УДК 519.863

А.В. Ганичева

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Ганичева Антонина Валериановна, кандидат физико-математических наук, окончила Калининский государственный университет, доцент кафедры «Физико-математические дисциплины и информационные технологии» Тверской государственной сельскохозяйственной академии. Имеет более 150 научных работ в области математического моделирования, методов оптимизации, искусственного интеллекта. [e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru].

Аннотация

Разработана математическая модель для системного описания боевых действий в условиях высокоорганизованного боя. Рассмотрен общий случай зависимости эффективности от времени, характеристик противоборствующих единиц, зависимости коэффициента превосходства от времени. Для получения рекуррентной формулы применена система дифференциальных неравенств. Рекуррентная формула используется для расчета средних численностей сторон, оценки основных характеристик системы (потребного наряда, необходимого времени для получения заданных численностей, изменения коэффициента превосходства одной стороны над другой в зависимости от времени). Эффективность единиц сторон рассматривается для любой функциональной зависимости от времени для непрерывного и дискретного случаев. Коэффициент превосходства также зависит от времени. Для малого интервала времени в модели возможно фактически непрерывное наблюдение за изменением средних численностей. Показано, что при мало отличающихся друг от друга максимальной и минимальной эффективностях левые и правые границы интервальных оценок для средних численностей имеют близкие значения. Погрешность результата составляет небольшой процент.

Ключевые слова: размеченный граф, пуассоновский поток, плотность, эффективность, марковский процесс, рекуррентная формула, коэффициент превосходства.

doi:

THE MODIFIED LANCHESTER'S MODEL OF FIGHTING

Antonina Valerianovna Ganicheva, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics; graduated from Kalinin State University; Associate Professor of the Department of Physics and Mathematics and Information Technologies of the Tver State Academy of Agricultural Sciences; an author of more than 150 publications in the field of mathematical modeling, optimization methods, artificial intelligence. e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru.

Abstract

The mathematical model for the system description of military operations in the conditions of highly organized fight is developed. The General case of dependence of efficiency on time, characteristics of opposing units, dependence of superiority coefficient on time is considered. The system of differential inequalities is applied to receiving a recurrent formula. The recurrent formula is used to calculate the average number of sides, to estimate the main characteristics of the system (the necessary number of means, the time required to obtain the given numbers, the change in the coefficient of superiority of one side over the other depending on time). The efficiency of the sides is considered for any functional time dependence for continuous and discrete cases. The coefficient of superiority also depends on the time. For a small time interval in the model, it is possible to actually continuously monitor the change in the mean numbers. Efficiency of the parties and coefficients of superiority are considered as function of time. It is shown that the left and right bounds of interval estimates for the mean numbers have close values for the maximum and minimum efficiencies that differ little from each other. The error of result makes small percent.

Key words: marked graph, a Poisson stream, density, efficiency, Markov process, a recurrent formula, superiority coefficient.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интеллектуальные и информационные системы широко внедряются в различные области жизни общества, в том числе в военное обеспечение страны. В этой области большая роль отводится математическому моделированию. Одна из актуальных задач заключается в построении модели боевых действий, которая наиболее точно описывает развитие противоборствующих сторон во времени с учетом индивидуальных особенностей представителей каждой стороны, в частности, скорости и точности реакции, выраженной в эффективности поражения цели.

Несмотря на то, что модели Ланчестера для описания конфликтных ситуаций разработаны достаточно давно [1–3], исследования в этой области в настоящее время проводятся очень активно. В статье [4] рассмотрен дискретный аналог модели Ланчестера, решение сводится к отысканию оптимального управляющего воздействия третьей стороны в соответствующей линейной дискретной управляемой системе. В [5] предложена построенная с использованием теории марковских процессов вероятностная модель «плохо организованного боя», когда нет информации о поражении единиц противника. Также в работе [5] рассмотрен вопрос о сходимости вероятностных моделей к модели динамики средних. В работе [6] представлена гибридная динамическая система. В статье [7] разработана модель Ланчестера для трехстороннего боя. В работе [8] описаны модели Ланчестера в профильном курсе «Информатика и информационно-коммуникативные технологии». В статье [9] предложен методический подход к агрегированию моделей боевых действий группировок. Во всех перечисленных работах эффективности сторон, определяемые через плотности пуассоновских потоков действия единицы каждой стороны и соответствующие вероятности достижения целей, являются постоянными: во-первых, не зависят от времени, во-вторых, являются одинаковыми для всех единиц данной стороны. Кроме того, коэффициент превосходства рассматривается как постоянная величина, не зависящая от времени.

Однако реальные ситуации таковы, что эффективности зависят от времени и различны для разных представителей (единиц) данной стороны, коэффициент превосходства также в общем случае зависит от времени. Поэтому предлагаемые модели являются в достаточной степени приближенными. В самом деле, если речь идет, например, о боевых действиях, то эффективность данной единицы зависит от расположения (удаленности) единиц противника, превосходство в общем случае изменяется.

В работе [10] перечислены вариации и обобщения модели Ланчестера, в том числе для зависимых от времени коэффициентов эффективности при зависимости, рассмотренной в [11], а именно, линейного, степенного вида и для случая, когда отношения эффективностей постоянные. В [12] утверждается, что в случае зависимо-

сти эффективности от времени результат будет тот же самый, но сводящийся к численному интегрированию системы. В [13] рассмотрено системное представление процесса усвоения учебного материала в виде противоборства правильно и неправильно понятых фрагментов дисциплины. При этом рассматривается общий случай, когда эффективности зависят от времени и фрагментов дисциплины. Решена система дифференциальных неравенств на основе интегрального исчисления.

