УДК 53.082.2+532.57

О.В. Жиляев, В.Н. Ковальногов

АНАЛИЗ НОВОГО СПОСОБА СИЛОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ МАССОВОГО РАСХОДА И ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ¹

Жиляев Олег Валентинович, аспирант кафедры «Тепловая и топливная энергетика» Ульяновского государственного технического университета. Окончил факультет «Специальное машиностроение» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Преподаватель Казанского научно-исследовательского технологического университета. Имеет статьи и изобретения в области измерения и учёта жидкости. [e-mail: oleg_zhilyaev@rambler.ru].

Ковальногов Владислав Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Тепловая и топливная энергетика» УлГТУ. Окончил Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина. Имеет статьи, монографии, изобретения и научные работы в области математического моделирования, исследования и оптимизации тепловых и гидрогазодинамических процессов в приложениях к проблемам создания энергетического оборудования и теплотехники, транспортно-энергетической и энергомашиностроения. [e-mail: kvn@ulstu.ru].

Аннотация

В статье приводится предварительный анализ нового физического способа измерения массового расхода и плотности жидкости, открытого ранее другими авторами. Необходимость исследования и разработки нового способа обусловлена его преимуществами в сравнении с существующими системами измерения массового расхода – в первую очередь, с расходомером Кориолиса. Рассматриваемый новый физический способ основан на измерении переменного перепада давления, возникающего по длине потока жидкости при гармонических колебаниях площади сечения трубопровода, имеющего гибкие стенки. Показано, что данный физический способ предоставляет возможность одновременного измерения массового расхода и плотности жидкости. Построена математическая модель процесса нестационарного течения жидкости. Задача о нестационарном течении жидкости поставлена и решена в одномерной постановке. Проведён детальный вывод формул математической модели. Указаны неточности формул, допущенные авторами этого способа. Ограничения в применимости способа, сделанные его авторами, также значительно ослаблены. Выполнены теоретическая проверка и подтверждение выводов о применимости указанного нового способа.

Ключевые слова: жидкость, плотность, массовый расход, трубопровод, колебания, измерение.

doi: 10.35752/1991-2927-2020-3-61-21-30

THE ANALYSIS OF A NEW PHYSICAL METHOD FOR MEASURING THE FLUID MASS FLOW RATE AND DENSITY

Oleg Valentinovich Zhiliaev, Postgraduate Student at the Department of Heat and Fuel Energetics of Ulyanovsk State Technical University; graduated from the Faculty of Special Machine Building of Bauman Moscow State Technical University; Lecturer at Kazan National Research Technological University; an author of articles and inventions in the field of liquid's measuring. e-mail: oleg_zhilyaev@rambler.ru.

Vladislav Nickolaevich Kovalnogov, Doctor of Sciences in Engineering, Professor, Head of Department of Heat and Fuel Energetics of Ulyanovsk State Technical University; graduated from Ulyanov-Lenin Kazan State University; an author of articles, monographs, inventions in the field of mathematical modeling, research and optimization of heat, gas and hydrodynamic processes in applications to the problems of creation of energy equipment, heat equipment, transport energetic and energy machines. e-mail: kvn@ulstu.ru.

Abstract

This paper gives the preliminary analysis of a new physical method of measuring the fluid's mass flow rate and density which has been discovered by other authors. The need for exploration and development of the method is defined by its advantages

¹ Часть из представленных результатов получена при поддержке грантом Президента Российской Федерации в рамках проекта НШ-2493.2020.8.

in comparison with other currently existing systems for mass flow rate measuring such as Coriolis flowmeter. The new physical method under consideration is based on measuring the alternating pressure difference which would occur along the flow due to harmonic oscillations of the cross-section area of the pipeline which has flexible walls. It is shown that the new physical method gives the opportunity of simultaneous measurement of mass flow rate and liquid's density. A mathematical model of the process of non-stationary flow of a liquid is built. The problem of non-stationary flow of a liquid is considered and solved as to be one-dimensioned one. The detailed and thorough derivation of the formulae of the mathematical model is performed. Some inaccuracies in formulae permitted by authors of the method are indicated at. The limitations in applicability of the method which had been indicated at by its authors are also essentially weakened. The theoretical examination and approval of conclusions about the applicability of the new method are made.

Key words: liquid, density, mass flow rate, pipeline, oscillations, measuring.

