УДК 004.942, 681.5.015

А.В. Голубков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОБЪЕМОМ БАНКА ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА¹

Голубков Алексей Владимирович, окончил магистратуру Ульяновского государственного педагогического университета им. И.Н. Ульянова по направлению «Методология математического образования», аспирант кафедры высшей математики факультета физико-математического и технологического образования УлГПУ им. И.Н. Ульянова. Имеет научные публикации и свидетельства о регистрации программ. Область научных интересов: математическое моделирование и программирование. [e-mail: kr8589@gmail.com].

Аннотация

В статье представлено решение задачи обнаружения изменения режима движения объекта по сложной траектории. Предполагается, что сложную траекторию можно представить последовательностью участков прямолинейного равномерного движения и/или движения по окружности с заданным радиусом. Для моделирования сложной траектории применяется гибридная стохастическая модель. Задача заключается в скорейшем обнаружении смены режима движения на каждом таком участке с целью вычисления оптимальных оценок параметров движения объекта в режиме реального времени. Решение задачи основано на последовательном решающем правиле о выборе текущего режима движения в неизвестный момент времени, с ограниченным объемом банка конкурирующих фильтров Калмана. Алгоритм априорной оценки объема банка конкурирующих фильтров реализован на языке MATLAB, проведены численные эксперименты. Разработанный алгоритм оценки объема банка фильтров Калмана применен для решения задачи скорейшего обнаружения изменения режима движения объекта по сложной траектории.

Ключевые слова: стохастические дискретные линейные системы, гибридная стохастическая модель, банк фильтров Калмана, последовательное решающее правило.

doi: 10.35752/1991-2927-2020-1-5-14-23

A SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE DETECTION OF CHANGES IN OBJECT MOTION MODE WITH A LIMITED SIZE OF THE KALMAN FILTERS BANK

Aleksei Vladimirovich Golubkov, graduated from Ilya Ulyanov State Pedagogical University with the Master's degree in the methodology of mathematical education; Postgraduate Student at the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Physics, Mathematics, and Technology Education of UISPU; an author of articles and certificates of software registration in the field of mathematical modeling and software engineering. e-mail: kr8589@gmail.com.

Abstract

The paper presents a solution to the problem of detecting the changes in motion mode of an object along a complex trajectory. It is assumed that a complex trajectory can be presented by a sequence of pieces of finite length, at each of which the object moves uniformly and on a straight line, or makes a circular motion when turning to the right or to the left with constant velocity. To simulate a complex trajectory, a hybrid stochastic model is used. The task is to detect the change in the motion mode as soon as possible in order to calculate the optimal estimates of the object's motion parameters in real time. The solution to the problem is based on a sequential decision rule about choosing the current motion mode at an unknown time instant, with a limited size of the bank of competitive Kalman filters. The algorithm for a priori estimate calculation of the size of the competitive filters bank is implemented in MATLAB, numerical experiments are carried out. The developed algorithm for estimating the size of the Kalman filter bank is used to solve the problem of early detection of changes in the motion mode of an object along a complex trajectory.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов 18-37-00220 мол_а, 18-41-732003 р_мк.

Key words: stochastic discrete linear systems, hybrid stochastic model, a bank of Kalman filters, sequential decision making rule.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи обнаружения изменения режима движения объекта, представленное в статье, основано на моделировании процесса движения объекта с помощью гибридной стохастической модели, в которой отдельные участки движения описываются одной из возможных дискретных линейных стохастических моделей, каждая из которых моделирует либо равномерное прямолинейное движение, либо круговое равномерное движение при повороте вправо или влево с заданным радиусом [1, 2]. Задача заключается в скорейшем обнаружении смены режима движения на каждом таком участке с целью вычисления оптимальных оценок параметров движения объекта в режиме реального времени. Одним из подходов к решению указанной задачи является применение методов скорейшего обнаружения нарушений. Данный класс методов, развитый в теории обнаружения изменений свойств случайных процессов, обладает наибольшим быстродействием в решении задач обнаружения нарушений [3–8]. В настоящее время задачи скорейшего обнаружения нарушений остаются актуальными в силу важности их практических приложений [9–13]. Примерами таких приложений являются задачи сопровождения целей, обработки сигналов со сканирующих дальнометров. Другой актуальной областью приложения подобных математических моделей является робототехника. Траектория движения мобильного робота имеет характер прямолинейного и/или кругового движения. Методы построения и оценивания параметров траектории движения робота с помощью дискретных линейных стохастических моделей могут применяться для решения задач слежения за движущимися объектами. При решении практических задач обнаружения и диагностики одной из важных подзадач является априорная оценка объема банка конкурирующих фильтров Калмана [14].

Целью данной работы является построение численно эффективного решения задачи скорейшего обнаружения изменения режима движения объекта в неизвестный момент времени, основанное на последовательном решающем правиле с ограниченным объемом банка конкурирующих фильтров Калмана.

1 Модель движения объекта

Для моделирования траектории движения объекта используется гибридная стохастическая модель, в которой отдельные участки траектории описываются линейными дискретными моделями, соответствующими различным режимам движения объекта. Данный подход к моделированию позволяет заменить сложную и в общем случае нелинейную модель движения объекта множеством линейных моделей, для которых применима дискретная линейная фильтрация Калмана [1].

Но для того, чтобы иметь возможность вычислить оптимальные линейные оценки вектора состояния объекта, необходимо уметь как можно быстрее распознать текущий режим движения.

