 4–6 показаны примеры имитации систем из трех процессов каждая с различными параметрами модели в уравнениях (7) и (9) при $T = 150$. У процессов на рисунке 4 параметр $p = 0$, поэтому эти процессы не коррелированы. На рисунке 5 $p = 0,7$, поэтому наблюдается слабая корреляция между процессами. Процессы на рисунке 6 более коррелированы, чем на рисунке 4, так как параметр p имеет большее значение 0,95.

Отметим, что, переходя в формулах (6–8) от обозначений $x_{n,i}$ из модели (2) к обозначениям $x_{k,l,i}$ из моде-

ли (1), получаем систему изображений, определенных на системе вложенных друг в друга цилиндров (рисунков 1в).

Рис. 4. Три процесса с параметрами $s = 0,9$, $r = 0,9$, $p = 0$

Рис. 5. Три процесса с параметрами $s = 0,9$, $r = 0,9$, $p = 0,7$

Рис. 6. Три процесса с параметрами $s = 0,9$, $r = 0,9$, $p = 0,95$

КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О КФ

Пусть имеется система (7) из гауссовских стационарных дискретных векторных процессов, определенных в моменты времени $n = 1, 2, \dots, N$. Предположим также, что КФ этой системы имеет вид (10) с неизвестными параметрами r, s, A модели (9–12).

Требуется проверить с уровнем значимости α простую гипотезу

$$H_0 : W(i, j, n) = g(i, j, n), (i, j, n) \in D_f, \quad (15)$$

против сложной гипотезы

$$H_1 : \exists(i, j, n) \{W(i, j, n) \neq g(i, j, n)\}, \quad (16)$$

где D_f – множество из f значений параметров (i, j, n) ; а (16) означает, что $V(i, j, n) \neq g(i, j, n)$ хотя бы для одного значения набора (i, j, n) из D_f . Отметим, что в (15) учитываются значения ковариаций только для некоторого заданного множества D_f , а не для всех возможных значений. Сделано это по двум причинам. Во-первых, интерес обычно и представляют значения ковариаций для ограниченного множества значений процессов. Во-вторых, по ограниченной реализации возможно оценивать ковариации процесса только на ограниченных расстояниях по времени. Таким образом, фактически проверяется гипотеза только о том, что выборочные значения ковариаций и их теоретические значения статистически не противоречат друг другу на множестве D_f .

Будем использовать следующую оценку КФ:

$$\hat{W}(i, j, n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} x_{i,k} x_{j,k+n}, \quad (17)$$

которая не смещена, состоятельна и асимптотически нормальна. Построим критерий различения гипотез о КФ на основе статистик (17), то есть на статистике

$$\hat{W} = \{\hat{W}_{i,j,n} : (i, j, n) \in D_f\}. \quad (18)$$

Пусть гипотеза H_0 верна, тогда (18) будет несмещенной оценкой параметров

$$G = \{g(i, j, n) : (i, j, n) \in D_f\}.$$

Известно [1], что при $N \rightarrow \infty$ случайные величины $\bar{\varphi} = \varphi(i, j, n) = \sqrt{N-n} (\hat{W}(i, j, n) - g(i, j, n))$ (19) асимптотически нормальны с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\text{cov}(\varphi(i_1, j_1, m), \varphi(i_2, j_2, n)) : (i_1, j_1, m) \in D_f, (i_2, j_2, n) \in D_f\} = \\ &= AA^T \sum_{l=-\infty}^{\infty} [V(l+m)V(l+n) + V(l+m)V(l-n)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, функцией правдоподобия для гипотезы H_0 будет

$$L(\hat{W}|\tilde{H}_0) = L(\bar{\varphi}|\tilde{H}_0) \frac{1}{(2\pi)^{f/2} |\Phi|^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi}\right), \quad (21)$$

где $\bar{\varphi} = \{\varphi(i, j, n) : (i, j, n) \in D_f\}$ – вектор из величин (19).

Рассмотрим сначала простую конкурирующую гипотезу

$$\tilde{H}_1 : W(i, j, n) = d(i, j, n), \quad (i, j, n) \in D_f. \quad (22)$$

Для нее функцией правдоподобия при аналогичных обозначениях будет

$$L(\hat{W}|\tilde{H}_1) = L(\bar{\omega}|\tilde{H}_1) \frac{1}{(2\pi)^{r/2} |\Omega|^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\omega}^T \Omega^{-1} \bar{\omega}\right), \quad (23)$$

где

$$\omega(i, j, n) = \sqrt{N-n} (\hat{W}(i, j, n) - d(i, j, n)), \quad (24)$$

$$\bar{\omega} = \{\omega(i, j, n) : (i, j, n) \in D_f\},$$

Ω – матрица ковариаций вектора $\bar{\omega}$.