ВВЕДЕНИЕ

В современной промышленности, коммунальном хозяйстве, торговле и транспорте существует большая потребность в измерении расхода и количества различных жидких и газообразных сред. Для удовлетворения этой потребности создан широкий спектр измерительной техники, предназначенной специально для измерения расхода – расходомеры и счётчики количества веществ [1]. Для решения различных измерительных задач в тех или иных отраслях применяются расходомеры, весьма сильно отличающиеся по принципу действия, набору измеряемых параметров, эксплуатационным свойствам [1 – 3]. В настоящее время большой интерес в промышленности проявляется к средствам измерения массового расхода жидкости, поскольку именно масса вещества является характеристикой, наиболее объективно характеризующей его количество, вследствие того, что она не зависит от давления и температуры среды. В частности, в нефтедобыче для учёта добываемой продукции, для управления технологическими процессами большое применение находят расходомеры, выходным параметром которых является массовый расход жидкости [4].

Поэтому рассмотрим существующие сегодня инструменты для измерения массового расхода [5]. В первую очередь, широко представлен на рынке средств измерения и востребован прибор, называемый расходомером Кориолиса [6]. Схема расходомера Кориолиса представлена на рисунке 1 (изображение заимствовано из [6]).

Данный измерительный инструмент относится к классу силовых расходомеров. Это значит, что для преобразования массового расхода жидкости в нём используется измерение силы инерции. Принцип действия состоит в возбуждении вынужденных поперечных колебаний трубок, по которым движется поток жидкости. В результате поперечного движения, на каждую частицу жидкости действует сила инерции Кориолиса, приводящая к появлению фазового сдвига в колебаниях трубок, пропорционального массовому расходу жидкости. Расходомер даёт возможность одновременного измерения массового расхода и плотности жидкости. Также получаем исключение зависимости от вязкости, увеличение точности измерений и надёжности прибора.

Рис. 1. Схема расходомера Кориолиса

На сегодняшний день расходомер Кориолиса является самым современным и технически совершенным средством измерения массового расхода жидкости. Однако и он обладает некоторыми техническими и физическими недостатками, сдерживающими его применение либо приводящими к увеличению издержек в эксплуатации. В частности, проточная часть канала расходомера имеет небольшой диаметр ([3]), что обусловлено принципом действия, основанным на изгибных колебаниях канала. Как следствие, имеем повышенное гидравлическое сопротивление расходомера при движении через него жидкости, приводящее, в свою очередь, к увеличению затрат эксплуатирующей организации, особенно в случае измерения больших расходов ([3]). Кроме того, с увеличением диаметра условного прохода существенно растёт стоимость расходомера. Отсюда следует, что существует потребность в таком средстве измерения, которое было бы свободно от указанных недостатков.

ОПИСАНИЕ НОВОГО ФИЗИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА

В данной статье предлагается к рассмотрению анализ нового физического принципа, который даёт возможность преодолеть указанные недостатки и построить расходомер с улучшенными свойствами, а именно

способ измерения расхода и плотности жидкости на основе измерения продольных сил инерции.

Указанный физический принцип впервые опубликован в [7]. Приведём некоторые тезисы из этой статьи. Имеем прямой трубопровод, по которому движется несжимаемая жидкость. Пусть этот трубопровод обладает гибкими стенками, способными расширяться и сужаться в результате внешнего силового воздействия (рис. 2, 3, изображения заимствованы в [7]).

Рис. 2. Течение идеальной несжимаемой жидкости в канале переменного сечения

Рис. 3. Чередующиеся фазы воздействия на жидкость в трубе

Приводится анализ гидродинамического воздействия на жидкость, движущуюся по трубопроводу с изменяющейся площадью проходного сечения. Делается вывод о связи перепада давления вдоль канала трубопровода с массовым расходом жидкости и её плотностью. На основе указанной связи делается предположение о возможности полезного использования открытого эффекта в области измерения расходов жидкости. Статья указывает на возможность построения расходомера, использующего описанный физический эффект. Данный расходомер может быть отнесён к классу силовых расходомеров, поскольку в его основе лежит преобразование сил инерции жидкости. В отличие от расходо-

мера Кориолиса, здесь силы инерции имеют продольное направление вдоль оси трубопровода.

