MATHEMATICAL MODELING

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9:539.3:532.5

Ю.В. Покладова, П.А. Вельмисов

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ¹

Покладова Юлия Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, окончила экономико-математический факультет Ульяновского государственного технического университета. Доцент кафедры «Высшая математика» УлГТУ. Имеет статьи и монографии в области аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: pokladovau@inbox.ru].

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета. Заведующий кафедрой «Высшая математика» УлГТУ. Имеет статьи и монографии в области аэрогидромеханики, аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: velmisov@ulstu.ru].

Аннотация

В данной работе предлагается приближенный метод исследования устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, моделирующих динамику одного класса аэроупругих систем. На основе метода Галеркина (Крылова-Канторовича), при представлении искомым деформаций упругих элементов

конструкций в виде $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x)$, исследование задач для дифференциальных уравнений с частными

производными для $w(x, t)$ сводится к исследованию задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t)$, $k = 1, \dots, n$. Показано, что структура указанных систем позволяет использовать известные теоремы об устойчивости по линейному приближению. Тем самым изучение динамической устойчивости широкого класса аэроупругих систем сводится к изучению единообразных задач, объединенных общим подходом их решения. В качестве примеров получены условия устойчивости колебаний трубопровода с протекающей внутри него жидкостью и пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

Ключевые слова: трубопровод, пластина, деформация, динамика, аэрогидроупругость, устойчивость, нелинейная модель, дифференциальные уравнения в частных производных.

doi: 10.35752/1991-2927-2020-3-61-80-91

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-41-730015, № 19-41-730006.

THE STUDY OF THE STABILITY OF AEROELASTIC SYSTEMS BY LINEAR APPROXIMATION

Iulia Valerevna Pokladova, *Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor; graduated from the Faculty of Economics and Mathematics of Ulyanovsk State Technical University; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at UISTU; an author of articles and monographs in the field of aerohydroelasticity, mathematical modeling. e-mail: pokladovau@inbox.ru.*

Petr Aleksandrovich Velmisov, *Doctor of Sciences Physics and Mathematics, Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Saratov State University; Head of the Department of Higher Mathematics at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles and monographs in the field of aerohydrodynamics, aeroelasticity, mathematical modeling. e-mail: velmisov@ulstu.ru.*

Abstract

This paper proposes an approximate method of studying the stability of solutions of nonlinear differential equations with partial derivatives, describing the dynamics of one class of aeroelastic systems. Based on the Galerkin (Krylov-Kantorovich)

method, when presenting the desired deformations in the form $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x)$, the study of problems

for differential equations with partial derivatives for $w(x, t)$ reduces to the study of problems for nonlinear systems of ordinary differential equations for functions $w_k(t)$, $k = 1, \dots, n$. It is shown that the structure of these systems allows using the known stability theorems by linear approximation. Thus, the study of the dynamic stability of aeroelastic systems is reduced to the study of uniform problems combined by a common approach to solving them. As examples, vibration stability conditions of a pipeline with liquid flowing inside it and a plate streamlined by a supersonic gas flow are obtained.

Key words: pipeline, plate, deformation, dynamics, aeroelasticity, stability, nonlinear model, partial differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок (и т. д.) различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости (аэроупругих конструкций), важное значение имеет исследование динамики и устойчивости деформируемых элементов [1–8]. Такого рода задачи возникают в авиаконструировании, приборостроении, машиностроении и т. д., в частности, при проектировании летательных аппаратов, антенных установок, датчиков измерения параметров газожидкостных сред, вибрационной техники, ветроустановок, трубопроводов и т. д. [6–12]. Многие реальные динамические объекты, различного рода механические системы, к которым относятся и аэроупругие системы, могут быть описаны в терминах дифференциальных уравнений. Это послужило одной из причин возникновения математической теории устойчивости, исследуемым объектом которой является система обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная теория занимается важным с практической точки зрения вопросом о характере поведения динамических систем. Что касается понятия устойчивости, то одним из основных здесь является устойчивость по Ляпунову, в котором реализу-

ется идея «малых» отклонений решения дифференциального уравнения при «малых» вариациях начальных данных [13–17].