В предлагаемой работе рассмотрен общий случай зависимости эффективности сторон от времени (при любой функциональной зависимости) и от единиц противоборства. В разработанной модели так же, как и в модели Ланчестера, строятся два размеченных графа состояний системы противоборства двух сторон, для которых записывается система уравнений Колмогорова. В модели Ланчестера данная система преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно средних численностей сторон, которая решается аналитически. Однако, как указывается в [12], в модели Ланчестера зависимость эффективностей потоков от численностей сторон учитывается на основе метода квазирегулярности путем замены этих численностей их средними значениями, т. е. модель является приближенной. Погрешность определяется произведением общей эффективности противоположной стороны на выражение $1 - e^{-m}$ (где m – средняя численность данной стороны) независимо от того, решается система дифференциальных уравнений аналитически или численными методами. Однако общая эффективность зависит от времени и составляющих ее единиц. В [12] рассмотрен только частный случай данной ситуации, когда эта эффективность постоянна.

В предлагаемой работе принцип квазирегулярности не будет применен, т. к. зависимость плотностей от количества боевых единиц будет реализована за счет замены системы равенств Ланчестера на неравенства путем минимизации и максимизации относительно единиц противоборства и плотностей потоков относительно числа состояний и численностей сторон в данный момент времени. Система двух дифференциальных неравенств заменяется на систему двух линейных алгебраических неравенств, определяемых для данного момента времени по рекуррентной формуле с любой точностью. Неравенства решать не надо, достаточно использовать рекуррентную формулу для вычисления левой и правой части неравенства. Рекуррентная формула легко программируется, хотя не сложно решается и вручную. При малом интервале времени имеется возможность практически непрерывно наблюдать изменение средних численностей и оценивать во времени превосходство одной или другой стороны.

Целью работы является получение и решение системы дифференциальных неравенств для описания средних численностей сторон, анализ решения, оценка основных характеристик системы.

1 Постановка задачи. Построение размеченных графов состояний противоборствующих сторон

Рассмотрим бой двух сторон I и II. Пусть у стороны I в начальный момент времени имеется N_I боевых единиц, у стороны II – N_{II} боевых единиц. Единицы каждой стороны однородны между собой (например, авиация против авиации или авиация против зенитно-ракетных комплексов (ЗРК)). Пусть поток выстрелов единицы i ($i = \overline{1, N_I}$) стороны I является пуассоновским с плотностью $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$, поток выстрелов единицы j ($j = \overline{1, N_{II}}$) стороны II также является пуассоновским с плотностью $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$. Потоки успешных выстрелов, заканчивающихся поражением единицы противника, также будут пуассоновскими с плотностями $\alpha_{ij}^{(1)}(t) = \lambda_{ij}^{(1)}(t) \cdot p_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t) = \lambda_{ij}^{(2)}(t) \cdot p_{ij}^{(2)}(t)$ соответственно, где $p_{ij}^{(1)}(t)$ – вероятность поражения единицей i стороны I единицы j стороны II, $p_{ij}^{(2)}(t)$ – вероятность поражения единицей j стороны II единицы i стороны I. Величины $\alpha_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t)$ будем называть эффективностями единиц сторон, соответственно I и II.

Будем считать, что любая единица одной стороны может быть обстреляна любой единицей другой стороны и может находиться в одном из двух состояний: поражена, не поражена. Считаем также, что временем, затрачиваемым на одну стрельбу, можно пренебречь по сравнению с длительностью боя. Это позволяет считать, что процесс развития боя является марковским. Пусть бой будет высокоорганизованный, т. е. в случае поражения цели стрельба мгновенно переносится на другую непораженную единицу.

Согласно методу Ланчестера [12], сторону I будем рассматривать как систему (рис.), которая в любой момент времени t может находиться в одном из возможных состояний $E_k^{(1)}$, где k – число непораженных единиц стороны I на момент времени t ($k = N_I, N_I - 1, N_I - 2, \dots, 1, 0$).

Обозначим через $P_k^{(1)}(t)$ вероятность нахождения стороны I в момент t в состоянии $E_k^{(1)}$

($k = N_I, N_I - 1, N_I - 2, \dots, 1, 0$), $\Lambda_2^{(N_I-k)}(t)$ – плотности потока, переводящего систему из состояния $E_{N_I-k}^{(1)}$ в состояние $E_{N_I-k-1}^{(1)}$. Аналогичным графом можно представить состояния стороны II. Отметим, что $\Lambda_2^{(N_I-k)}(t) \left(\Lambda_1^{(N_{II}-k)}(t) \right)$ зависит также от числа $S_2(S_1)$ единиц стороны II (I), стреляющих по стороне I (II).

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ПЕРЕВОДЯЩИХ ПОТОКОВ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ЕДИНИЦ

Если Δt – малый промежуток времени, то на этом промежутке плотности и эффективности, зависящие от времени, можно считать постоянными, равными соответствующим значениям в правых границах промежутков $[t, t + \Delta t]$. В противном случае плотности и вероятности на данном промежутке рассматриваются как интегралы в границах от t до $t + \Delta t$ от соответствующих плотностей и эффективностей, зависящих от времени.