Предположим, что траекторию объекта можно разделить на отдельные достаточно длинные участки, на каждом из которых его движение может быть представлено линейной стохастической моделью, описывающей либо прямолинейное равномерное движение, либо круговое движение против/по часовой стрелке (поворот налево/направо) с заданным радиусом. Заметим, что конкретный режим движения не влияет на общее решение задачи, рассматриваемой в данной статье.

Рассмотрим три такие модели, тогда движение объекта по всей траектории может быть описано гибридной стохастической моделью:

$$x(t_k) = \Phi^p x(t_{k-1}) + B^p u(t_{k-1}) + G w(t_{k-1}), \quad (1)$$

$$p \in \{0, 1, 2\},$$

где t_k – дискретный момент времени, p – номер режима движения, $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ – вектор параметров движения объекта, в котором x_1 – координата объекта вдоль оси Ox (м), x_2 – проекция скорости v_x вдоль оси Ox (м/с), x_3 – координата объекта вдоль оси Oy (м), x_4 – проекция скорости v_y вдоль оси Oy (м/с).

Матрицы модели:

- Для модели прямолинейного равномерного движения (номер режима движения $p = 0$):

$$\Phi^0 = \Phi^0(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_l & 0 \\ 0 & \Phi_l \end{bmatrix},$$

$$\Phi_l = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$ – интервал дискретизации.

- Равномерное движение по окружности против часовой стрелки с заданным радиусом r_1 (номер режима движения $p = 1$) или равномерное движение по окружности по часовой стрелке с заданным радиусом r_2 (номер режима движения $p = 2$):

$$\Phi^1 = \Phi^1(x_s, r_1, \tau) = \begin{bmatrix} \Phi_{c1} & 0 \\ 0 & \Phi_{c1} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^2 = \Phi^2(x_s, r_2, \tau) = \begin{bmatrix} \Phi_{c2} & 0 \\ 0 & \Phi_{c2} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{c1} = \begin{bmatrix} \cos \omega_1 \tau & \omega_1^{-1} \sin \omega_1 \tau \\ -\omega_1 \sin \omega_1 \tau & \cos \omega_1 \tau \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{c2} = \begin{bmatrix} \cos \omega_2 \tau & \omega_2^{-1} \sin \omega_2 \tau \\ -\omega_2 \sin \omega_2 \tau & \cos \omega_2 \tau \end{bmatrix},$$

$$B^1 = B^1(x_s, r_1, \tau) = \begin{bmatrix} (x_{1,s} - \omega_1^{-1} x_{4,s})(1 - \cos \omega_1 \tau) \\ (\omega_1 x_{1,s} - x_{4,s}) \sin \omega_1 \tau \\ (x_{3,s} + \omega_1^{-1} x_{2,s})(1 - \cos \omega_1 \tau) \\ (\omega_1 x_{3,s} + x_{2,s}) \sin \omega_1 \tau \end{bmatrix},$$

$$B^2 = B^2(x_s, r_2, \tau) = \begin{bmatrix} (x_{1,s} + \omega_2^{-1} x_{4,s})(1 - \cos \omega_2 \tau) \\ (\omega_2 x_{1,s} + x_{4,s}) \sin \omega_2 \tau \\ (x_{3,s} - \omega_2^{-1} x_{2,s})(1 - \cos \omega_2 \tau) \\ (\omega_2 x_{3,s} - x_{2,s}) \sin \omega_2 \tau \end{bmatrix}.$$

Здесь матрицы B^1 и B^2 определяют поворот влево либо вправо, τ – период дискретизации, $\omega_1 = |v_s|/r_1 > 0$, $\omega_2 = |v_s|/r_2 > 0$ – угловая скорость в момент смены режима движения, модуль вектора скорости $|v_s| = \sqrt{v_{x_s}^2 + v_{y_s}^2}$, $x_{i,s}$ – i -й элемент вектора состояния модели (1) в момент времени t_s .

В уравнение модели включена стохастическая составляющая, моделирующая случайные возмущения в движении объекта, в виде дискретного белого шума $w(t_k) \sim \mathcal{N}(0, Q)$, где $Q \geq 0$ – матрица ковариации $w(t_k)$. Матрица усиления возмущения для всех режимов движения равна

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Предположим, что для измерения доступны только пространственные координаты движущегося объекта. Тогда модель измерений может быть записана следующим образом:

$$z(t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t_k) + v(t_k), \quad (2)$$

где $z(t_k)$ – вектор наблюдений в дискретные моменты времени, $v(t_k)$ – ошибка наблюдения, представляющая дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R > 0$, т. е. $v(t_k) \sim \mathcal{N}(0, R)$.

2 ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ

Ранее мы рассматривали задачу с известным моментом изменения режима движения [2, 15, 16]. В задаче, когда момент изменения режима движения неизвестен, каждый момент времени следует рассматривать как возможное изменение режима движения.

Алгоритм обнаружения основан на применении последовательного критерия Вальда. Для обнаружения смены режима движения необходимо построить фильтр Калмана, соответствующий гипотезе об изменении режима. Таким образом, количество фильтров Калмана постоянно растет с увеличением интервала наблюдения за объектом.

На рисунке 1 приведен пример решения задачи обнаружения изменения режима движения в известный момент времени при повороте объекта влево с одним из 10 возможных радиусов поворота [15]. Изменение режима движения считается обнаруженным и идентифицированным после пересечения соответствующим значением отношения правдоподобия порогового значения решающего правила.

Рассмотрим *банк конкурирующих фильтров Калмана* как множество фильтров Калмана, каждый из которых

Рис. 1. Процесс изменения движения с прямолинейного равномерного на поворот влево

соответствует гипотезе о том, что изменение режима движения произошло в текущий момент времени [4].