В данной работе исследуется устойчивость по Ляпунову нелинейных модельных уравнений (дифференциальных уравнений с частными производными), описывающих динамику упругого трубопровода (полого стержня с протекающей внутри него жидкостью), и упругого элемента конструкции (в виде пластины), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. На основе метода Галеркина (Крылова-Канторовича), при представлении искомых деформаций упругих тел в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x),$$

исследование задач для дифференциальных уравнений с частными производными для $w(x, t)$ сводится к исследованию задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t)$, $k = 1, \dots, n$. Нелинейные системы дифференциальных уравнений довольно сложны с точки зрения исследования их решений на устойчивость. Однако структура полученных в статье систем, а именно структура нелинейных частей этих систем, такова, что позволяет делать вывод об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению.

Такой подход можно применить также для исследования нелинейных колебаний упругих элементов вибрационных устройств, упругих элементов датчиков давления и т. д. [8, 9, 11, 12]. Таким образом, при исследовании нелинейной динамики достаточно широкого класса аэроупругих систем получаем единообразные задачи, объединенные общим подходом к их изучению.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ О ДИНАМИКЕ ТРУБОПРОВОДА

Рассмотрим задачу о динамике трубопровода с протекающей в нем жидкостью (рис. 1).

Рис. 1. Трубопровод с протекающей в нем жидкостью

1) Модель, учитывающая нелинейности, возникающие вследствие удлинения трубопровода из-за его деформации:

$$(m_0 + m_*) \ddot{w} + EJw'''' + (N + m_*U^2)w'' + 2Um_*\dot{w}' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w - w'' \left[\mu \int_0^l w'^2(x,t) dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2(x,t) dx \right] = 0. \quad (1)$$

Здесь $w(x,t)$ – поперечная деформация в сечении x в момент времени t , $x \in [0, l]$; E – модуль упругости материала трубопровода; J – момент инерции ($J = \frac{\pi}{4}(r_0^4 - r_*^4)$); $EJ = D$ – изгибная жесткость; l – длина трубопровода; r_0, r_* – внешний и внутренний радиусы трубопровода; m_0 – погонная масса трубопровода ($m_0 = \rho_0 F$); ρ_0 – плотность материала трубопровода; F – площадь сечения трубопровода ($F = \pi(r_0^2 - r_*^2)$); U, ρ_*, m_* – скорость, плотность и погонная масса жидкости $m_* = \rho_* \pi r_*^2$; N – сжимающее (растягивающее) усилие; α, β, ν – коэффициенты демпфирования; γ – коэффициент жесткости основания; $\mu = \frac{EF}{2l(1+K)}$, где K зависит от типа закрепления концов, например, $K = 0$ для неподвижных концов трубопровода; точка и штрих обозначают производные по t и x соответственно.

2) Модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента и центробежной силы:

$$(m_0 + m_*) \ddot{w} + \left[EJw'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) \right]'' + m_*U^2w'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) + Nw'' + 2m_*U\dot{w}' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w = 0. \quad (2)$$

3) Нелинейная модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента, центробежной силы и демпфирования изгибающего момента:

$$(m_0 + m_*) \ddot{w} + \left[EJw'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) \right]'' + m_*U^2w'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) + Nw'' + 2m_*U\dot{w}' + \alpha \left[\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) - 3w'w''\dot{w}' \right] + \beta\dot{w} + \gamma w = 0. \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИИ

Решение $w(x,t)$ уравнений (1)–(3) ищется в виде $w(x,t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x)$, где $\{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – полная на $[0, l]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям.

Согласно методу Галеркина, получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_k(t)$. Необходимо также задать начальные условия $w(x,0) = f_1(x)$, $\dot{w}(x,0) = f_2(x)$. Согласно методу Галеркина, получим начальные условия для $w_k(t)$:

$$w_k(0) = \frac{\int_0^l f_1(x) g_k(x) dx}{\int_0^l g_k^2(x) dx},$$

$$\dot{w}_k(0) = \frac{\int_0^l f_2(x) g_k(x) dx}{\int_0^l g_k^2(x) dx}.$$

Таким образом, имеет место задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассмотрим в качестве примера шарнирное закрепление концов трубопровода. Функцию деформации будем искать в виде $w(x,t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin(\lambda_k x)$, $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$. Для всех моделей (1)–(3) получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для $w_1(t), \dots, w_n(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_m(t) + \frac{1}{M}(\alpha\lambda_m^4 + \beta)\dot{w}_m(t) + \\ + \frac{4Um_*}{Ml} \sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \xi_{mk} + \\ + \frac{1}{M}(D\lambda_m^4 - \eta\lambda_m^2 + \gamma)w_m(t) + \\ + \psi_m = 0, \end{aligned}$$