Наилучшей критической областью (НКО) для гипотезы H_0 против $\tilde{H}_1$ является [5, 6]

$$\frac{L(\hat{W}|H_0)}{L(\hat{W}|\tilde{H}_1)} = \frac{L(\bar{\varphi}|H_0)}{L(\bar{\omega}|\tilde{H}_1)} \leq k_\alpha, \quad (25)$$

где k_α зависит от заданного уровня значимости α . Подставляя (21) и (23) в (26) и логарифмируя, получаем

$$\bar{\omega}^T \Omega^{-1} \bar{\omega} - \bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} \leq l_\alpha = \ln \left(\frac{k_\alpha |\Omega|^{1/2}}{|\Phi|^{1/2}} \right). \quad (26)$$

Выражения в левой части (26) – обычные, то есть приведенные к началу координат квадратичные формы от $\bar{\omega}$ и $\bar{\varphi}$, а относительно $\hat{W}$ – смещенные квадратичные формы с центрами в точках $\bar{g}$ и $\bar{d}$ f -мерного пространства. За исключением вырожденных случаев, когда $|\Phi| = 0$ и/или $|\Omega| = 0$, эти квадратичные формы положительно определены. Им соответствуют гиперэллипсоиды равных значений. Однако разность двух квадратичных форм может быть квадратичной формой с любым рангом и любой сигнатурой, то есть с любым количеством отрицательных, положительных и нулевых квадратов в каноническом виде. Поэтому поверхность, определяющая НКО в (26), может быть самой разнообразной. Например, в двумерном случае ($f = 2$) это может быть кривая второго порядка любого типа (гиперболического, эллиптического или параболического), включая вырожденные случаи. Анализ НКО существенно усложняется еще и тем, что матрица формы зависит от значений КФ d_n .

Зависимость НКО от параметров простой гипотезы $\tilde{H}_1$ означает, что не существует равномерно наиболее мощного (РНМ) критерия для сложной гипотезы (16). Поэтому можно только принять какой-нибудь компромиссный критерий. С этой целью преобразуем выражение (26). Из (24) следует:

$$\begin{aligned} \omega(i, j, n) &= \sqrt{N-n} (\hat{W}(i, j, n) - d(i, j, n)) = \\ &= \sqrt{N-n} ((\hat{W}(i, j, n) - g(i, j, n)) - (d(i, j, n) - g(i, j, n))) = \\ &= \sqrt{N-n} (\hat{W}(i, j, n) - g(i, j, n)) - \sqrt{N-n} (d(i, j, n) - g(i, j, n)) = \\ &= \varphi(i, j, n) - \sqrt{N-n} \delta(i, j, n) = \varphi(i, j, n) - \Delta(i, j, n), \end{aligned}$$

где

$$\delta(i, j, n) = d(i, j, n) - g(i, j, n), \quad \Delta(i, j, n) = \sqrt{N-n} \delta(i, j, n).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^T \Omega^{-1} \bar{\omega} &= (\bar{\varphi} - \bar{\Delta})^T \Omega^{-1} (\bar{\varphi} - \bar{\Delta}) = \\ &= \bar{\varphi}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi} - 2\bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta} + \bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi} - \bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} - 2\bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi} \leq \\ \leq l_\alpha - \bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть верна гипотеза H_0 . Тогда $M[\bar{\varphi}] = 0$, а значения $M[\bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi}]$, $M[\bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi}]$ и $M[\bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi}]$ ограничены и стремятся к своим предельным значениям при $N \rightarrow \infty$. Величина $\bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta}$ не случайна, является положительно определенной квадратичной формой от переменных $\Delta(i, j, n) = \sqrt{N-n} (d(i, j, n) - g(i, j, n))$, которые при $d(i, j, n) \neq g(i, j, n)$ увеличиваются с ростом N :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta(i, j, n)| = \infty \text{ при } d(i, j, n) \neq g(i, j, n).$$

Таким образом, при истинности гипотезы H_0 имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta} = +\infty. \quad (29)$$

Из (25) и (29) следует, что при любой простой альтернативе $\tilde{H}_1$ НКО для H_0 бесконечно сокращается (при непрерывных распределениях $\bar{\varphi}$).