Однако в статье [7] имеются погрешности в формулах и в итоговых результатах, полученных на их основе. Не приведён вывод формул, что затрудняет проведение последующего анализа. Поэтому считаем необходимым воспроизвести вслед за авторами вывод формул статьи [7] и провести их более тщательный анализ. Исходные варианты формул будем указывать соответствующими номерами, а заново воспроизведённые варианты – аналогичным номером со штрихом.

Вывод и проверка основных зависимостей описываемого принципа

1. Сначала выведем уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где S – площадь поперечного сечения трубопровода, v – скорость жидкости вдоль оси трубопровода, t – время, x – координата вдоль оси трубопровода.

Вывод этого уравнения следующий. Принимаем, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а её движение – нестационарным. Рассмотрим участок трубопровода переменного сечения как по длине, так и по времени (рис. 4). Массовый и объёмный расход жидкости на входе в данный участок считаем постоянным.

Рис. 4. Участок трубопровода переменного сечения: dx – длина участка, S – площадь входного сечения, $S + dS$ – площадь выходного сечения, Q_{in} – входной объёмный расход, Q_{out} – выходной объёмный расход

Входной расход равен:

$$Q_{in}(t) = Sv.$$

Выходной расход получаем, отбрасывая члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned} Q_{out}(t) &= (S + dS)(v + dv) = \\ &= Sv + Sdv + vdS + dv \cdot dS = \\ &= Sv + Sdv + vdS = Sv + d(Sv). \end{aligned}$$

Определим изменение объёма участка за время dt . Для этого найдём сначала выражение объёма усечённого конуса с основаниями S и $S + dS$ и высотой dx .

Рассмотрим конические объёмы на рисунке 5.

Рис. 5. К определению объёма элементарного конического участка

Будем отсчитывать начало координат x от вершины конуса. Объём конуса, имеющего высоту x и площадь основания S , равен

$$V = \frac{1}{3} S \cdot x.$$

Объём конуса, имеющего высоту $x + dx$ и площадь основания $S + dS$, равен

$$\begin{aligned} V + dV &= \frac{1}{3} \cdot (S + dS) \cdot (x + dx) = \\ &= \frac{1}{3} S \cdot x + \frac{1}{3} dS \cdot x + \frac{1}{3} S \cdot dx + \frac{1}{3} dS \cdot dx. \end{aligned}$$

Исключая члены второго порядка малости, находим объём усечённого конуса dV как разность объёмов $V + dV$ и V :

$$dV = V + dV - V = \frac{1}{3} dS \cdot x + \frac{1}{3} S \cdot dx.$$

Для нахождения дифференциала dS запишем площадь S как функцию x :

$$S = k \cdot x^2,$$

где k – безразмерный параметр конуса, зависящий от его угла раствора.

Тогда

$$dS = 2kx \cdot dx.$$

Подставляя выражение для дифференциала dS в формулу для dV , получаем

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{3} dS \cdot x + \frac{1}{3} S \cdot dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2kx \cdot dx \cdot x + \frac{1}{3} S \cdot dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} kx^2 dx + \frac{1}{3} S \cdot dx = \\ &= \frac{2}{3} S \cdot dx + \frac{1}{3} S \cdot dx = S \cdot dx. \end{aligned}$$

Возвращаемся к рисунку 4. Далее величину элементарного объёма усечённого конуса будем обозначать через V , поскольку в качестве dV будем рассматривать изменение объёма V с течением времени.

В момент времени t объём участка равен

$$V = S \cdot dx.$$

В момент времени $t + dt$, соответственно, имеем

$$V + dV = \left(S + \frac{\partial S}{\partial t} dt \right) \cdot dx.$$

Приращение объёма dV на интервале времени dt равно

$$dV = (V + dV) - V = \frac{\partial S}{\partial t} \cdot dt \cdot dx.$$

Запишем уравнение баланса объёма

$$(Q_{in} - Q_{out}) \cdot dt = dV.$$

$$\left[Sv - (Sv + d(Sv)) \right] \cdot dt = \frac{\partial S}{\partial t} \cdot dt \cdot dx.$$

$$-d(Sv) = \frac{\partial S}{\partial t} \cdot dx; -\frac{\partial(Sv)}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0. \quad (1')$$

Уравнение (1) подтверждается. В частности, из уравнений (1) и (1') видно, что при стационарном режиме ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$) получаем

$$\frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0; v \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial v}{\partial x} = 0; S \frac{\partial v}{\partial x} = -v \frac{\partial S}{\partial x},$$

то есть в стационарном режиме имеем снижение скорости ($\frac{\partial v}{\partial x} < 0$) при увеличении площади сечения

($\frac{\partial S}{\partial x} > 0$), и наоборот.