где $m = 1, \dots, n$, $M = m_0 + m_*$, $\eta = N + m_*U^2$,

$$(4) \quad \xi_{mk} = \begin{cases} \frac{\lambda_m \lambda_k (1 - (-1)^{m+k})}{\lambda_m^2 - \lambda_k^2}, & m \neq k; \\ 0, & m = k. \end{cases}$$

Слагаемые ψ_m для моделей (1)–(3) имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} \psi_m(w_1, \dots, w_n) &= w_m(t) \frac{\lambda_m^2}{M} \left[\mu \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 dx \right]; \\ \psi_m(w_1, \dots, w_n) &= \frac{1}{Ml} \int_0^l \left[3m_*U^2 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx - \\ &\quad - \frac{1}{Ml} \int_0^l \left[3D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx - \\ &\quad - \frac{2}{Ml} \int_0^l \left[9D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx - \\ &\quad - \frac{2}{Ml} \int_0^l \left[3D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx; \\ \psi_m(w_1, \dots, w_n, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n) &= \frac{1}{Ml} \int_0^l \left[\left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 \left(3m_*U^2 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) - 3\alpha \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \right) \right] \sin \lambda_m x dx + \\ &\quad + \frac{2}{Ml} \int_0^l \left[\left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(6\alpha \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 9\alpha \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) - 9\alpha \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) - 9D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \right) \right] \sin \lambda_m x dx - \\ &\quad - \frac{6\alpha}{Ml} \int_0^l \left[\left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(3 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \right) \right] \sin \lambda_m x dx. \end{aligned}$$

Для всех рассмотренных моделей слагаемые Ψ_m содержат члены порядка выше первого относительно $w_k, \dot{w}_k$. Аналогичная ситуация сохраняется и для других типов закрепления концов трубопровода. Отбросив Ψ_m , получим линеаризованную систему

$$\ddot{w}_m(t) = \sum_{k=1}^n b_{mk} \dot{w}_k(t) + a_m w_m(t), m = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\text{где } a_m = -\frac{D\lambda_m^4 - \eta\lambda_m^2 + \gamma}{M},$$

$$b_{mk} = \begin{cases} -\frac{4Um_*}{Ml} \xi_{mk}, & m \neq k, \\ -\frac{\alpha\lambda_m^4 + \beta}{M}, & m = k. \end{cases}$$

Приведем систему (5) к нормальному виду и составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -K & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -K & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -K & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} - K & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} - K & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - K \end{vmatrix} = 0$$

или

$$K^{2n} + c_1 K^{2n-1} + c_2 K^{2n-2} + \dots + c_{2n-1} K + c_{2n} = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}, c_{2n}$ выражаются через a_m, b_{mk} .

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (6) отрицательны, то невозмущенное движение неупрощенной системы (4) устойчиво асимптотически, независимо от членов $\Psi_m, m = \overline{1, n}$ выше первого порядка [18].

Составим матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись условиями Ляпуна-Шипара [19, 20], запишем условия асимптотической устойчивости для системы (4).

В случае одного приближения $w(x, t) = w_1(t) \sin(\lambda_1 x)$ необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} > 0 \\ \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} > 0 \end{cases}$$

или, учитывая неотрицательность коэффициентов демпфирования ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0$),

$$N < -m_* U^2 + \frac{D\lambda_1^4 + \gamma}{\lambda_1^2}.$$

В случае двух приближений

$w(x, t) = \sum_{k=1}^2 w(t) \sin(\lambda_k x)$ получим характеристическое уравнение: $K^4 + c_1 K^3 + c_2 K^2 + c_3 K + c_4 = 0$, где коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 выражаются через $a_m, b_{mk} (m, k = 1; 2)$. Условия Ляпуна-Шипара запишутся в виде:

$$c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0, \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Запишем эти условия, являющиеся необходимыми и достаточными, в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M} &> 0, \\ \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M} + \left(\frac{4Um_*}{Ml}\right)^2 (\xi_{12})^2 + \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} + \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} &> 0, \\ \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M} &> 0, \\ \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} &> 0, \\ \left(\frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M}\right) \left(\frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M}\right) \times \\ \times \left(\frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M} + \left(\frac{4Um_*}{Ml}\right)^2 (\xi_{12})^2 + \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} + \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M}\right) - \\ - \left(\frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M}\right)^2 \frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} - \\ - \left(\frac{D\lambda_1^4 - \eta\lambda_1^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_1^4 + \beta}{M} + \frac{D\lambda_2^4 - \eta\lambda_2^2 + \gamma}{M} \cdot \frac{\alpha\lambda_2^4 + \beta}{M}\right)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Эти условия будут выполнены, если:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0,$$

$$N < -m_* U^2 + \min_{i=1,2} \left(\frac{D\lambda_i^4 + \gamma}{\lambda_i^2} \right). \quad (7)$$

Следует заметить, что условия (7) являются достаточными, но не необходимыми.

Отметим, что получение условий асимптотической устойчивости в аналитическом виде при большем количестве приближений вызывает определенные трудности, связанные с вычислением определителей высших порядков. Поэтому можно для конкретных значений параметров сразу находить корни характеристического уравнения (6) и по их вещественным частям делать выводы об устойчивости.

Замечание: Различные нелинейные модельные уравнения, описывающие колебания трубопровода, рассматривались в [10]. В указанной работе исследование устойчивости проводилось на основе исследования функционала

$$\begin{aligned} J(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + Dw''^2 - \eta(t)w'^2 + \gamma w^2 \right) dx + \frac{1}{2} \mu \left(\int_0^l w'^2 dx \right)^2 \text{ для уравнения} \\ \tilde{M}\ddot{w} + Dw'''' + \eta(t)w'' + 2U(t)m_*\dot{w}' + \alpha_2\dot{w}''' + \beta_1\dot{w} + \beta_0w + m_*\dot{U}(t)w' - \\ - w'' \left(\mu \int_0^l w'^2(x,t) dx + v \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2(x,t) dx \right) + f_0(t,w) + f_1(t,w)\dot{w} = 0. \end{aligned}$$

Были получены следующие условия устойчивости $N(t) < \lambda D - m_* U^2(t)$, $2(\beta - \theta\alpha)(\dot{N}(t) + 2m_* U(t)\dot{U}(t)) > m_*^2 U^2(t)$. При выполнении указанных условий имеет место устойчивость функций $\dot{w}(x, t)$, $w'(x, t)$ относительно начальных значений $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $w''(x, 0)$.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проведен численный эксперимент для модели, описываемой уравнением (1).

Пример. Рассмотрим шарнирное закрепление концов трубопровода $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \lambda_k x$, где $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$. Пусть трубопровод изготовлен из полипропилена ($\rho_0 = 930$, $E = 1,3 \cdot 10^9$), рабочая среда – вода ($\rho_* = 1000$). Для значений параметров: $n = 3$, $r_0 = 0,055$, $r_* = 0,05$, $l = 2$, $\gamma = 0$, $\nu = 0$, $U = 10$, $w(x, 0) = 0$, $\dot{w}(x, 0) = 0,01 \sin(\lambda_2 x)$ (все значения приведены в системе СИ) с помощью системы Mathematica 12.0 получим графики функции деформации $w(x, t)$ в точке $x_0 = 1,2$ в зависимости от значений α , β , N .

При значениях $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$, $N = 1000$, удовлетворяющих условиям (7), получим график функции $w(x_0, t)$ (рис. 2).

При значениях $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $N = 30000$, не удовлетворяющих условиям (7), получим график функции $w(x_0, t)$ (рис. 3).

Как видно из графиков, колебания трубопровода во втором случае носят неустойчивый характер. Отметим, что графики на рисунках 2, 3 подтверждаются зна-

Рис. 2. График функции $w(x_0, t)$ при $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$, $N = 1000$

чениями корней характеристического уравнения. Для указанных в примере значений параметров и $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$, $N = 1000$ корни характеристического уравнения равны: $K = -2,622 - 171,375i$, $K = -2,622 + 171,375i$, $K = -0,188 - 37,755i$, $K = -0,188 + 37,755i$. Все вещественные части отрицательны, следовательно, можно говорить об асимптотической устойчивости, что наблюдаем на рисунке 2.