Поскольку количество фильтров постоянно растет с увеличением длины интервала наблюдения за объектом, возникает необходимость в нахождении оценки объема банка фильтров Калмана, необходимого для решения задачи обнаружения в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

В недавней работе [17] сформулирован алгоритм вычисления оценки размера банка фильтров Калмана на основе идеи, предложенной в [12]. В настоящей работе получено строгое математическое обоснование алгоритма вычисления оценки банка фильтров (см. п. 3).

В [12] авторы предложили искать требуемый объем банка конкурирующих фильтров Калмана как теоретическую оценку среднего объема выборки, необходимого для принятия решения о выборе из двух гипотез в соответствии с последовательным критерием Вальда [3, 4, 18]. Под выборкой понимаем измерения, полученные с момента начала теста до момента определения режима движения. Поскольку с каждым новым измерением в банк добавляется новый фильтр, соответствующий гипотезе о возможном изменении режима движения на текущем шаге, средний объем банка будет равен среднему объему выборки для принятия решения. Таким образом, следует организовать банк в виде очереди, в которой находятся только те фильтры, для которых период принятия решения еще не завершен. Размер такой очереди предлагается ограничить найденной оценкой.

Решение задачи с применением последовательного критерия Вальда заключается в следующем. Рассмотрим две гипотезы: основная H_0 и альтернативная H_1 , соответствующие разным режимам движения. Требуется по данным измерений определить, была ли смена режима движения на заданном участке. Последовательный критерий Вальда заключается в вычислении отношения правдоподобия $\lambda(t_k)$ и его сравнении с верхним $A = \ln((1-\beta)/\alpha)$ и нижним $B = \ln(\beta/(1-\alpha))$ порогами решающего правила, где α и β – вероятности ошибок первого и второго рода. Последовательное решающее правило для различения двух гипотез запишем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t_k) \leq B, \text{ испытания останавливаются,} \\ \hspace{10em} \text{выбирается гипотеза } H_0; \\ \lambda(t_k) \geq A, \text{ испытания останавливаются,} \\ \hspace{10em} \text{выбирается гипотеза } H_1; \\ A > \lambda(t_k) > B, \text{ испытания продолжаются.} \end{array} \right.$$

Последовательный критерий отношения правдоподобия требует вычисления отношения правдоподобия $\lambda(t_k)$ в каждый дискретный момент времени t_k .

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ БАНКА ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА

Рассмотрим изменение режима движения на интервале $t_i \in [t_0, t_N]$, вычисление отношений правдоподобия начинается в момент t_0 , момент изменения режима движения t_j неизвестен.

Кроме основной гипотезы H_0 , соответствующей отсутствию изменения режима движения, рассмотрим $N-1$ альтернативных гипотез H_j . Таким образом, в каждый момент времени t_j предполагаем, что может произойти изменение режима движения на альтернативный, соответствующий гипотезе H_j . Тогда выражение для отношения правдоподобия примет следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \lambda_{j0}(t_k) &= \log \frac{P\{v_{j1}^j, \dots, v_{t1}^j | H_j\}}{P\{v_{j0}, \dots, v_{t0} | H_0\}} = \\ &= \lambda_{j0}(t_{k-1}) + \mu_{j0}(t_k), \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, в банке фильтров в каждый момент находится максимум $j+1$ конкурирующих фильтров Калмана, для каждого из которых вычисляется отношение правдоподобия по формуле (3). Следовательно, размер банка непрерывно и неограниченно растет.

Решающее правило выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } \forall t_k \lambda_{j0}(t_k) \leq B, \text{ испытания} \\ \hspace{1.5cm} \text{останавливаются с выбором гипотезы } H_0, \\ \hspace{1.5cm} \text{на интервале } [t_0, t_j] \text{ изменения движения} \\ \hspace{1.5cm} \text{не произошло.} \\ \text{Если } \exists! j : \lambda_{j0}(t_k) \geq A, \text{ испытания} \\ \hspace{1.5cm} \text{останавливаются с выбором гипотезы } H_j, \\ \hspace{1.5cm} \text{изменение режима движения произошло} \\ \hspace{1.5cm} \text{в момент времени } t_j. \\ \text{Если } \forall j : B < \lambda_{j0}(t_k) \leq A, \text{ испытания} \\ \hspace{1.5cm} \text{продолжаются для } t_{k+1}. \\ \text{Если } \exists i \neq j : \lambda_{j0}(t_k) \geq A \text{ и } \lambda_{i0}(t_k) \geq A, \\ \hspace{1.5cm} \text{испытания останавливаются с выбором гипотезы} \\ \hspace{1.5cm} \text{с максимальным значением } \lambda_{i0}(t_k). \\ \text{Если } \forall i, j \lambda_{j0}(t_k) \leq B \text{ и } B < \lambda_{i0}(t_k) < A, \\ \hspace{1.5cm} \text{гипотеза } H_j \text{ исключается из банка фильтров} \\ \hspace{1.5cm} \text{и испытания продолжаются для } t_{k+1}. \end{array} \right.$$

Опишем алгоритм обнаружения.

Наблюдения проводят на интервале $[t_0, t_N]$, с начала наблюдения в каждый момент времени $t_k = t_j$, фильтр Калмана F_j , соответствующий гипотезе H_j , добавляется в банк фильтров.

Таким образом, после получения N измерений, $N + 1$ фильтр будет добавлен в банк, для каждого из которых в каждый момент времени t_k вычисляется отношение правдоподобия и сравнивается с пороговыми значениями.

Если все гипотезы H_j равновероятные, начальное значение отношений правдоподобия $\lambda_{j0}(t_k) = 0$. Значение $\lambda_{j0}(t_k)$ начинает меняться на шаге t_j , после добавления фильтра F_j в банк. Для всех $t_k < t_j$, $\lambda_{j0}(t_k) = 0$.