Сторона I переходит из одного состояния в другое в результате того, что сторона II за малый промежуток времени Δt на рубеже $E_{N_I-k}^{(1)}$ производит один успешный выстрел (ординарность потока) с вероятностью $1 - e^{-\Lambda_2^{(N_I-k)}(t) \cdot \Delta t}$. С точностью до членов первого порядка по Δt эта вероятность равна $\Lambda_2^{(N_I-k)}(t) \cdot \Delta t$, т. е.

$$1 - e^{-\Lambda_2^{(N_I-k)}(t) \cdot \Delta t} = \Lambda_2^{(N_I-k)}(t) \cdot \Delta t. \quad (1)$$

Вероятность того, что единица j стороны II за время Δt не сделает ни одного успешного выстрела, равна $e^{-\alpha_j^{(2)}(t) \Delta t}$. Эта вероятность с точностью до членов первого порядка по Δt равна $1 - \alpha_j^{(2)}(t) \Delta t$.

Допустим, что в момент времени t у стороны II имеется l непораженных единиц. Тогда вероятность того, что ни одна из этих единиц не сделает ни одного успешного выстрела, равна

$$\prod_{s=1}^l \left(1 - \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t \right) = 1 - \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t \quad (2)$$

с точностью до членов первого порядка по Δt .

Рис. Состояния системы стороны I

Пусть $\alpha_{\max}^{(2)}(t) = \max_{1 \leq i \leq N_1} \max_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t)$,
 $\alpha_{\min}^{(2)}(t) = \min_{1 \leq i \leq N_1} \min_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t)$ на временном проме-
 жуток $[t_1, t_2]$. Тогда правая часть формулы (2) не меньше,
 чем $1 - \alpha_{\max}^{(2)}(t) \Delta t$, и не больше, чем $1 - \alpha_{\min}^{(2)}(t) \Delta t$.

В любой момент времени t сторона II может на-
 ходиться в любом состоянии $E_{N_2-l}^{(2)}$ с вероятностью
 $P_l^{(2)}(t)$. Поэтому вероятность того, что за Δt со сторо-
 ны II не будет успешных выстрелов, будет не больше,
 чем

$$P_{\max}^{(2)}(t) = \sum_{l=1}^{N_2} P_l^{(2)}(t) \cdot [1 - \alpha_{\min}^{(2)}(t) \Delta t], \quad (3)$$

и не меньше, чем $P_{\min}^{(2)}(t)$, которая получается из (3) за-
 меной $\alpha_{\min}^{(2)}(t)$ на $\alpha_{\max}^{(2)}(t)$.

Тогда вероятность того, что за Δt у стороны II будет
 один успешный выстрел, будет не больше, чем

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t) = 1 - \sum_{l=0}^{N_2} P_l^{(2)}(t) + \\ + \alpha_{\max}^{(2)}(t) \Delta t \cdot \sum_{l=0}^{N_2} l \cdot P_l^{(2)}(t), \quad (4)$$

и не меньше, чем $1 - P_{\max}^{(2)}(t)$. Из (1) и (4) имеем:

$$1 - P_{\max}^{(2)}(t) \leq \Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \Delta t \leq 1 - P_{\min}^{(2)}(t). \quad (5)$$

В формуле (4) суммирование по l начинается с нуля,
 поскольку если начальные численности сторон N_1 и N_2
 достаточно велики, то можно предположить, что в мо-
 мент времени t у обеих сторон количество боевых еди-
 ниц более нуля. Поэтому $P_1^{(1)} = 0, P_0^{(2)} = 0$. Обозначим
 через $m_2(t)$ математическое ожидание $\sum_{l=0}^{N_2} l \cdot P_l^{(2)}(t)$
 числа не пораженных к моменту t единиц стороны II.

Обратим внимание, что $\sum_{l=0}^{N_2} P_l^{(2)}(t) = 1$. С учетом
 этого (4) преобразуется к виду:

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t) = \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot \Delta t \cdot m_2(t). \quad (6)$$

Аналогично $1 - P_{\max}^{(2)}(t) = \alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot \Delta t \cdot m_2(t)$.

Из (5) и (6) получаем:

$$\alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \leq \Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \leq \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t), \quad (7)$$

для $k = \overline{0, N_1 - 1}$.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СТОРОН

Для графа, изображенного на рисунке 1, запишем
 систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dP_{N_1}^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot P_{N_1}^{(1)}(t), \\ \dots \\ \frac{dP_{N_1-k}^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \cdot (P_{N_1-k}^{(1)}(t) - P_{N_1-k+1}^{(1)}(t)), \\ \dots \\ \frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} = \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)}(t). \end{cases} \quad k = \overline{1, N_1 - 1},$$

Умножим первое уравнение данной системы на N_1 ,
 второе – на $N_1 - 1$ и т. д., последнее – на 0 и сложим со-
 ответственно левые и правые части полученных после
 умножения уравнений. Левая часть суммарного уравне-
 ния будет представлять собой производную:

$$\left[\sum_{k=0}^{N_1} k P_k^{(1)}(t) \right] \text{ математического ожидания } \sum_{k=0}^{N_1} k P_k^{(1)}(t)$$

числа не пораженных к моменту t единиц стороны I, ко-
 торое обозначим через $m_2(t)$.