При $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $N = 30000$ корни характеристического уравнения равны: $K = -73,893$; $K = -42,992$; $K = 73,893$; $K = 42,992$. Среди корней характеристического уравнения имеются корни с положительными вещественными частями, следовательно, решение неустойчиво, что подтверждается рисунке 3.

Рис. 3. График функции $w(x_0, t)$ при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $N = 30000$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим плоскую задачу о динамике пластины (рис. 4), занимающей положение $0 < x < l$. Пластина обтекается потоком газа со скоростью V_0 ($V_0 > a_0$), где a_0 – скорость звука.

Рис. 4. Пластина, обтекаемая потоком газа

1) Уравнение динамики упругой пластины имеет вид:

$$M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}''' + \beta\dot{w} + \gamma w - w'' \left(\mu \int_0^l w'^2(x, t) dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2(x, t) dx \right) + \alpha_0 \rho a_0 (\dot{w} + V_0 w') = 0. \quad (8)$$

Здесь ρ – плотность газа, $\alpha_0 = \text{const} > 0$ ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании).

2) Модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента:

$$M\ddot{w} + \left[Dw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + Nw'' + \alpha\dot{w}''' + \beta\dot{w} + \gamma w + \alpha_0 \rho a_0 (\dot{w} + V_0 w') = 0. \quad (9)$$

3) Модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента и демпфирования изгибающего момента:

$$M\ddot{w} + \left[Dw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + Nw'' + \alpha \left(\dot{w}'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3w'w''\dot{w}' \right)' + \beta\dot{w} + \gamma w + \alpha_0 \rho a_0 (\dot{w} + V_0 w') = 0. \quad (10)$$

В случае шарнирного закрепления концов упругого элемента функцию деформации будем искать в виде $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin(\lambda_k x)$, $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$. Согласно методу Галеркина, для моделей (8)–(10) получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_1(t), \dots, w_n(t)$:

$$\ddot{w}_m(t) + \frac{1}{M} (\alpha \lambda_m^4 + \beta + \alpha_0 \rho a_0) \dot{w}_m(t) + \frac{2\alpha_0 \rho a_0 V_0}{Ml} \sum_{k=1}^n w_k(t) \xi_{mk} + \frac{1}{M} (D \lambda_m^4 - N \lambda_m^2 + \gamma) w_m(t) + \psi_m = 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$\text{где } \xi_{mk} = \begin{cases} \frac{\lambda_m \lambda_k (1 - (-1)^{m+k})}{\lambda_m^2 - \lambda_k^2}, & m \neq k, \\ 0, & m = k. \end{cases}$$

Слагаемые ψ_m для моделей (8)–(10) имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} \psi_m(w_1, \dots, w_n) = & w_m(t) \frac{\lambda_m^2}{M} \left[\mu \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 dx \right]; \\ \psi_m(w_1, \dots, w_n) = & -\frac{3D}{Ml} \int_0^l \left[\left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx - \\ & -\frac{6D}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right)^3 \sin \lambda_m x dx - \\ & -\frac{18D}{Ml} \int_0^l \left[\left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \right] \sin \lambda_m x dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_m(w_1, \dots, w_n, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n) = & \\
 = & -\frac{3}{Ml} \int_0^l \left[D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) + \alpha \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \right] \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right)^2 \sin \lambda_m x dx - \\
 & -\frac{18}{Ml} \int_0^l \left[D \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) + \alpha \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \right] \times \\
 & \times \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \sin \lambda_m x dx + \\
 & + \frac{6D}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right)^3 \sin \lambda_m x dx - \\
 & - \frac{18\alpha}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \sin \lambda_m x dx + \\
 & + \frac{18\alpha}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right)^2 \sin \lambda_m x dx - \\
 & - \frac{18\alpha}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^3 \cos \lambda_k x \right) \sin \lambda_m x dx - \\
 & - \frac{6\alpha}{Ml} \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k^4 \sin \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \left(\sum_{k=1}^n \dot{w}_k(t) \lambda_k \cos \lambda_k x \right) \sin \lambda_m x dx.
 \end{aligned}$$