2. Находим скорость жидкости вдоль оси трубопровода $v = f(x, t)$.

Скорость находим из уравнения неразрывности в форме (1) или (1').

$$\frac{\partial(Sv)}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t}; Sv = -\int \frac{\partial S}{\partial t} dx + C.$$

$$\text{Получаем } v = \frac{C}{S} - \frac{1}{S} \int \frac{\partial S}{\partial t} dx.$$

Подставляем начальное условие:

при $x = x_0$, $S = S_0$, $v = \frac{Q_V}{S_0}$,

где x_0 и S_0 – соответственно, координата начала участка и площадь сечения в начале участка, Q_V – объёмный расход через сечение с координатой x_0 .

Тогда $v(x_0, t) = \frac{C}{S_0} - \frac{1}{S_0} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx = \frac{Q_V}{S_0}$, откуда

получаем $C = Q_V$.

Следовательно,

$$v(x, t) = \frac{Q_V}{S} - \frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx. \quad (2')$$

Сопоставляем формулу (2') с формулой (2) в статье [7]:

$$V = \frac{1}{S} \left(C(t) - \int \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) = \frac{1}{S} \left(\frac{Q_0}{\rho} - \int \frac{\partial S}{\partial t} dx \right). \quad (2)$$

Видим тождественное совпадение формул (2) и (2'), с учётом $Q_V = \frac{Q_0}{\rho}$, где Q_0 – массовый расход жидкости, ρ – её плотность, V – обозначение скорости жидкости в [7].

Можно сделать проверку путём нахождения объёмного расхода Sv и подстановки его в уравнение (1'):

$$Sv(x, t) = Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx;$$

$$\frac{\partial(Sv)}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Пришли к тождественному соблюдению уравнения (1'). Следовательно, уравнение (2) также подтверждается.

3. Теперь подставим полученное уравнение (2) в уравнение Эйлера [8]:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Находим производные от скорости по времени и координате как производные сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = \\ &= -\frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx - \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial x} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) + \frac{1}{S} \left(-\frac{\partial S}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения для производных от скорости в уравнение Эйлера.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx - \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) + \frac{1}{S} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) \left[-\frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial x} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) - \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = \\ &= -\frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx - \frac{Q_V}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx + \frac{1}{S} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) \left[-\frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial x} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) - \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = \\ &= -\frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx - \frac{Q_V}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \frac{Q_V^2}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} + \\ &+ \frac{Q_V}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \frac{Q_V}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{Q_V}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2 + \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx = \\ &= -\frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx - 2 \frac{Q_V}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \frac{Q_V^2}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} + 2 \frac{Q_V}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2. \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx + 2 \frac{Q_V}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx + \frac{Q_V^2}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} - 2 \frac{Q_V}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx + \frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Группируем 4-й, 5-й и 6-й члены как квадрат разности, а во 2-м и 3-м выносим за скобку комплекс $\frac{2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \frac{1}{S} \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx + \\ & + \frac{2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) + \\ & + \frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (3')$$

Таким образом, получено уравнение (3) рассматриваемой статьи, с учётом замены массового расхода Q_0 на объёмный $Q_V = \frac{Q_0}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \frac{1}{S^3} \left(\frac{Q_0}{\rho} - \int \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2 + \\ & + \frac{2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\frac{Q_0}{\rho} - \int \frac{\partial S}{\partial t} dx \right) + \frac{1}{S} \int \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Видим несовпадение формул (3) и (3'). В тексте статьи [7] в уравнении (3) допущена ошибка: в слагаемом

$$\frac{1}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x} \left(Q_V - \int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx \right)^2$$

в статье отсутствует сомножитель $\frac{\partial S}{\partial t}$, то есть производная площади сечения по координате x . Тот факт, что она должна быть, легко проверяется путём проверки работы формулы (3) в случае стационарного потока, то есть при подстановке $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Посмотрим, чему будет равен искомый градиент давления при жёстком трубопроводе, не изменяющемся во времени. Так, при подстановке в формулу (3) $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$

имеем $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Q_V^2}{S^3}$ независимо от поведения S вдоль оси x , то есть от того, уменьшается площадь, увеличивается или остаётся неизменной. Очевидно, что это не так. При подстановке в правильный вариант (3') этой формулы имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Q_V^2}{S^3} \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Здесь уже видим, что изменение давления соответствует уравнению Бернулли, то есть растёт при увеличении площади и наоборот.