Правая часть суммарного уравнения будет иметь
 вид:

$$\begin{aligned} & -\Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot N_1 \cdot P_{N_1}^{(1)}(t) - \\ & -\Lambda_2^{(N_1-1)}(t) \cdot (N_1 - 1) \cdot P_{N_1-1}^{(1)}(t) + \\ & + \Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot (N_1 - 1) \cdot P_{N_1}^{(1)}(t) + \dots \\ & \dots - \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)} + \Lambda_2^{(2)}(t) \cdot P_2^{(1)} + 0 \cdot \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \Lambda_{\min}^{(2)}(t) &= \min_{1 \leq S_2 \leq N_2} \min_{1 \leq k \leq N_1} \Lambda_2^{(k)}(t), \\ \Lambda_{\max}^{(2)}(t) &= \max_{1 \leq S_2 \leq N_2} \max_{1 \leq k \leq N_1} \Lambda_2^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Тогда (8) будет не больше, чем

$$\begin{aligned} & -\Lambda_{\min}^{(2)} \cdot [P_{N_1}^{(1)} + P_{N_1-1}^{(1)} + \dots + P_1^{(1)}] = \\ & = -\Lambda_{\min}^{(2)} \cdot [1 - P_0^{(1)}] = -\Lambda_{\min}^{(2)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что (8) ограничена сверху выра-
 жением $-\Lambda_{\min}^{(2)}(t)$, а снизу – выражением $-\Lambda_{\max}^{(2)}(t)$.

Аналогичное неравенство получается для стороны II,
 т. е.

$$-\Lambda_{\max}^{(2)}(t) \leq m_1'(t) \leq -\Lambda_{\min}^{(2)}(t), \quad (9)$$

$$-\Lambda_{\max}^{(1)}(t) \leq m_2'(t) \leq -\Lambda_{\min}^{(1)}(t). \quad (10)$$

С учетом (7) неравенства (9) и (10) запишутся соот-
 ветственно в виде:

$$\begin{cases} -\alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \leq m_1'(t) \leq -\alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t), \\ -\alpha_{\max}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \leq m_2'(t) \leq -\alpha_{\min}^{(1)}(t) \cdot m_1(t). \end{cases}$$

4 МЕТОД ОЦЕНКИ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СТОРОН.

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Из определения производной следует, что

$$m_1'(t) = \frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

$$m_2'(t) = \frac{m_2(t + \Delta t) - m_2(t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с Δt .

Тогда с точностью $\varepsilon = o(\Delta t)$ (например, $\varepsilon = \Delta t^2$) при малом Δt имеем:

$$\begin{cases} m_1(t) - \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \cdot \Delta t \leq m_1(t + \Delta t) \leq m_1(t) - \alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \cdot \Delta t, \\ m_2(t) - \alpha_{\max}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \cdot \Delta t \leq m_2(t + \Delta t) \leq m_2(t) - \alpha_{\min}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Пусть $t = 0$ тогда

$$\begin{cases} N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t \leq m_1(\Delta t) \leq N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t, \\ N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t \leq m_2(\Delta t) \leq N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда для $t = \Delta t$ получаем:

$$\begin{cases} N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot (N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \leq \\ \leq m_1(2\Delta t) \leq N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot (N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t, \\ N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot (N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \leq \\ \leq m_2(2\Delta t) \leq N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot (N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (12)$$

Этот процесс можно продолжить. Для произвольного натурального k имеем рекуррентную формулу. Будем обозначать правые части (11) соответственно через $m_1^{\Pi}(\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(\Delta t)$. Аналогично для левых частей этих неравенств будем использовать обозначения: $m_1^{\Pi}(\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(\Delta t)$.

Тогда система (12) запишется в виде:

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_1(2\Delta t) \leq m_1^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_2(2\Delta t) \leq m_2^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (13)$$

Для времени $t = k \cdot \Delta t$ будем иметь:

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_1(k\Delta t) \leq \\ \leq m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_2(k\Delta t) \leq \\ \leq m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (14)$$

Правые части неравенств (14) будем обозначать соответственно через $m_1^{\Pi}(k\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(k\Delta t)$, левые части – через $m_1^{\Pi}(k\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(k\Delta t)$.

Правило составления системы (14) для параметра k формулируются следующим образом:

- в левой части стоит левая граница средней численности

данной стороны при « $k - 1$ » минус произведение максимальной эффективности противоположной стороны при « $k - 1$ » на правую границу средней численности противоположной стороны при « $k - 1$ »;

- в правой части стоит правая граница средней численности данной стороны при « $k - 1$ » минус произведение минимальной эффективности противоположной

стороны при « $k - 1$ » на левую границу средней численности противоположной стороны при « $k - 1$ ».

Система (14) дает возможность с заданной точностью $\varepsilon > 0$ оценивать границы интервалов имеющих средних численностей единиц обеих сторон. Заметим, что поскольку $\varepsilon = o(\Delta t)$, то задавая, например, $\varepsilon = \Delta t^2$ при заданном Δt к моменту времени $t = k\Delta t$ для данных $\alpha_{\min}^{(2)}(t)$, $\alpha_{\max}^{(2)}(t)$, $\alpha_{\min}^{(1)}(t)$, $\alpha_{\max}^{(1)}(t)$, N_1 , N_2 , получаем соответствующие оценки средних численностей сторон к моменту времени t .

Рассмотрим пример. Пусть $\Delta t = 0,1$ мин, $\alpha_{\min}^{(2)} = 0,1$ мин⁻¹, $\alpha_{\max}^{(2)} = 0,15$ мин⁻¹, $\alpha_{\min}^{(1)} = 0,11$ мин⁻¹, $\alpha_{\max}^{(1)} = 0,16$ мин⁻¹, $N_1 = 50$, $N_2 = 60$. Найдем оценки для $m_1(t)$ и $m_2(t)$ при $t = 3\Delta t$ ($k = 3$). Здесь для упрощения выкладок эффективности взяты постоянными.