Отбросив Ψ_m , получим линеаризованную систему

$$\dot{w}_m(t) = \sum_{k=1}^n b_{mk} w_k(t) + a_m \dot{w}_m(t),$$

$$m = 1, \dots, n,$$

$$\text{где } a_m = -\frac{\alpha \lambda_m^4 + \beta + \alpha_0 \rho a_0}{M},$$

$$b_{mk} = \begin{cases} -\frac{2\alpha_0 \rho a_0 V_0}{Ml} \xi_{mk}, & m \neq k, \\ -\frac{D \lambda_m^4 - N \lambda_m^2 + \gamma}{M}, & m = k. \end{cases} \quad (12)$$

Приведем линеаризованную систему к нормальному виду и составим характеристическое уравнение: $K^{2n} + c_1 K^{2n-1} + c_2 K^{2n-2} + \dots + c_{2n-1} K + c_{2n} = 0$, где коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}, c_{2n}$ выражаются через a_m, b_{mk} . Составляя матрицу Гурвица и пользуясь условиями Ляпуна-Шипара, получим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости для системы (11). Например, в случае двух приближений

$(w(x, t) = \sum_{k=1}^2 w_k(t) \sin(\lambda_k x))$ получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 > 0, \\ a_1 a_2 - b_{11} - b_{22} > 0, \\ a_1 b_{22} + a_2 b_{11} > 0, \\ b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} > 0, \\ (-a_1 - a_2)(a_1 a_2 - b_{11} - b_{22})(a_1 b_{22} + a_2 b_{11}) - (-a_1 - a_2)^2 (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) - (a_1 b_{22} + a_2 b_{11})^2 > 0, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ находятся по формулам (12).

Проанализируем полученные неравенства. Первые четыре условия будут выполнены, если предположить $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $N < \min_{i=1,2} \left(\frac{D\lambda_i^4 + \gamma}{\lambda_i^2} \right)$. Таким образом, получаем достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned} & \alpha \geq 0, \beta \geq 0, N < \min_{i=1,2} \left(\frac{D\lambda_i^4 + \gamma}{\lambda_i^2} \right), \\ & \left(\alpha(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) + 2\beta + 2\alpha_0\rho a_0 \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{M} (\alpha\lambda_1^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) (\alpha\lambda_2^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) + D(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) - N(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2\gamma \right) \times \\ & \times \left((\alpha\lambda_1^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) (D\lambda_2^4 - N\lambda_2^2 + \gamma) + (\alpha\lambda_2^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) (D\lambda_1^4 - N\lambda_1^2 + \gamma) \right) > \\ & > \left(\alpha(\lambda_1^4 + \lambda_2^4) + 2\beta + 2\alpha_0\rho a_0 \right)^2 \left[(D\lambda_2^4 - N\lambda_2^2 + \gamma) (D\lambda_1^4 - N\lambda_1^2 + \gamma) + \left(\frac{2\alpha_0\rho a_0 V_0}{l} \right)^2 \left(\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^2 \right] + \\ & + \left((\alpha\lambda_1^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) (D\lambda_2^4 - N\lambda_2^2 + \gamma) + (\alpha\lambda_2^4 + \beta + \alpha_0\rho a_0) (D\lambda_1^4 - N\lambda_1^2 + \gamma) \right)^2. \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим модель (8). Пусть пластина изготовлена из алюминия ($\rho_0 = 2700$, $\nu_* = 0,34$ – коэффициент Пуассона, $E = 2700$), плотность газа ($\rho_* = 1,3$). При значениях параметров: $l = 0,5$, $h = 0,001$ (толщина пластины), $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$, $N = 10000$, $a_0 = 340$, $\alpha_0 = 1$, $\gamma = 0$, $\nu = 0$, $V = 500$, $D = 6,596$, $M = 2,7$, $w(x, 0) = 0,001 \sin(\lambda_2 x)$, $\dot{w}(x, 0) = 0,1 \sin(\lambda_2 x)$ (все значения приведены в системе СИ) с помощью системы Mathematica 12.0 получим график функции деформации $w(x, t)$ в точке $x_0 = 0,2$.