4. Определяем перепад давления по длине трубы. Рассмотрим случай изменения сечения трубы по следующему закону:

$$S = \begin{cases} S_0 + a_0 \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin \omega t = S_0 \left(1 + \delta \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin \omega t\right), & \text{при } -L \leq x \leq L, \\ S_0, & \text{при } x < -L \text{ или } x > L. \end{cases} \quad (4')$$

Величина $\delta = \frac{a_0}{S_0}$ – относительное изменение площади.

Данный закон изменения площади заимствован в [7], формула (4):

$$S = \begin{cases} S_0 + G(t, x) = S_0 + a_0 \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin(\omega t) = S_0 \left(1 + \delta \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin(\omega t)\right), & \text{при } -L \leq x \leq L, \\ S_0, & \text{при } x < -L \text{ или } x > L. \end{cases} \quad (4)$$

Формула (4) из [7] приведена с учётом исправления опечатки $L < x$ (в источнике указано $L > x$).

Примем $x_0 = -L$.

Находим производные, подставляем в уравнение (3').

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S_0 \delta \omega \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \cos \omega t;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -S_0 \delta \omega^2 \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin \omega t;$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = S_0 \delta \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) \sin \omega t;$$

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial S}{\partial t} dx = \int_{-L}^x S_0 \delta \omega \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \cos \omega t dx =$$

$$= S_0 \delta \omega \cos \omega t \int_{-L}^x \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= -S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \cos \frac{x\pi}{L} \Big|_{-L}^{\pi} = \\
 &= -S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\cos \frac{x\pi}{L} - \cos \frac{-L\pi}{L} \right] = \\
 &= -S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\cos \frac{x\pi}{L} - \cos(-\pi) \right] = \\
 &= -S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[1 + \cos \frac{x\pi}{L} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx &= -S_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \int_{-L}^x \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) dx = \\
 &= S_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \Big|_{-L}^x = \\
 &= S_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) - \cos \left(\frac{-L\pi}{L} \right) \right] = \\
 &= S_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Найдем градиент давления по формуле (3'):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{S} \left[S_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left(1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right) \right] + \\
 &+ \frac{2}{S^2} S_0 \delta \omega \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \cos \omega t \left(Q_V + S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left(1 + \cos \frac{x\pi}{L} \right) \right) + \\
 &+ \frac{1}{S^3} S_0 \delta \frac{\pi}{L} \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \left(Q_V + S_0 \delta \omega \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left(1 + \cos \frac{x\pi}{L} \right) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Подставляем $S = S_0 \left(1 + \delta \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \right)$. Получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\delta \omega^2 \frac{L}{\pi} \sin \omega t \left(1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right)}{1 + \delta \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t} + \\
 &+ \frac{2 \delta \omega \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \cos \omega t \left(Q_V + S_0 \delta \omega \frac{L}{\pi} \cos \omega t \left(1 + \cos \frac{x\pi}{L} \right) \right)}{S_0 \left(1 + \delta \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \right)^2} + \\
 &+ \frac{\delta \pi \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \left(Q_V + S_0 \delta \omega \frac{L}{\pi} \cos \omega t \left(1 + \cos \frac{x\pi}{L} \right) \right)^2}{L S_0^2 \left(1 + \delta \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \right)^3}.
 \end{aligned}$$

Напрямую с этой формулой работать сложно, поскольку она нелинейна относительно тригонометрических функций, поэтому проведём её линеаризацию.

Введём следующие два допущения:

1) $\delta \ll 1$, например $\delta = 0,01$ и менее. Благодаря этому допущению мы отбрасываем знаменатели

$\left(1 + \delta \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t \right)$ в первой, второй и третьей степенях и заменяем их единицами.

2) $Q_V \gg S_0 \delta \omega \frac{L}{\pi}$, или $Q_m \gg \rho S_0 \delta \omega \frac{L}{\pi}$, или, как записано у авторов,

$$\frac{Q_0 \pi}{\rho S_0 \omega L} > 1.$$

где $Q_0 = Q_m$ – массовый расход. Это допущение позволяет нам линеаризовать числители. Отсюда видно, что снижение частоты колебаний ω способствует лучшему качеству линеаризации описания процесса вследствие уменьшения нелинейных искажений.