Из (12) имеем:

$$\begin{aligned} 50 - 0,15 \cdot 60 \cdot 0,1 - \\ - 0,15(60 - 0,11 \cdot 50 \cdot 0,1) \cdot 0,1 \leq \\ \leq m_1(2\Delta t) \leq 50 - 0,1 \cdot 60 \cdot 0,1 - \\ - 0,1(60 - 0,16 \cdot 50 \cdot 0,1) \cdot 0,1; \\ 48,21 \leq m_1(2\Delta t) \leq 48,81. \end{aligned}$$

Аналогично для $m_2(2\Delta t)$ получаем:

$$58,41 \leq m_2(2\Delta t) \leq 58,91.$$

Правая часть первого неравенства (12) при $k = 3$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} m_1^{\Pi}(2\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)} \cdot m_2^{\Pi}(2\Delta t) \cdot \Delta t = \\ = 48,81 - 0,1 \cdot 58,41 \cdot 0,1 = 48,22; \end{aligned}$$

левая часть:

$$\begin{aligned} m_1^{\Pi}(2\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)} \cdot m_2^{\Pi}(2\Delta t) \cdot \Delta t = \\ = 48,2 - 0,15 \cdot 58,91 \cdot 0,1 = 47,32. \end{aligned}$$

Таким образом: $47,32 \leq m_1(3\Delta t) \leq 48,22$.

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} 58,41 - 0,16 \cdot 48,81 \cdot 0,1 \leq m_2(3\Delta t) \leq \\ \leq 58,91 - 0,11 \cdot 48,2 \cdot 0,1. \end{aligned}$$

Отсюда: $57,63 \leq m_2(3\Delta t) \leq 58,38$.

Следовательно, в любой момент $k\Delta t$ с точностью $\varepsilon = \Delta t^2$ определяются границы интервалов изменения средних численностей сторон.

Заметим, что неравенства (14) можно было записать и в других вариантах. Например, множителями при таких же эффективностях, как в (14), будут либо левые границы интервалов в левой и правой части неравенства, либо правые границы интервалов.

Пусть $k = 1$, найдем разность между правой и левой частями неравенства (11). Имеем:

$$\begin{aligned} N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t - \\ - \left(N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t \right) = \\ = N_2 \cdot \Delta t \left(\alpha_{\max}^{(2)}(0) - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Потребуем, чтобы данная разность была не больше $\varepsilon_1 > 0$. Тогда

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon_1}{N_2 \cdot \left(\alpha_{\max}^{(2)}(0) - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \right)}.$$

Для рассмотренного примера

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon_1}{60 \cdot (0,15 - 0,1)} = \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

При $\varepsilon_1 = 1$ получаем $\Delta t \leq 0,3$ мин. Далее для любого « k » будет показана оценка разности (15).

Пусть выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} N_1 > \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t, \\ N_2 > \alpha_{\max}^{(1)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Такое допущение обосновано выбором Δt . Тогда из (11) (13) следует, что

$$m_1^{\Pi}(\Delta t) > 0, \quad m_1^{\Pi}(\Delta t) > 0, \quad (16)$$

$$m_2^{\Pi}(\Delta t) > 0, \quad m_2^{\Pi}(\Delta t) > 0.$$

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}(\Delta t) > m_1^{\Pi}(2\Delta t), \\ m_1^{\Pi}(\Delta t) > m_1^{\Pi}(2\Delta t). \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} m_2^{\Pi}(\Delta t) > m_2^{\Pi}(2\Delta t), \\ m_2^{\Pi}(\Delta t) > m_2^{\Pi}(2\Delta t). \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_1^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (19)$$

Итак, неравенства (16) (19) верны при $t = \Delta t$, т. е. для $k = 1$.

Воспользуемся теперь принципом математической индукции и докажем, что если неравенства (16) (19) имеют место для времени $k\Delta t$, то они имеют место и для времени $(k+1)\Delta t$. Имеем на основе (14):

$$\left\{ \begin{aligned} m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) &= m_1^{\Pi}(k\Delta t) - \\ &\quad - \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(k\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) &= m_1^{\Pi}(k\Delta t) - \\ &\quad - \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(k\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}((k+1)\Delta t) &= m_2^{\Pi}(k\Delta t) - \\ &\quad - \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(k\Delta t) \cdot \Delta t, \\ m_2^{\Pi}((k+1)\Delta t) &= m_2^{\Pi}(k\Delta t) - \\ &\quad - \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(k\Delta t) \cdot \Delta t. \end{aligned} \right. (20)$$

Из первого равенства (20) с учетом первого неравенства (19) при $k\Delta t$ получаем, что

$$m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) < m_1^{\Pi}(k\Delta t).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных трех равенств (20). Отсюда следует выполнимость соотношений (19) для « $k+1$ ».

Следовательно, имеем две системы отрезков $[m_1^{\Pi}(k\Delta t), m_1^{\Pi}(k\Delta t)]$ и $[m_2^{\Pi}(k\Delta t), m_2^{\Pi}(k\Delta t)]$, $k = 1, 2, \dots$.

Левые и правые границы этих отрезков стремятся к некоторым пределам.