Согласно предложенному алгоритму, число конкурирующих фильтров Калмана в банке фильтров растет с каждым шагом испытания. Это, в свою очередь, ведет к постоянному росту объема вычислений на каждом шаге испытания. Реализация такого алгоритма на достаточно длинном интервале наблюдения потребует больших вычислительных мощностей.

4 ОГРАНИЧЕНИЕ РАЗМЕРА БАНКА КОНКУРИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ

В отличие от предыдущего примера рассмотрим две гипотезы H_0 и H_1 , соответствующие основному и альтернативному режимам движения. Чтобы оценить средний объем выборки, требуемый для принятия решения о выборе из двух гипотез, необходимо сначала знать среднюю величину изменения функции отношения правдоподобия $\lambda(t_k)$ после каждого шага теста:

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}) + \mu(t_k),$$

т. е. для решения задачи необходимо вычислить приращения $\mu_0(t_k)$ и $\mu_1(t_k)$ функции отношения правдоподобия при условии выполнения гипотез H_0 или H_1 . Для решения задачи применим подход, рассмотренный в работе [12]. Запишем

$$\begin{aligned} \mu_0(t_k) = E \left\{ \ln \left| \sum_0(t_k) \right|^{\frac{1}{2}} - \ln \left| \sum_1(t_k) \right|^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left[v_0^T(t_k) \sum_0^{-1}(t_k) v_0(t_k) - \right. \\ \left. - v_1^T(t_k) \sum_1^{-1}(t_k) v_1(t_k) \right] | H_0 \}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu_1(t_k) = E \left\{ \ln \left| \sum_0(t_k) \right|^{\frac{1}{2}} - \ln \left| \sum_1(t_k) \right|^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left[v_0^T(t_k) \sum_0^{-1}(t_k) v_0(t_k) - \right. \\ \left. - v_1^T(t_k) \sum_1^{-1}(t_k) v_1(t_k) \right] | H_1 \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v_i(t_k) = z(t_k) - H\hat{x}(t_k)$ – невязка измерений, вычисляемая в фильтре Калмана F_i , соответствующего гипотезе H_i ; $\sum_i(t_k)$ – ковариационная матрица невязки измерения $v_i(t_k)$.

Предположим, что в уравнениях фильтра используются значения параметров $\Phi_1, G_1, Q_1, H_1, R_1$, соответствующие гипотезе H_1 (альтернативный режим), вместо истинных значений параметров $\Phi_0, G_0, Q_0, H_0, R_0$, соответствующих гипотезе H_0 .

Для того чтобы вычислить значения $\mu_0(t_k)$ и $\mu_1(t_k)$, необходимо уметь вычислять фактическую корреляционную матрицу последовательности невязок фактических изменений:

$$\bar{\sum}_0(t_k) = E \left\{ \bar{v}_0(t_k) \bar{v}_0^T(t_k) | H_1 \right\}.$$

Запишем $\bar{\sum}_0(t_k)$ в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sum}_0(t_k) = E \left\{ \bar{v}_0(t_k) \bar{v}_0^T(t_k) | H_1 \right\} = \\ = E \left\{ \left(H_0 x(t_k) - H_1 \hat{x}(t_k^-) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(H_0 x(t_k) - H_1 \hat{x}(t_k^-) \right)^T \right\} + R_1, \end{aligned}$$

где $\hat{x}(t_k^-)$ – оценки, вычисленные фильтром F_1 .

Раскрыв скобки, получим выражение для вычисления фактической корреляционной матрицы невязок измерений:

$$\begin{aligned} \bar{\sum}_0(t_k) = H_0 E \left\{ x(t_k) x^T(t_k) \right\} H_0^T - \\ - H_0 E \left\{ x(t_k) x^T(t_k^-) \right\} H_1^T + \\ + H_1 E \left\{ \hat{x}(t_k^-) \hat{x}^T(t_k^-) \right\} H_1^T - \\ - H_1 E \left\{ \hat{x}(t_k^-) x^T(t_k^-) \right\} H_0^T + R_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для вычисления $\bar{\sum}_0(t_k)$ по выражению (6) необходимо решить систему матричных разностных уравнений [12] относительно величин

$$E \left\{ x(t_k) x^T(t_k) \right\}, E \left\{ x(t_k) \hat{x}^T(t_k^-) \right\} \text{ и } E \left\{ \hat{x}(t_k^-) \hat{x}^T(t_k^-) \right\}.$$

Аналогично, в случае изменения режима движения объекта параметры модели движения соответствуют гипотезе H_1 , а параметры фильтра соответствуют гипотезе H_0 , в этом случае мы вычисляем фактическую корреляционную матрицу невязок измерений $\bar{\sum}_1(t_k)$ согласно уравнению:

$$\begin{aligned} \bar{\sum}_1(t_k) = H_1 E \left\{ x(t_k) x^T(t_k) \right\} H_1^T - \\ - H_1 E \left\{ x(t_k) x^T(t_k^-) \right\} H_0^T + \\ + H_0 E \left\{ \hat{x}(t_k^-) \hat{x}^T(t_k^-) \right\} H_0^T - \\ - H_0 E \left\{ \hat{x}(t_k^-) x^T(t_k^-) \right\} H_1^T + R_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{x}(t_k^-)$ – оценки, вычисленные фильтром F_0 .