Перепишем (28) в виде:

$$\bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} \geq \bar{\Delta}^T \Omega^{-1} \bar{\Delta} - l_\alpha - 2\bar{\Delta} \Omega^{-1} \bar{\varphi} + \bar{\varphi}^T \Omega^{-1} \bar{\varphi}. \quad (30)$$

Учитывая, что с ростом N правая часть (30) бесконечно возрастает, можно сделать вывод, что НКО для H_0 содержит точки, в которых $\bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi}$ имеет большие значения при любой простой гипотезе $\tilde{H}_1$ и достаточно большом объеме выборки. Поэтому целесообразно только такие точки включить в критическую область гипотезы H_0 при сложной гипотезе (16):

$$\bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} \geq b_\alpha,$$

где пороговое значение b_α соответствует уровню значимости α .

Таким образом, получаем следующий критерий проверки гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1 :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} < b_\alpha &\Rightarrow \text{принимается } H_0, \\ \bar{\varphi}^T \Phi^{-1} \bar{\varphi} \geq b_\alpha &\Rightarrow \text{принимается } H_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Смысл этого критерия прост: гипотеза H_0 принимается, если отклонения выборочных значений $\hat{W}(i, j, n)$ КФ от ее точных значений $g(i, j, n)$ в совокупности невелики.

Мощность критерия (31), естественно, зависит от конкретной альтернативы $\tilde{H}_1$ и может быть существенно ниже мощности наиболее мощного критерия для этой альтернативы при небольших значениях N .

Рассмотрим теперь случай, когда верна некоторая простая альтернатива $\tilde{H}_1$, то есть когда точными значениями КФ будут d_n . На этот раз представим статистику $\bar{\varphi}$ в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(i, j, n) &= \sqrt{N-n} ((\hat{W}(i, j, n) - d(i, j, n)) + \\ &+ (d(i, j, n) - g(i, j, n))) = \omega(i, j, n) + \Delta(i, j, n), \end{aligned}$$

то есть $\bar{\varphi} = \bar{\omega} + \bar{\Delta}$. Тогда (26) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^T \Omega^{-1} \bar{\omega} &\leq \bar{\Delta}^T \Phi^{-1} \bar{\Delta} + l_\alpha + \\ &+ 2\bar{\Delta}^T \Phi^{-1} \bar{\omega} + \bar{\omega}^T \Phi^{-1} \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (32)$$

При возрастании N значение $\bar{\Delta}^T \Phi^{-1} \bar{\Delta}$ бесконечно возрастает, а величины $\bar{\omega}$ в среднем убывают, поэтому при $N \rightarrow \infty$ вероятность выполнения неравенства (32) стремится к единице. Это означает, что при любой простой альтернативе $\tilde{H}_1$ из сложной гипотезы α и любом уровне значимости H_1 альтернатива $\tilde{H}_1$ принимается с вероятностью, сколь угодно близкой к единице при $N \geq N(\tilde{H}_1)$.

Отметим, однако, что нет оснований утверждать, что $N(\tilde{H}_1) \leq N_0$ для всех $\tilde{H}_1 \in H_1$. Поэтому, вообще говоря, нельзя указать объем выборки N_0 , достаточный для обеспечения мощности критерия (31), не меньшей заданной, при всех альтернативах H_1 . Существование такого равномерного N_0 возможно, если H_1 является классом альтернатив определенного вида.

Найдем теперь порог b_α в (31), соответствующий заданному уровню значимости. Если верна гипотеза H_0 и $N \rightarrow \infty$, то распределение статистики $\bar{\omega}^T \Omega^{-1} \bar{\omega}$ стремится к распределению хи-квадрат с f степенями свободы при любом виде распределений величин (7). Таким образом, в качестве порога решающего правила (31) можно взять критическую точку распределения хи-квадрат с заданным уровнем значимости α и числом степеней свободы f . Следует учитывать, что при малых значениях N найденный здесь порог может давать неточное значение уровня значимости из-за существенных отклонений распределения статистики в (25) от хи-квадрат.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЯ

Приведем в качестве примера применение представленного критерия для проверки гипотезы о КФ (10) с матрицами C и A из (13) и (14):

$$W(i, j, n) = \sigma^2 p^{|i-j|} V(n) \quad (33)$$

при большой длине реализации N , где $V(n)$ определено в (3). Пусть гипотеза проверяется для множества $D_3 = \{(1, 1, 0), (1, 2, T), (1, 3, 2T)\}$, для которого достаточно взять 3×3 -матрицу

$$A = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & h & 0 \\ p^2 & ph & h \end{pmatrix}. \text{ В этом случае}$$

$$AA^T = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 \\ p & 1 & p \\ p^2 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