Первый предел представляет собой значение правой границы $m_1(t)$ при всех $k > k_0$, второй – значение левой границы для $k > k_0$, т. е. для любых $\varepsilon^{(1)} > 0$ и $\varepsilon^{(2)} > 0$.

$$\left\{ \begin{aligned} |m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) - m_1^{\Pi}(k\Delta t)| &< \varepsilon^{(1)}, \\ |m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) - m_1^{\Pi}(k\Delta t)| &< \varepsilon^{(2)}. \end{aligned} \right. (21)$$

С учетом (21) данную систему можно представить в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \left| m_1^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\min}^{(2)}(i\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t - m_2^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\max}^{(1)}(i\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t \right| &< \varepsilon^{(3)}, \\ \left| m_2^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\min}^{(1)}(i\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t - m_2^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\max}^{(1)}(i\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t \right| &< \varepsilon^{(4)}. \end{aligned} \right. (23)$$

Алгоритм отыскания соответствующего значения « k » такой же, как и для системы (21). Интервал Δt может принимать достаточно небольшое значение, а соответствующие $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$, согласно данным [14], принимают дробные и близкие значения. Поэтому рассмотренные разности для $m_1(t)$ и $m_2(t)$ будут достаточно небольшими. Так при $N_1 = 50$; $N_2 = 60$; $\Delta t = 0,1$; $\alpha_{\min}^{(2)} = 0,1$; $\alpha_{\max}^{(2)} = 0,11$; $\alpha_{\min}^{(1)} = 0,12$; $\alpha_{\max}^{(1)} = 0,13$ для $k = 40$ (соответствует 4 мин) имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t) m_2^{\Pi}(k\Delta t) &< \varepsilon^{(1)}, \\ \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t) m_2^{\Pi}(k\Delta t) &< \varepsilon^{(2)}. \end{aligned} \right.$$

Аналогично для $m_2(t)$. Тогда
Алгоритм отыскания значения « k » следующий. Сначала полагаем $k_0 = 1$ и вычисляем значения левых частей неравенств, сравниваем полученные результаты соответственно с $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$. Если оба неравенства выполняются, присваиваем k_0 значение $k_0 + 1$ и весь процесс повторяется. Как только хотя бы одно неравенство не будет выполнено для некоторого k_0 , это означает, что для этого k_0 число $k_0 - 1$ будет решением. Для этого значения $k_0 - 1$ со степенью точности $\varepsilon^{(1)}$ в качестве правой границы $m_1(t)$ можно взять значение $m_1^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$, в качестве левой – $m_1^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$. Аналогично в качестве правой границы $m_2(t)$ можно взять значение $m_2^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$, в качестве левой – $m_2^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$. Если неравенство не выполняется ни для какого « k », увеличивают $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$.

Рассмотрен случай, когда Δt фиксировано. В случае невыполнения одного из неравенств можно добиться результата при меньших значениях k , уменьшая, соответственно Δt и рассматриваемый промежуток времени $[t_1, t_2]$.

Оценим разность между правой и левой границей для $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} |m_1^{\Pi}(k\Delta t) - m_1^{\Pi}(k\Delta t)| &< \varepsilon^{(3)}, \\ |m_2^{\Pi}(k\Delta t) - m_2^{\Pi}(k\Delta t)| &< \varepsilon^{(4)}. \end{aligned} \right. (22)$$

$|m_1^{\Pi}(0,1 \cdot 40) - m_1^{\Pi}(0,1 \cdot 40)| = |29,62 - 27,89| < 1,7$, т. е. разность меньше, чем две боевых единицы за 4 минуты; $|m_2^{\Pi}(0,1 \cdot 40) - m_2^{\Pi}(0,1 \cdot 40)| = |40,62 - 39,51| < 1,1$ единицы, т. е. ошибка для $m_1(t)$ составляет $\frac{1,7}{50} \cdot 100\% = 3,4\%$; для $m_2(t)$, соответственно, $\frac{1,1}{60} \cdot 100\% = 1,8\%$.

Отметим, что по формулам Ланчестера [12] при минимальных эффективностях $m_1(4) = 30,1; m_2(4) = 41,1$; при максимальных эффективностях $m_1(4) = 28,4; m_2(4) = 39,9$; т. е. результаты достаточно близкие к полученным по формулам (14).

5 ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

В данном разделе речь пойдет о потребном наряде сил, представляющим собой первоначальное количество единиц $N_1(N_2)$, при котором средние численности сторон достигнут заданных значений к данному моменту времени t , а также о времени (потребное время), по истечении которого число непораженных единиц обеих сторон будет не более (не менее) заданного, и о коэффициенте превосходства, согласно которому происходит оценка превосходства одной стороны над другой.