Рассмотрим выражения (4) и (5). Как известно, отсчеты невязок измерений в оптимальном фильтре Калмана независимы и распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\Sigma(t_k)$. При выполнении гипотезы H_i :

$$\Sigma_i(t_k) = H_i P_i(t_k^-) H_i^T + R_i \quad (i = 0, 1),$$

где $P_i(t_k^-)$ – значение матрицы ковариации ошибки оценки на этапе экстраполяции, вычисляемой по уравнениям фильтра Калмана.

Поскольку модели движения объекта являются стационарными (т. е. матрицы-параметры модели не зависят от времени t_k), то при выполнении условий стационарности и детектируемости, а также при условии $R_i > 0$, матрицы $P_i(t_k^-)$ в разностном уравнении Риккати имеют предел, т. е. $\lim_{t_k \rightarrow \infty} P_i(t_k^-) = P_i$. Если последовательность $P_i(t_k^-)$ сходится, тогда сходится и $\Sigma_i(t_k)$, т. е. $\lim_{t_k \rightarrow \infty} \Sigma_i(t_k) = \Sigma_i$, $i = 0, 1$ (см. теорему 3.2.4, С. 185 [19]).

Следовательно, установившиеся значения ковариационных матриц невязок измерений Σ_0 и Σ_1 можно вычислить через решение алгебраического уравнения Риккати:

$$P_i = \Phi_i \left[P_i - P_i H_i^T (H_i P_i H_i^T + R_i)^{-1} H_i P_i \right] \times \\ \times \Phi_i^T + G_i Q_i G_i^T, \quad i = 0, 1.$$

Поскольку $R_i > 0$, матрицы Σ_i являются квадратными ($m \times m$) и невырожденными. Следовательно, существуют обратные матрицы Σ_i^{-1} ($i = 0, 1$). Более того, матрицы Σ_i и Σ_i^{-1} являются симметрическими. Введем обозначения $\Sigma_0 = [\sigma_{ij}^0]_{i,j=1,\overline{m}}$; $\Sigma_1 = [\sigma_{ij}^1]_{i,j=1,\overline{m}}$; $\Sigma_0^{-1} = [\tilde{\sigma}_{ij}^0]_{i,j=1,\overline{m}}$; $\Sigma_1^{-1} = [\tilde{\sigma}_{ij}^1]_{i,j=1,\overline{m}}$.

Из указанных выше условий стационарности, стабилизируемости и детектируемости моделей, соответствующих гипотезам H_0 и H_1 , существует $\lim_{t_k \rightarrow \infty} \bar{\Sigma}_i(t_k) = \bar{\Sigma}_i$ ($i = 0, 1$).

Обозначим $\bar{\Sigma}_0 = [\bar{\sigma}_{ij}^0]_{i,j=1,\overline{m}}$ и $\bar{\Sigma}_1 = [\bar{\sigma}_{ij}^1]_{i,j=1,\overline{m}}$.

Пусть $v_i(t_k)$ – последовательность невязок измерений в оптимальном фильтре F_p , а $\bar{v}_i(t_k)$ – последовательность невязок измерений в неоптимальном фильтре, т. е. когда модель движения объекта соответствует гипотезе H_p , а фильтр – гипотезе H_j , $i \neq j$.

Покажем сначала, что $\lim_{t_k \rightarrow \infty} E \left\{ \bar{v}_0^T(t_k) \Sigma_0^{-1} \bar{v}_0(t_k) | H_1 \right\} = \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^0 \bar{\sigma}_{ij}^0)$.

Действительно,

$$E \left\{ \bar{v}_0^T(t_k) \Sigma_0^{-1} \bar{v}_0(t_k) | H_1 \right\} = E \left\{ \left[\bar{v}_{0,1}(t_k), \dots, \bar{v}_{0,m}(t_k) \right] \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^0(t_k) & \dots & \tilde{\sigma}_{m1}^0(t_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}_{m1}^0(t_k) & \dots & \tilde{\sigma}_{mm}^0(t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{0,1}(t_k) \\ \vdots \\ \bar{v}_{0,m}(t_k) \end{bmatrix} | H_1 \right\} = \\ = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^m \tilde{\sigma}_{i1}^0(t_k) \bar{v}_{0,i}(t_k) \right) \bar{v}_{0,1}(t_k) + \dots + \left(\sum_{i=1}^m \tilde{\sigma}_{im}^0(t_k) \bar{v}_{0,i}(t_k) \right) \bar{v}_{0,m}(t_k) | H_1 \right\} = \\ = \sum_{i=1}^m E \left\{ \tilde{\sigma}_{i1}^0(t_k) \bar{v}_{0,i}(t_k) \bar{v}_{0,1}(t_k) + \dots + \tilde{\sigma}_{im}^0(t_k) \bar{v}_{0,i}(t_k) \bar{v}_{0,m}(t_k) | H_1 \right\} = \\ = \sum_{i=1}^m \left[\tilde{\sigma}_{i1}^0(t_k) E \left\{ \bar{v}_{0,i}(t_k) \bar{v}_{0,1}(t_k) | H_1 \right\} + \dots + \tilde{\sigma}_{im}^0(t_k) E \left\{ \bar{v}_{0,i}(t_k) \bar{v}_{0,m}(t_k) | H_1 \right\} \right] = \\ = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{\sigma}_{i1}^0(t_k) \bar{\sigma}_{i1}^0(t_k) + \dots + \tilde{\sigma}_{im}^0(t_k) \bar{\sigma}_{im}^0(t_k) \right\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k) \bar{\sigma}_{ij}^0(t_k) = \\ = \sum_{i,j=1}^m \tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k) \bar{\sigma}_{ij}^0(t_k).$$

Следовательно, $\lim_{t_k \rightarrow \infty} E \left\{ \bar{v}_0^T(t_k) \Sigma_0^{-1} \bar{v}_0(t_k) | H_1 \right\} = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m \tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k) \bar{\sigma}_{ij}^0(t_k) = \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^0 \bar{\sigma}_{ij}^0)$

Аналогично, $\lim_{t_k \rightarrow \infty} E \left\{ \bar{v}_1^T(t_k) \Sigma_1^{-1} \bar{v}_1(t_k) | H_0 \right\} = \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^1 \bar{\sigma}_{ij}^1)$.