В множество D_3 входят только кратные T значения временного параметра n , то есть рассматриваются прореженные процессы, поэтому и в дальнейших выкладках достаточно использовать только эти значения n . С учетом этого замечания матрицей ковариаций для D_3 будет матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{1,k}) & \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{3,k+2T}) \\ \text{cov}(\varphi_{2,k+T}, \varphi_{1,k}) & \text{cov}(\varphi_{2,k+T}, \varphi_{2,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{2,k+T}, \varphi_{3,k+2T}) \\ \text{cov}(\varphi_{3,k+2T}, \varphi_{1,k}) & \text{cov}(\varphi_{3,k+2T}, \varphi_{2,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{3,k+2T}, \varphi_{3,k+2T}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{1,k}) & \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{1,k}, \varphi_{3,k+2T}) \\ \text{cov}(\varphi_{2,k}, \varphi_{1,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{2,k}, \varphi_{2,k}) & \text{cov}(\varphi_{2,k}, \varphi_{3,k+T}) \\ \text{cov}(\varphi_{3,k}, \varphi_{1,k+2T}) & \text{cov}(\varphi_{3,k}, \varphi_{2,k+T}) & \text{cov}(\varphi_{3,k}, \varphi_{3,k}) \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} H(0) & pH(1) & p^2H(2) \\ pH(1) & H(0) & pH(1) \\ p^2H(2) & pH(1) & H(0) \end{pmatrix},$$

где

$$H(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [V(lT)V(lT+kT) + V(lT)V(lT-kT)],$$

$$H(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [V(lT)V(lT) + V(lT)V(lT)] =$$

$$= 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} V^2(lT),$$

$$H(1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [V(lT)V(lT+T) + V(lT)V(lT-T)],$$

$$H(2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [V(lT)V(lT+2T) + V(lT)V(lT-2T)].$$

Ковариации $V(kT)$ находятся по формуле (4), при этом $V(kT) = V(|kT|)$. Эти ковариации экспоненциально убывают, поэтому в последних формулах достаточно суммировать по множеству $|l| \leq L$ при не очень большом L .

Для статистического испытания разработанного критерия были произведены следующие эксперименты.

В первом эксперименте система из трех процессов имитировалась по описанной выше модели при пара-

метрах $s = 0,8$, $r = 0,8$, $p = 0,7$, $\sigma = 1$. Оценка КФ процессов находилась по реализации объема $N = 10000$. По этой реализации вычислялось значение χ_3^2 , которое сравнивалось в решающем правиле (31) с порогом $\chi_{кр}^2 = \chi_{0,05;3}^2 = 7,815$, соответствующим уровню значимости 0,05 при трех степенях свободы. Было произведено 10000 применений этого критерия. Оказалось, что верная гипотеза H_0 была отвергнута 472 раза, то есть относительная частота отвержения равна 0,0104. Это значение укладывается в 99% доверительный интервал $I_{0,99} = (0,0467; 0,0532)$. Таким образом, в этом эксперименте заданный уровень значимости можно считать выдержанным.

Во втором эксперименте была исследована мощность критерия γ при проверке той же самой гипотезы H_0 против простых гипотез $\tilde{H}_1$ с другими значениями параметров s, r, p по реализациям того же объема $N = 10000$. Критерий применялся также 10000 раз для каждого из этих наборов значений. На рисунке 7 приведены графики оцененной по результатам этих испытаний мощности, то есть относительной частоты отвержения неверной гипотезы. Из этих данных можно сделать вывод о довольно высокой чувствительности критерия к отклонениям параметров процесса от их предполагаемых значений.

Таким образом, предложенный критерий требует небольших вычислительных затрат, обладает достаточно высокой чувствительностью и может применяться для проверки гипотез о КФ системы квазипериодических случайных процессов.