Видим здесь у авторов две неточности. Во-первых, у них простое неравенство $\frac{Q_m \pi}{\rho S_0 \omega L} > 1$, в то время как для линеаризации необходимо требование пренебрежимой малости. Во-вторых, они потеряли коэффициент δ в знаменателе, в связи с чем у них получилось очень сильное ограничение по расходу снизу. В действительности указанное ограничение намного слабее. Например, проведём расчёт минимального расхода для следующих условий, как указано в статье [7]:

$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $S_0 = 78,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ($\varnothing 100 \text{ мм}$), $\delta = 0,005$, $\omega = 60 \text{ Гц} \cdot 2\pi = 376,8 \text{ рад/с}$, $L = 0,3 \text{ м}$

получаем

$$\frac{Q_m \cdot \pi}{1000 \cdot 78,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,005 \cdot 376,8 \cdot 0,3} = 0,708 \cdot Q_m.$$

В данном случае уже при расходе $Q_m = 20 \text{ кг/с}$ имеем соотношение $14,16 \gg 1$, в то время как в статье [7] приведена цифра $Q_0 = 2,84 \cdot 10^5 \text{ г/с} = 284 \text{ кг/с}$. Кроме

того, если взять более низкие значения ω , например $\omega = 2 \text{ Гц} \cdot 2\pi = 12,56 \text{ рад/с}$, то получим

$$\frac{Q_m \cdot \pi}{1000 \cdot 78,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,005 \cdot 12,56 \cdot 0,3} = 21,2 \cdot Q_m,$$

то есть требование соблюдается уже при $Q_m = 1 \text{ кг/с}$.

Далее, если выполняются два указанных допущения, в результате линеаризации получаем значительно упрощённое уравнение для градиента давления.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \delta \omega^2 \frac{L}{\pi} \sin \omega t \left(1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right) + \\ & + \frac{2\delta \omega Q_V}{S_0} \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{\delta \pi Q_V^2}{L S_0^2} \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Подставляем массовый расход $Q_m = \rho Q_V$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = & \rho \delta \omega^2 \frac{L}{\pi} \sin \omega t \left(1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right) + \\ & + \frac{2\delta \omega Q_m}{S_0} \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho L S_0^2} \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Теперь интегрируем по x , находим перепад давления относительно точки с координатой $x_0 = -L$.

$$\begin{aligned} p(x, t) - p(x_0, t) = & \int_{x_0=-L}^x \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \int_{-L}^x \left(1 + \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right) dx + \frac{2\delta \omega Q_m}{S_0} \cos \omega t \int_{-L}^x \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) dx + \\ & + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho L S_0^2} \sin \omega t \int_{-L}^x \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) dx = \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \left[x + \frac{L}{\pi} \sin \frac{x\pi}{L} \right]_{-L}^x + \frac{2\delta \omega Q_m}{S_0} \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[-\cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right]_{-L}^x + \\ & + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho L S_0^2} \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right]_{-L}^x = \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \left[x - (-L) + \frac{L}{\pi} \left(\sin \frac{x\pi}{L} - \sin(-\pi) \right) \right] + \\ & + \frac{2\delta \omega Q_m}{S_0} \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\cos(-\pi) - \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right] + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho L S_0^2} \sin \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[\sin \left(\frac{x\pi}{L} \right) - \sin(-\pi) \right] = \\ = & \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \left[x + L + \frac{L}{\pi} \sin \frac{x\pi}{L} \right] + \frac{2\delta \omega Q_m}{S_0} \cos \omega t \cdot \frac{L}{\pi} \left[-1 - \cos \left(\frac{x\pi}{L} \right) \right] + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho L S_0^2} \sin \omega t \cdot \sin \left(\frac{x\pi}{L} \right). \end{aligned}$$

Находим давления в интересующих точках.