Теперь покажем, что $\lim_{t_k \rightarrow \infty} E \left\{ v_0^T(t_k) \Sigma_0^{-1} v_0(t_k) | H_0 \right\} = m$. Рассуждая аналогично вышеизложенному, приходим к выражению $E \left\{ v_0^T(t_k) \Sigma_0^{-1} v_0(t_k) | H_0 \right\} = \sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij}^0(t_k) \tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k)$.

Следовательно, $\lim_{t_k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij}^0(t_k) \tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k) = \sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij}^0 \tilde{\sigma}_{ij}^0$.

Поскольку матрицы Σ_0 и Σ_0^{-1} симметрические и взаимно обратные, то из соотношения $\Sigma_0 \Sigma_0^{-1} = I$ выполняется равенство $\sum_{i,j=1}^m \sigma_{ij}^0 \tilde{\sigma}_{ij}^0 = 1 (j = 1, \dots, m)$.

Откуда $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}^0 \tilde{\sigma}_{ij}^0 = \sum_{i=1}^m 1 = m$.

Таким образом, значения $\mu_0(t_k)$ и $\mu_1(t_k)$ можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_0(t_k) &= \ln |\Sigma_0(t_k)|^{\frac{1}{2}} - \ln |\Sigma_1(t_k)|^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ m - \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^1(t_k) \bar{\sigma}_{ij}^1(t_k)) \right\}, \\ \mu_1(t_k) &= \ln |\Sigma_0(t_k)|^{\frac{1}{2}} - \ln |\Sigma_1(t_k)|^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^0(t_k) \bar{\sigma}_{ij}^0(t_k)) - m \right\}. \end{aligned}$$

В стационарном режиме

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \ln |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}} - \ln |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^0 \bar{\sigma}_{ij}^0) - m \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \ln |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}} - \ln |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ m - \sum_{i,j=1}^m (\tilde{\sigma}_{ij}^1 \bar{\sigma}_{ij}^1) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В результате получено математическое обоснование вычисления величин μ_1 и μ_0 по выражениям (8) и (9), которые используем в следующем алгоритме.

5 АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ОБЪЕМА БАНКА КОНКУРИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА

Алгоритм 1:

1. Задать вероятности ошибок первого и второго рода α и β .
2. Вычислить пороговые значения решающего правила $A = \ln((1-\beta)/\alpha)$ и $B = \ln(\beta/(1-\alpha))$.
3. Найти решения Σ_0 и Σ_1 , соответствующие гипотезам H_0 и H_1 , по уравнениям фильтра Калмана.
4. Вычислить установившиеся значения фактических корреляционных матриц $\bar{\Sigma}_0$ и $\bar{\Sigma}_1$ по выражениям (6) и (7).
5. Найти μ_1 и μ_0 по выражениям (8) и (9).
6. Найти величины $N_0 = (\alpha A + (1-\alpha) B) / \mu_0$ и $N_1 = ((1-\beta) A + \beta B) / \mu_1$.
7. Найти оценку объема банка фильтров $M = \max(N_A, N_B)$.

Пусть α и β заданы. Предположим, что гипотезе H_0 соответствует режим движения, представленный моде-

лью M_0 , а гипотезе H_1 – режим движения, представленный моделью M_1 . Соответствующие пороговые значения решающего правила: верхний $A = \ln((1-\beta)/\alpha)$ и нижний $B = \ln(\beta/(1-\alpha))$.

Необходимо найти решения Σ_0 и Σ_1 , соответствующие гипотезам H_0 и H_1 по уравнениям фильтра Калмана и вычислить установившиеся значения фактических корреляционных матриц $\bar{\Sigma}_0$ и $\bar{\Sigma}_1$ по выражениям (6) и (7).

Далее необходимо найти μ_0 и μ_1 – средние значения величин изменения отношения правдоподобия $\lambda(t_k)$ после очередного шага теста, соответствующие гипотезам H_0 и H_1 . Значения μ_0 и μ_1 вычисляются по уравнениям чувствительности фильтра Калмана в предположении, что модель режима движения объекта соответствует основной гипотезе, а модель фильтра Калмана – альтернативной гипотезе, и наоборот.

Вычислив величины N_0 и N_1 – средние объемы выборки, необходимые для принятия решения при выполнении гипотез H_0 и H_1 [18], соответственно:

$$N_0 = (\alpha A + (1-\alpha) B) / \mu_0,$$

$$N_1 = ((1-\beta) A + \beta B) / \mu_1,$$

и выбрав максимальное значение $M = \max(N_A, N_B)$, получим априорную оценку объема банка конкурирующих фильтров.

Таким образом, общая схема решения задачи следующая: пусть со времени начала испытания прошло k шагов, банк фильтров представляет собой очередь, в которой каждый фильтр находится в банке только конечное число шагов теста, равных M . На $k+1$ шаге испытания фильтр F_i , который находился в банке фильтров и не принял решения об изменении режима движения, исключается из банка. Вместо него добавляется фильтр F_{k+1} , соответствующий гипотезе H_{k+1} о том, что изменение режима движения произошло на $k+1$ шаге испытания.