(а)

(б)

Рис. 7. Зависимость мощности критерия от параметров процесса конкурирующей гипотезы: а) от $r = s$ при $p = 0,7$; б) от p при $r = s = 0,8$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель системы квазипериодических процессов в виде развертки по спирали системы авторегрессионных цилиндрических изображений. Получены выражения КФ систем таких процессов. Разработан критерий для проверки гипотез о виде КФ системы квазипериодических процессов данного вида. Статистика критерия имеет распределение хи-квадрат. Примеры применения предложенного критерия показали его высокую мощность, то есть чувствительность к отклонениям гипотетической характеристики от фактической. Критерий требует небольших вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. М.: Мир, 1974. 406 с.
3. Хеннан Э. Многомерные временные ряды М.: Мир, 1974. 576 с.
4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. 1000 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
6. Кендалл М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. 899 с.
7. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 272 с.
8. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: 2-е изд. М.: ООО «Бином-пресс», 2006. 656 с.
9. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
10. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
11. Васильев К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени. М.: Радиотехника, 2016. 288 с.
12. Krasheninnikov V.R., Kalinov D.V., Pankratov Yu.G. Spiral Autoregressive Model of a Quasiperiodic Signal //

Pattern Recognition and Image Analysis. 2001. Vol. 11 (1). pp. 211–213.

13. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Статистический анализ последовательностей изображений. М.: Радиотехника, 2017. 248 с.

14. Krasheninnikov V.R., Vasil'ev K.K. Multidimensional image models and processing / Favorskaya M.N, Jain L.C. (eds.) // Computer Vision in Control Systems-3, ISRL. 2018. Vol. 135. pp. 11–64.

15. Крашенинников В.Р., Гладких Е.А. Тест для проверки гипотез о ковариационной функции и спектральной плотности случайного процесса // Автоматизация процессов управления. 2014. № 1 (35). С. 24–30.

16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 1966. 576 с.

REFERENCES

1. Anderson T. W. *Statisticheskii analiz vremennykh riadov* [The Statistical Analysis of Time Series]. Moscow, Mir Publ., 1976. 755 p.
2. Box G., G. Jenkins. *Analiz vremennykh riadov. Prognoz i upravlenie*. Vyp. 1. [Time Series Analysis: Forecasting and Control. Iss. 1]. Moscow, Mir Publ., 1974. 406 p.
3. Hannan E. *Mnogomernye vremennye riady* [Multiple Time Series]. Moscow, Mir Publ., 1974. 576 p.
4. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Teoriia stokhasticheskikh sistem* [Stochastic System Theory]. Moscow, Logos Publ., 2000. 1000 p.
5. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical Statistic Techniques]. Moscow, Mir Publ., 1975. 648 p.
6. Kendall M., Stuart A. *Statisticheskie vyvody i svyazi* [The Advanced Theory of Statistics]. Moscow, Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury izd-va Nauka Publ., 1973. 899 p.
7. Kulikov E.I. *Metody izmereniia sluchainykh protsessov* [Random Process Measuring Techniques]. Moscow, Radio i Sviaz Pub., 1986. 272 p.

8. Lyons R. *Tsifrovaia obrabotka signalov*. 2-e izd. [Understanding Digital Signal Processing. 2nd edition]. Moscow, Binom-press Publ., 2006. 656 p.
9. Marple S.L. *Tsifrovoi spektralnyi analiz i ego prilozheniia* [Digital Spectral Analysis and Its Applications]. Moscow, Mir Pub., 1990. 584 p.
10. Rabiner R., Gold B. *Teoriia i primeneniie tsifrovoi obrabotki signalov* [Theory and Application of Digital Signal Processing]. Moscow, Mir Publ., 1978. 848 p.
11. Vasilev K.K. *Optimalnaia obrabotka signalov v diskretnom vremeni* [Optimal Signal Processing in Discrete Time]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2016. 288 p.
12. Krasheninnikov V.R., Kalinov D.V., Pankratov Iu.G. Spiral Autoregressive Model of a Quasiperiodic Signal. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2001, vol. 11 (1), pp. 211–213.
13. Vasilev K.K., Krasheninnikov V.R. *Statisticheskii analiz posledovatel'nostei izobrazhenii* [Statistical Analysis of Image Sequences]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2017. 248 p.
14. Krasheninnikov V.R., Vasilev K.K. Multidimensional Image Models and Processing. Favorskaia M.N, Jain L.C. (eds.). *Computer Vision in Control Systems-3, ISRL*, 2018, vol. 135, pp. 11–64.
15. Krasheninnikov V.R., Gladkikh E.A. Test dlia proverki gipotez o kovariatsionnoi funktsii i spektralnoi plotnosti sluchainogo protsessa [Hypothesis Test for Covariance Function and Spectral Density of Random Process]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2014, no. 1 (35), pp. 24–30.
16. Gantmacher F.R. *Teoriia matrits* [The Theory of Matrices]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1966. 576 p.