$$p(-L, t) = p(x_0, t) = p_0.$$

$$p(0, t) = p_0 + \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \left[L + \frac{L}{\pi} \sin 0 \right] -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2\delta \omega Q_m L}{S_0 \pi} \cos \omega t \cdot [1 + 1] + \frac{\delta \pi Q_m^2}{\rho S_0^2} \sin \omega t \cdot \sin 0 = \\ = & p_0 + \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t - \frac{4\delta \omega L}{S_0 \pi} Q_m \cos \omega t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(L, t) &= p_0 + \frac{\delta \omega^2 L \rho}{\pi} \sin \omega t \left[2L + \frac{L}{\pi} \sin \pi \right] - \\
 &- \frac{2\delta \omega L}{S_0 \pi} Q_m \cos \omega t \cdot [1 + (-1)] + \frac{\delta Q_m^2}{\rho S_0^2} \sin \omega t \cdot \sin \pi = \\
 &= p_0 + 2 \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Находим левую разность давлений.

$$\begin{aligned}
 \Delta p_L &= p(0, t) - p(-L, t) = p_0 + \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t - \\
 &- \frac{4\delta \omega L}{S_0 \pi} Q_m \cos \omega t - p_0 = \\
 &= \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t - Q_m \frac{4\delta \omega L}{S_0 \pi} \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Находим правую разность давлений

$$\begin{aligned}
 \Delta p_R(t) &= p(L, t) - p(0, t) = \\
 &= p_0 + 2 \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t - p_0 - \\
 &- \frac{\delta \omega^2 L^2 \rho}{\pi} \sin \omega t + \frac{4\delta \omega L}{S_0 \pi} Q_m \cos \omega t = \\
 &= \rho \frac{\delta \omega^2 L^2}{\pi} \sin \omega t + Q_m \frac{4\delta \omega L}{S_0 \pi} \cos \omega t.
 \end{aligned} \quad (5')$$

Суммарный перепад на двух участках

$$\Delta p(t) = p(L, t) - p(-L, t) = 2\rho \frac{\delta \omega^2 L^2}{\pi} \sin \omega t.$$

Разность перепадов

$$\Delta p_R(t) - \Delta p_L(t) = 8Q_m \frac{\delta \omega L}{S_0 \pi} \cos \omega t.$$

Сравним полученные результаты с источником [7]:

$$\begin{aligned}
 \Delta p_L(t) &= p(0, t) - p(-L, t) = \\
 &= \rho \frac{\delta \omega^2 L^2}{\pi} \sin(\omega t) - 4Q_0 \frac{\delta \omega L}{\pi S_0} \cos(\omega t); \\
 \Delta p_R(t) &= p(+L, t) - p(0, t) = \\
 &= \rho \frac{\delta \omega^2 L^2}{\pi} \sin(\omega t) + 4Q_0 \frac{\delta \omega L}{\pi S_0} \cos(\omega t); \\
 \Delta p(t) &= p(+L, t) - p(-L, t) = 2\rho \frac{\delta \omega^2 L^2}{\pi} \sin(\omega t).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь видим полное совпадение с исходными формулами в [7]. В данном случае получаем, что амплитуда суммарного перепада, синфазного с $\sin \omega t$, пропорциональна плотности жидкости и квадрату длины L , а амплитуда разности перепадов ортогональна к суммар-

ному перепаду, пропорциональна массовому расходу и длине L .

Таким образом, мы проследили за выводом всех формул и получили их, вслед за авторами работы [7]. Мы нашли в тексте статьи две неточности – одна малозначительная, а другая более существенная. Изучили природу сделанных допущений о малости перемещений стенки и необходимом минимальном расходе жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полученная связь между массовым расходом жидкости, её плотностью и перепадом давления на участках деформируемого трубопровода является линейной только в первом приближении.

2. Обнаружена существенная ошибка в одной из формул. Ограничения по минимально допустимому расходу, обусловленные требованиями линеаризации, являются намного более слабыми, чем это указано в статье [7].

3. Для уменьшения нелинейных искажений преобразования расхода и плотности целесообразно уменьшать величину относительной деформации сечения δ и частоту колебаний ω .