Данный метод позволяет решать задачу обнаружения нарушения режима движения меньшими вычислительными затратами. Недостаток предложенного метода решения задачи заключается в том, что если оценка M будет найдена неверно и окажется меньше, чем действительное количество шагов теста, необходимых для принятия решения, то решение может быть не найдено либо найдено неверно.

6 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Алгоритм реализован на языке MATLAB. Входными данными являются матрицы-параметры гибридной стохастической модели, соответствующие основной H_0 и альтернативной H_1 гипотезам, начальное значение вектора состояния x , вероятности ошибок первого и второго рода. Выходные данные – оценка M объема банка конкурирующих фильтров Калмана.

Рис. 2. Результаты работы алгоритма

На рисунке 2 показаны результаты работы алгоритма в виде графиков зависимости $M = KFBsize$ от величины радиуса поворота r .

Значения входных данных для тестового примера следующие: $x_{start} = [1, 0.5, 1, 0.5]$, $r \in [1, 20]$, матрица ковариаций порождающего шума в модели объекта $Q = \text{diag}[0.001, 0.001]$, матрица ковариаций шума измерений $R = \text{diag}[0.1, 0.1]$, $\alpha = \beta = 0.001$. По рисунку 2 видно, что при увеличении радиуса поворота средний объем выборки (и, соответственно, объем банка фильтров), необходимый для принятия решения, возрастает, что связано с ухудшающейся различимостью гипотез. Поворот с большим радиусом r трудно отличить от прямолинейного равномерного движения.

По результатам проведенного вычислительно-го эксперимента можно сделать вывод о том, что при изменении радиуса поворота в пределах от 1 до 20 решение задачи обнаружения изменения режима движения потребует в среднем 25 фильтров Калмана. Таким образом, если длина интервала наблюдения $N \gg 25$,

то предложенное решение задачи будет эффективным в плане необходимого объема вычислений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложено решение задачи определения режима движения объекта по сложной траектории. Для описания сложной траектории применяется гибридная стохастическая модель. Решение задачи основано на последовательном решающем правиле о выборе текущего режима движения в неизвестный момент времени, с ограниченным объемом банка конкурирующих фильтров Калмана. Разработан алгоритм априорной оценки объема банка фильтров Калмана. Полученная априорная оценка рассматривается как необходимый конечный объем банка конкурирующих фильтров, при котором последовательное решающее правило позволяет обнаружить момент изменения режима движения. В работе впервые представлено строгое математическое обоснование данного алгоритма. Априорная оценка объема банка вычисляется как теоретическая оценка среднего объема выборки, необходимого для принятия

решения о выборе из двух гипотез в соответствии с последовательным критерием Вальда.

Результаты работы смогут найти применение при решении практических задач судовождения, робототехники, обработки сигналов со сканирующих дальнометров, где требуется постоянное слежение за подвижными объектами в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта / И.В. Семушин, А.В. Цыганов, Ю.В. Цыганова, А.В. Голубков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10, № 3. С. 108–119.
2. Golubkov A.V., Tsyganov A.V., Tsyganova Yu.V. Adaptive estimation of an object motion parameters based on the hybrid stochastic model // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1096, no. 1. pp. 012166.
3. Wald A. *Sequential Analysis*. New York : John Wiley and Sons, 1947. 212 p.
4. Newbold P.M., Ho Yu-Chi. Detection of Changes in the Characteristics of Gauss-Markov Process // *IEEE Trans. On Aerosp. And Electron. Systems*. 1968. Vol. AES-4(5). pp. 707–718.
5. Hanlon P.D, Maybeck P.S. Equivalent Kalman Filter Bank Structure for Multiple Model Adaptive Estimation (MMAE) and Generalized Likelihood Ratio (GLR) Failure Detection // *Proc. of the 36th conference on Decision & Control*. San Diego, California, USA, 1997. Vol. 5. pp. 4312–4317.
6. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. М. : Наука, 1976. 272 с.
7. Basseville M., Benveniste A. Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. Springer, 1986. 373 p.
8. Tse L.L. Sequential Analysis : Some Classical Problems and New Challenges // *Statistica Sinica*. 2001. Vol. 11, no. 1. pp. 303–408.
9. Захаров К.В. Динамическая настройка обнаружения маневра морской цели // Автоматизация процессов управления. 2011. № 4 (26). С. 23–30.
10. Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. СПб. : Изд-во СПбГУ «ЛЭТИ», 2013. 164 с.
11. Эхеа-Рока Д., Секо-Гранадос Г., Лопес-Салседо Х.А. Обзор теории скорейшего обнаружения и ее применение для выявления угроз ГНСС // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24, № 4 (95). С. 76–97.
12. Semoushin I.V., Tsyganov J.V., Kulikova M.V. Fault Point Detection with the Bank of Competitive Kalman Filters // *Computational Science – ICCS2003*, International Conference, Melbourne, Australia and St.Petersburg, Russia, (June 2–4, 2003) P.M.A. Soot et al. (Eds.): ICCS 2003. LNCS 2658. 2003. pp. 417–426.
13. Detection of Abrupt Changes in Autonomous System Fault Analysis Using Spatial Adaptive Estimation of Nonparametric Regression / A. Kalmuk, O. Granichin, O. Granichina, M. Ding // *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, Boston Marriott Copley Place, July 6–8, 2016. pp. 6839–6844.
14. Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation : Theory, Algorithms and Software*. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2001. 580 p.
15. Диагностика режима движения объекта на основе гибридной модели / А.В. Голубков, И.О. Петрищев, А.В. Цыганов, Ю.В. Цыганова // Вестник НГИЭИ. 2017. № 12 (79). С. 22–32.
16. Adaptive estimation of a moving object trajectory using sequential hypothesis testing / A.V. Tsyganov, Yu.V. Tsyganova, A.V. Golubkov, I.O. Petrishchev // Вестник Южно-Уральского Государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12, № 1. С. 156–162.
17. Голубков А.В. Об оценке объема банка конкурирующих фильтров Калмана в задаче определения режима движения объекта на основе гибридной стохастической модели // Матер. XXI конф. молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб. : ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2019. С. 302–304.
18. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М. : Наука, 1979.
19. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М. : Наука, 1984.