Как видно из графика на рисунке 5, колебания пластины имеют неустойчивый характер. Для указанных в примере значений параметров условия устойчивости (13) не выполняются. Отметим, что неустойчивость подтверждается значениями корней характеристического уравнения. Для указанных в примере значений параметров корни характеристического уравнения равны: $K = -8986,81 - 7381,53i$, $K = -8986,81 + 7381,53i$,

$K = 6407,44 - 7438,13i$, $K = 6407,44 + 7438,13i$. Среди корней характеристического уравнения имеются корни с положительными вещественными частями, следовательно, решение неустойчиво.

Для указанных в примере значений параметров увеличим толщину пластины $h = 0,025$. Получим график функции деформации $w(x, t)$ в точке $x_0 = 0,2$ (рис. 6).

Отметим, что в этом случае условия устойчивости (13) выполняются. Корни характеристического уравнения равны: $K = -96,37 - 6119,39i$, $K = -96,37 + 6119,39i$, $K = -6,80 - 1722,84i$, $K = -6,80 + 1722,84i$. Все вещественные части отрицательны, следовательно, можно говорить об асимптотической устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется устойчивость по Ляпунову дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих колебания полого стержня (трубопро-

Рис. 5. График функции $w(x_0, t)$

Рис. 6. График функции $w(x_0, t)$

вода) и пластины с учетом взаимодействия с потоком жидкости или газа. Исследование осуществлялось на основе метода Галеркина (Крылова-Канторовича), при реализации которого деформация $w(x, t)$ отыскивается в виде $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x)$. Для каждого из рассматриваемых модельных уравнений получены нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t)$, структуры которых таковы, что позволяют делать вывод об устойчивости и неустойчивости указанных систем по линейному приближению. Получены приближенные условия устойчивости трубопровода и пластины.

Предложенный в статье приближенный метод может быть использован для исследования динамической устойчивости широкого класса механических, в том числе аэроупругих, а также других динамических систем. В частности, он может быть применен для изучения устойчивости по Ляпунову объектов, динамика которых описывается дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными вида $L + M = 0$, где L – линейный интегро-дифференциальный оператор второго порядка по переменной t , а M – нелинейный интегро-дифференциальный оператор, имеющий первый порядок по t . При этом оператор M представляет собой полином порядка выше первого по переменным w , $\dot{w}$ и по всем частным производным по переменной $x(w', w'', \dots, w^{(p)})$. При использовании метода Галеркина оператор M заменяется выражениями $\Psi_m(w_1, \dots, w_n, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n)$, $m = 1, \dots, n$, имеющими вид полиномов по переменным $w_k, \dot{w}_k$ степени выше первой. Результаты, представленные в статье, справедливы, в частности, для простейших обобщений, рассмотренных в данной статье уравнений, полученных заменой нулевых правых частей уравнений (1)–(3), (8)–(10) функцией $f(w, \dot{w})$, имеющей вид полинома степени выше первой по переменным $w, \dot{w}$. Предложенная методика исследования устойчивости по линейному приближению может быть использована также для аэроупругих систем, динамика которых описывается двумя уравнениями – для продольной $u(x, t)$ и поперечной $w(x, t)$ деформаций [8, 10, 11].

Приведенные рассуждения позволяют также сделать вывод о том, что при изучении устойчивости решений уравнений с частными производными вида $L + M = 0$, с указанными выше свойствами для L и M , достаточно изучить устойчивость решений линейного уравнения $L = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. 2014. V. 7, no. 6. pp. 1133–1148.
2. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. V. 14. pp. 2986–2993.
3. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // Journal of Fluids and Structures. 2015. V. 55. pp. 204–217.
4. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Yu.V. Stability of solutions of initial-boundary value problems in aerohydroelasticity // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2048, is. 1. pp. 040011-1–040011-10.
5. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 174–184.
6. Вельмисов П.А., Корнеев А.В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2015. № 1 (39). С. 63–73.
7. Вельмисов П.А., Логинов Б.В., Милушева С.Д. Исследование устойчивости трубопровода // Приложение на математиката в техниката: сб. доклады и научни съобщения. XXI национална школа. България, Варна, 1995. С. 299–304.
8. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэроупругих систем. Ульяновск : УлГТУ, 2018. 152 с.
9. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование системы «трубопровод – датчик давления» // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С. 85–93.
10. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Мизхер У.Д. Математическое моделирование нелинейной динамики трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2019. № 3 (57). С. 93–101.
11. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Mizher U.J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline - pressure sensor” // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2172. pp. 030006-1–030006-12.
12. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “Pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1353, 012085, № 1. pp. 1–6.
13. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. : Физматгиз, 1961. 339 с.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости : учеб. пособие для вузов. 2-е изд. М. : МГУ: ЧеРо, 1998. 480 с.
15. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959.
16. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 525 с.
17. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М. : Гостехиздат, 1955. 207 с.
18. Бабаков И.М. Теория колебаний. М. : Наука, 1968. 560 с.

19. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. : Интеграл-Пресс, 1998. 208 с.

20. Постников М.М. Устойчивые многочлены. М. : Наука, 1981. 176 с.

REFERENCES

1. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid Structure Interaction Problem with Changing Thickness Beam and Slightly Compressible Fluid. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S.*, 2014, vol. 7, no. 6, pp. 1133–1148.

2. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 2986–2993.

3. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and Stability of a Flexible Pinned-free Cylinder in Axial Flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2015, vol. 55, pp.204–217.

4. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Iu.V. Stability of Solutions of Initial-Boundary Value Problems in Aerohydroelasticity. *AIP Conference Proceedings*. 2018, vol. 2048, iss. 1, pp. 040011-1–040011-10.

5. Bolotin V.V., Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. Ustoichivosti uchastka truboprovoda s uprugoi oporoi [Stability of a Pipeline Section with an Elastic Support]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids. Proc. of the Russian Academy of Sciences], 2009, no. 1, pp. 174–184.

6. Velmisov P.A., Korneev A.V. Matematicheskoe modelirovanie v zadache o dinamicheskoi ustoichivosti truboprovoda [Mathematical Modeling in the Problem of Dynamic Stability of the Pipeline]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 1 (39), pp. 63–73.

7. Velmisov P.A., Loginov B.V., Milusheva S.D. Issledovanie ustoichivosti truboprovoda [Analysis of the Pipeline Stability]. *Prilozhenie na matematikata v tekhnika: Sb. dokladi i nauchni sobshcheniia. XXI natsionalnaia shkola* [Proc. of the 21th National School on Applied Mathematics and Engineering]. Bulgaria, Varna, 1995, pp. 299–304.

8. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V. Issledovanie dinamiki deformiruemykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh system [The Study of Dynamics of Deformable Elements of Some Aerohydroelastic Systems]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2018. 152 p.

9. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V. Matematicheskoe modelirovanie sistemy “truboprovod - datchik davleniia” [Mathematical Modeling of the “pipeline - pressure sensor” System]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle-Volga Mathematical Society Journal], 2010, vol. 12, no. 4, pp. 85–93.

10. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V., Mizkher U.D. Matematicheskoe modelirovanie nelineinoi dinamiki truboprovoda [Mathematical Modeling of Nonlinear Dynamics of the Pipeline]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2019, no. 3 (57), pp. 93–101.

11. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V., Mizher U.J. Mathematical Modeling of the Mechanical System “pipeline – pressure sensor”. *AIP Conference Proceedings*. 2019, vol. 2172, pp. 030006-1–030006-12.

12. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V. Mathematical Modelling of the “Pipeline – Pressure Sensor” System. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, vol. 1353, 012085, no. 1, pp. 1–6.

13. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoichivosti* [Nonconservative Problems of the Elastic Stability Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 339 p.

14. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti*. Uchebnoe posobie dlia vuzov. 2-e izd. [Lectures on the Mathematical Theory of Stability. Study Guide for Higher Education. 2nd edition]. Moscow, MSU CheRo Publ., 1998. 480 p.

15. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniia* [Some Problems of the Theory of Dynamical Stability]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959.

16. Malkin I.G. *Teoriia ustoichivosti dvizheniia* [Motion-Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 525 p.

17. Chetaev N.G. *Ustoichivost dvizheniia* [Motion Stability]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955. 207 p.

18. Babakov I.M. *Teoriia kolebanii* [Vibration Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 560 p.

19. Filippov A.F. *Sbornik zadach po differentsialnym uravneniiam* [Differential Equations Manual]. Moscow, Integral-Press, 1998. 208 p.

20. Postnikov M.M. *Ustoichivye mnogochleny* [Stable Polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 176 p.