Пусть момент времени t , численности m_1 и m_2 в момент t и интервал Δt заданы. Тогда $k = \lceil t/\Delta t \rceil$ При этом

$$\begin{cases} m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \leq m_1 \leq m_1^{\text{II}}(k\Delta t), \\ m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \leq m_2 \leq m_2^{\text{II}}(k\Delta t). \end{cases}$$

Совершая « k » раз итерацию относительно правых и левых частей данных неравенств, последнюю систему преобразуем к виду:

$$\begin{cases} a_1 N_1 + a_2 N_2 \leq m_1 \leq b_1 N_1 + b_2 N_2, \\ c_1 N_1 + c_2 N_2 \leq m_2 \leq d_1 N_1 + d_2 N_2. \end{cases}$$

Преобразуем (25), используя формулы (20). Получим:

$$\begin{aligned} m_1^{\text{II}}((k+1)\Delta t) - m_2^{\text{II}}((k+1)\Delta t) &= m_1^{\text{II}}(k\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)} m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \Delta t - m_2^{\text{II}}(k\Delta t) + \\ &+ \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t) m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \Delta t = m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \left(1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t) \Delta t\right) - m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \left(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t) \Delta t\right). \end{aligned}$$

Отсюда условие превосходства стороны I:

$$\frac{m_1^{\text{II}}(k\Delta t)}{m_2^{\text{II}}(k\Delta t)} > \frac{1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t) \Delta t}{1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t) \Delta t}. \quad (26)$$

$$\text{Положим } \chi_1 = \frac{m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot \left(1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t) \Delta t\right)}{m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot \left(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t) \Delta t\right)} \text{ и}$$

назовем коэффициентом превосходства стороны I, если $\chi_1 > 1$; если $\chi_1 < 1$, то превосходство стороны II; если $\chi_1 = 1$ равновесие сил.

Заметим, что условие превосходства стороны II можно получить аналогично условию (26), используя (20). Тогда получим:

$$\frac{m_2^{\text{II}}(k\Delta t)}{m_1^{\text{II}}(k\Delta t)} > \frac{1 + \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t) \Delta t}{1 + \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t) \Delta t}. \quad (27)$$

Решая эту систему, находим множество точек (N_1, N_2) с целыми координатами, которые соответствуют потребному наряду сил обеих сторон в начальный момент времени, чтобы средние численности в момент t составили, соответственно, m_1 и m_2 боевых единиц.

Пусть задан интервал Δt . Не нарушая общности, оценим время t , при котором

$$m_1(t) \geq m_1, m_2(t) \geq m_2. \quad (24)$$

Из (22) с достаточной точностью можно считать, что $m_1(t) = m_1^{\text{II}}(k\Delta t)$ (или $m_1(t) = m_1^{\text{I}}(k\Delta t)$), аналогично $m_2(t) = m_2^{\text{II}}(k\Delta t)$ (или $m_2(t) = m_2^{\text{I}}(k\Delta t)$).

Сначала полагаем $k = 1$, находим, например, $m_1^{\text{II}}(\Delta t)$ и $m_2^{\text{II}}(\Delta t)$ и сравниваем полученные значения с m_1 и m_2 соответственно. Если выполнены неравенства (24), то $t = \Delta t$. В противном случае переходим к значению $k = k + 1$ и весь процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены неравенства (24). Как только это произойдет для некоторого « k », полагаем $t = k\Delta t$.

Для оценки превосходства, например, стороны I над стороной II в момент $k = (k + 1)\Delta t$ найдем разность:

$$m_1^{\text{II}}(k\Delta t) - m_1^{\text{I}}(k\Delta t) \quad (25)$$

Очевидно, эта разность положительна тогда и только тогда, когда имеется превосходство стороны I в момент времени $k = (k + 1)\Delta t$. Если разность (25) равна 0, то имеем равновесие сил.

$$\text{Положим } \chi_2 = \frac{m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot \left(1 + \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t) \Delta t\right)}{m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot \left(1 + \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t) \Delta t\right)}.$$

Тогда если $\chi_2 > 1$ – превосходство стороны II, если $\chi_2 < 1$ – превосходство стороны I, если $\chi_2 = 1$ – равновесие сил.

При $k = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{N_1 \cdot \left(1 + \alpha_{\min}^{(1)}(0) \Delta t\right)}{N_2 \cdot \left(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(0) \Delta t\right)}, \\ \chi_2 &= \frac{N_2 \cdot \left(1 + \alpha_{\min}^{(2)}(0) \Delta t\right)}{N_1 \cdot \left(1 + \alpha_{\max}^{(1)}(0) \Delta t\right)}. \end{aligned}$$

Для рассмотренного ранее числового примера получаем:

$$\chi_1 = \frac{50 \cdot (1 + 0,11)}{60 \cdot (1 + 0,15)} = 0,8, \quad \chi_2 = \frac{60 \cdot (1 + 0,1)}{50 \cdot (1 + 0,16)} = 1,13,$$

т. е. в начальный момент времени имеется превосходство стороны II.

Отметим, что в модели Ланчестера [14] коэффициент превосходства определяется как $\chi = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$, где

α_1, α_2 – постоянные во время всего боя эффективности сторон. При этом сам коэффициент превосходства также постоянен в течение боя. Поэтому можно сказать, что модель Ланчестера достаточно приближенно описывает боевые действия. В то же время предложенная в данной работе модель, ее характеристики и соответствующие коэффициенты превосходства достаточно гибко ориентированы на постоянно изменяющиеся условия боевых действий, в частности, зависимость их от времени и соответствующих средних численностей в любой момент времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена модель системного описания процесса боевых действий двух сторон с использованием системы дифференциальных уравнений Колмогорова, преобразованную в систему двух дифференциальных неравенств, решение которых находится по рекуррентной формуле с любой степенью точности. Сформулировано правило составления системы. Решение отличается достаточной простотой и наглядностью.

Сделана оценка основных характеристик системы, в том числе коэффициента превосходства, зависящего от времени, что существенно улучшает аналогичный показатель разных дифференциальных моделей и родственные модели.