REFERENCES

1. Semoushin I.V., Tsyganov A.V., Tsyganova Iu.V., Golubkov A.V. Modelirovanie i otsenivanie traektorii dvizhushchegosia obekta [Modelling and Estimation of a Moving Object Trajectory]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bull. of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling. Programming and Computer Science], 2017, vol. 10, no. 3, pp. 108–119.
2. Golubkov A.V., Tsyganov A.V., Tsyganova Iu.V. Adaptive Estimation of an Object Motion Parameters Based on the Hybrid Stochastic Model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1096, no. 1, pp. 012166.
3. Wald A. *Sequential Analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1947. 212 p.
4. Newbold P.M., Ho Yu-Chi. Detection of Changes in the Characteristics of Gauss-Markov Process. *IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Systems*, 1968, vol. AES-4(5), pp. 707–718.
5. Hanlon P.D, Maybeck P.S. Equivalent Kalman Filter Bank Structure for Multiple Model Adaptive Estimation (MMAE) and Generalized Likelihood Ratio (GLR) Failure Detection. *Proc. of the 36th Conference on Decision & Control*. San Diego, California, USA, 1997, vol. 5, pp. 4312–4317.
6. Shiriaev A.N. *Statisticheskii posledovatelinyi analiz* [Statistical Sequential Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 272 p.

7. Basseville M., Benveniste A. *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*. Springer, 1986. 373 p.
8. Tse L.L. Sequential Analysis: Some Classical Problems and New Challenges. *Statistica Sinica*, 2001, vol. 11, no. 1, pp. 303–408.
9. Zakharov K.V. Dinamicheskaya nastroyka obnaruzheniya manevra morskoi tseli [A Dynamic Setting of an Algorithm for the Detection of a Sea-Target Maneuver]. *Avtomatizatsiya protsessov upravleniya* [Automation of Control Processes], 2011, no. 4 (26), pp. 23–30.
10. Kononov A.A. *Osnovy traektornoi obrabotki radiolokatsionnoi informatsii* [Principles of Trajectory Radar Data Processing]. St.Petersburg, ETU 'LETI' Publ., 2013. 164 p.
11. Ekhea-Roka D., Seko-Granados G., Lopes-Salsedo Kh.A. Obzor teorii skoreishogo obnaruzheniya i ee primeneniye dlia vyavleniya ugroz GNSS [Comprehensive Overview of Quickest Detection Theory and Its Application to GNSS Threat Detection]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and Navigation Journal], 2016, vol. 24, no. 4 (95), pp. 76–97.
12. Semoushin I.V., Tsyganova J.V., Kulikova M.V. Fault Point Detection with the Bank of Competitive Kalman Filters. *Computational Science – ICCS 2003, International Conference*. P.M.A. Soot et al. (Eds.), Melbourne, Australia and St.Petersburg, Russia, (June 2–4, 2003), LNCS 2658, 2003, pp. 417–426.
13. Kalmuk A., O. Granichin, O. Granichina, M. Ding. Detection of Abrupt Changes in Autonomous System Fault Analysis Using Spatial Adaptive Estimation of Nonparametric Regression. *Proc. of the American Control Conference (ACC)*. Boston Marriott Copley Place, July 6–8, 2016, pp. 6839–6844.
14. Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software*. New Jersey, John Wiley and Sons, 2001. 580 p.
15. Golubkov A.V., Petrishchev I.O., Tsyganov A.V., Tsyganova Iu.V. Diagnostika rezhima dvizheniya obekta na osnove gibrinnoi modeli [Diagnostics of the Motion Mode of the Object Based on the Hybrid Model]. *Vestnik NGIEI* [Bulletin NGIEI], 2017, no. 12 (79), pp. 22–32.
16. Tsyganov A.V., Tsyganova Iu.V., Golubkov A.V., Petrishchev I.O. Adaptive Estimation of a Moving Object Trajectory Using Sequential Hypothesis Testing. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bull. of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling. Programming and Computer Science], 2019, vol. 12, no. 1, pp. 156–162.
17. Golubkov A.V. Ob otsenke obema banka konkuriruiushchikh filtrov Kalmana v zadache opredeleniya rezhima dvizheniya obekta na osnove gibrinnoi stokhasticheskoi modeli [On Estimation of the Size of the Bank of Competitive Kalman Filters in the Problem of Detection of the Object Motion Mode Based on a Hybrid Stochastic Model]. *Mater. XXI konf. molodykh uchenykh 'Navigatsiya i upravleniye dvizheniem'* [Proc. of 21st Conf. of Young Scientists Navigation and Motion Control]. St. Petersburg, Concern CSRI Electropribor, JSC, 2019, pp. 302–304.
18. Fukunaga K. *Vvedeniye v statisticheskuyu teoriyu raspoznavaniya obrazov* [Introduction to Statistical Pattern Recognition]. Moscow, Nauka Publ., 1979.
19. Fomin V.N. *Rekurrentnoye otsenivaniye i adaptivnaya filtratsiya* [Recurrent Estimation and Adaptive Filtering]. Moscow, Nauka Publ., 1984.