3. Теоретически подтверждаются выводы авторов [7] о возможности полезного использования открытого ими эффекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремлёвский П.П. Расходомеры и счётчики количества : Справочник. 4-е изд., перераб. и доп. Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. 701 с.
2. Князев Д.С., Гудков К.В. Анализ расходомеров в системах контроля массового расхода жидкости // Современные информационные технологии. 2017. № 25. С. 26–29.
3. Миронова А.Л., Гончарова Н.И. Анализ технических характеристик и выбор расходомера для установки измерения и учёта расхода сжиженного газа УИЖГЭ 50 // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2012. № 3-3 (293). С. 145–150.
4. ГОСТ Р 8.615-2005. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения количества извлекаемой из недр нефти и нефтяного газа. Общие метрологические и технические требования : М. : Стандартинформ, 2006. 20 с.
5. Жияев О.В. Способы измерения массового расхода сырой нефти // Достижения, проблемы и перспективы развития нефтегазовой отрасли : матер. Междунар. науч.-практ. конф., посвящённой 60-летию высшего нефтегазового образования в Республике Татарстан / Альметьевский государственный нефтяной институт. Альметьевск, 2016. С. 372–377.
6. Даев Ж.А. Эволюция кориолисовых расходомеров // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. 2016. Т. 4, № 3. С. 33–39. URL: <http://industrial-engineering.ru/issues/2016/2016-3.pdf>.

7. Майоров Е.В., Онищук В.А. Об инерционном способе одновременного измерения массового расхода жидкости и её плотности // Прикладная физика. 2005. № 6. С. 18–23.

8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа : учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М. : Дрофа, 2003.

REFERENCES

1. Kremlevskii P.P. *Raskhodomery i schetchiki kolichestva*. Spravochnik. 4-e izd., pererab. i dop. [Flow-Rate Meters. Reference Textbook, the 4th Edition revised and enlarged]. Leningrad, Mashinostroenie. Leningr. Publ., 1989. 701 p.

2. Kniazev D.S., Gudkov K.V. Analiz raskhodomero v sistemakh kontrolya massovogo raskhoda zhidkosti [Review of Flow Meters for Liquid Mass Flow Control Systems]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii* [Contemporary Information Technologies], 2017, no. 25, pp. 26–29.

3. Mironova A.L., Goncharova N.I. Analiz tekhnicheskikh kharakteristik i vybor raskhodomera dlia ustanovki izmereniia i ucheta raskhoda szhizhennogo gaza UIZhGE 50 [Analysis of Technical Characteristics and Choice of Flowmeter for Metering and Account of LPG Flow Rate UIZHGE 50]. *Fundamentalnye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and Applied Problems of Technics and Technologies], 2012, no. 3-3 (293), pp. 145–150.

4. GOST R 8.615–2005. *Gosudarstvennaia sistema obespecheniia edinstva izmerenii. Izmereniia kolichestva izvlekaemoi iz nedr nefti i neftianogo gaza. Obshchie metrologicheskie i tekhnicheskie trebovaniia* [State Standard GOST R 8.615–2005. State System for Ensuring the

Uniformity of Measurements. The Measuring of Quantity of Taken from Bowels Oil and Gas. General Metrological and Technical Requirements]. Moscow, Standartinform Publ., 2006. 20 p.

5. Zhiliaev O.V. Sposoby izmereniia massovogo raskhoda syroi nefti [Techniques for Measuring the Crude Oil Mass Flow Rate]. *Dostizheniia, problemy i perspektivy razvitiia neftegazovoi otrasli. Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posviaschennoi 60-letiiu vysshego neftegazovogo obrazovaniia v Respublike Tatarstan* [Proc. of Sci.-Practical Conf. on the 690th Anniversary of the Higher Education for Petroleum Industry in the Republic of Tatarstan. Achievements, Problems, and Prospects for the Development of the Oil and Gas Industry]. Almetevsk, Almetevsk State Petroleum Institute Publ., 2016, pp. 372–377.

6. Daev Zh.A. Evoliutsiia koriolisovykh raskhodomero v [Evolution of Coriolis Flowmeters]. *Mashinostroenie. Setevoi elektronnyi nauchnyi zhurnal* [Russian Internet Journal of Industrial Engineering], 2016, vol. 4, no. 3, pp. 33–39.

7. Maiorov E.V., Onishchuk V.A. Ob inertsionnom sposobe odnovremennogo izmereniia massovogo raskhoda zhidkosti i ee plotnosti [On the Inertial Method of Simultaneous Measurement of Flow-Rate and Density of Liquid]. *Prikladnaia fizika* [Applied Physics], 2005, no. 6, pp. 18–23.

8. Loitsianskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. Uchebnik dlia vuzov. 7-ye izd., ispr. [Fluid Mechanics. Textbook for Higher Education, the 7th Edition revised]. Moscow, Drofa Publ., 2003.