Разработанный метод может использоваться во всех конфликтных ситуациях, заключающихся в противостоянии двух сторон: в юриспруденции (обвинение и защита), учебный процесс (правильно и неправильно поняты фрагменты знаний), в растениеводстве (борьба видов), политологии (полемика сторон), при конкуренции фирм путем использования рекламы на различные виды продукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London: Constable and Co, 1916. 243 p.
2. Helmbold R.L. Osipov: The 'Russian Lanchester'. *European Journal of Operations Research*. 1993. Vol. 65, No 2. pp. 278 – 288.
3. Dupuy T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. 2nd ed. Nova Publishers, 1998. 312 p.
4. Сазанова Л.А. Модель Ланчестера как дискретная управляемая система // *Международный журнал социальных и гуманитарных наук*. – 2016. – Т. 1, № 1. – С. 202 – 204.

5. Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. – 2011. – № 53. – С. 223 – 232.

6. Chen X.Y., Zhang A.C. Modeling and optimal control of a class of warfare hybrid dynamic systems based on Lanchester attrition model // *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. Article ID 481347. 7 p. – URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/481347> (дата обращения: 15.11.2019).

7. Lanchester model for three-way combat / M. Kress, J.P. Caulkins, G. Feichtinger, D. Grass, A. Seidl. *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 264 (1). pp. 46 54. – URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/481347> (дата обращения: 15.11.2019).

8. Гатина В.Д. Модели Ланчестера в профильном курсе «Информатика и ИКТ» // *Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании*. – 2016. – № 1 (39). – С. 278 – 283.

9. Буравлев А.И. Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сторон // *Вооружение и экономика*. 2009. – № 4 (8). – С. 4 – 8.

10. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // *Управление большими системами* : сб. тр. 2012. – № 37. – С. 25 – 62.

11. Taylor J., Brown G. Canonical Methods in the Solution of Variable. Coefficient Lanchester-Type Equations of. *Modern Warfare // Operations Research*. 1977. Vol. 24 (1):45. pp. 44 – 69.

12. Вентцель Е.С. *Исследование операций*. – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.

13. Ганичева А.В. Системный подход к процессу получения и формирования знаний // *В мире научных открытий*. – 2011. – № 12 (24). – С. 83 – 101.

14. Восканян А.Б., Ершова Г.И. *Военно-прикладная математика*. – М. : ВКА ПВО, 1983. – 188 с.

REFERENCES

1. Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable and Co, 1916. 243 p.
2. Helmbold R.L. Osipov: The 'Russian Lanchester'. *European Journal of Operations Research*, 1993, vol. 65, no. 2, pp. 278 – 288.
3. Dupuy T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. 2nd ed. Nova Publishers, 1998. 312 p.
4. Sazanova L.A. Model Lanchestera kak diskretnaia upravliaemaia sistema [Model of Lanchester as Discrete Control System]. *Mezhdunarodnyi zhurnal sotsialnykh i gumanitarnykh nauk* [International Journal of Humanities and Natural Sciences], 2016, vol. 1, no. 1, pp. 202 – 204.
5. Chuev V.Iu. Veroiatnostnaia model boia mnogochislennykh gruppировок [A Probabilistic Model of Military Operations of Numerous Groups]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of Moscow State Technical University. Natural Sciences], 2011, no. 53, pp. 223 – 232.
6. Chen X.Y., Zhang A.C. *Modeling and Optimal Control of a Class of Warfare Hybrid Dynamic Systems based*

on Lanchester Attrition Model. *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. Article ID 481347. 7 p. Available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/481347> (accessed: 15.11.2019).

7. Kress, M., J.P. Caulkins, G. Feichtinger, D. Grass, A. Seidl. Lanchester Model for Three-way Combat. *European Journal of Operational Research*, 2018, vol. 264 (1), pp. 46–54. Available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/481347> (accessed: 15.11.2019).

8. Gatina V.D. Modeli Lanchestera v profilnom kurse 'Informatika i IKT' [Lanchester Model in Majors Course 'Informatics and ICT']. *Informatsionno-kommunikatsionnye tekhnologii v pedagogicheskom obrazovanii* [Information and Communication Technologies in Teacher Education], 2016, no. 1 (39), pp. 278 – 283.

9. Buravlev A.I. Differentsialnoe uravnenie dlia kolichestvennogo sootnosheniia chislennostei protivoborstvuiushchikh storon [The Differential Equation for a Quantitative Parity Number the Contradictory Parties]. *Vooruzhenie i ekonomika* [Armament and Economics], 2009, no. 4 (8), pp. 4 – 8.

10. Novikov D.A. Ierarkhicheskie modeli voennykh deistvii [Hierarchical Models of Military Actions]. *Upravlenie bolshimi sistemami. Sb. tr.* [Proc. Large System Control], 2012, no. 37, pp. 25 – 62.

11. Taylor J., Brown G. Canonical Methods in the Solution of Variable. Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare. *Operations Research*, 1977, vol. 24 (1), pp. 44 – 69.

12. Ventsel E.S. *Issledovanie operatsii* [Operations Research]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1972. 552 p.

13. Ganicheva A.V. Sistemnyi podkhod k protsessu poluchenii i formirovaniia znanii [The System Approach to Process Receptions and Formation of Knowledge]. *V mire nauchnykh otkrytii* [Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture], 2011, no. 12 (24), pp. 83 – 101.

14. Voskanian A.B., Ershova G.I. *Voenno-prikladnaia matematika* [Military and Applied Mathematics]. Moscow, VKA PVO Publ., 1983. 188 p.