УДК 517.9:539.3:532.5

П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова, У.Д. Мизхер

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДА¹

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета. Заведующий кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. Имеет статьи и монографии в области аэрогидромеханики, аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: velmisov@ulstu.ru].

Покладова Юлия Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, окончила экономико-математический факультет УлГТУ. Доцент кафедры «Высшая математика» УлГТУ. Имеет статьи и монографии в области аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: pokladovau@inbox.ru].

Мизхер Усама Джавад, аспирант кафедры «Высшая математика» УлГТУ, окончил Университет Ди-Кар, бакалавриат (Ирак, г. Ди-Кар), Восточноукраинский национальный университет им. Владимира Даля, магистратуру (Украина, г. Луганск). Имеет статьи в области аэродинамики, аэрогидроупругости, математического моделирования. [e-mail: usama.mizher@gmail.com].

Аннотация

В работе предложены различные нелинейные математические модели, описывающие колебания трубопровода. Представлены модели, учитывающие только поперечную деформацию трубопровода, и модели, учитывающие продольную и поперечную деформации. Все модели описываются дифференциальными уравнениями в частных производных для неизвестных функций деформации. Численно-аналитическое решение основано на методе Бубнова-Галеркина. На основе модельных уравнений проведен численный эксперимент для различных параметров механической системы, который показал малое отличие динамических характеристик для различных моделей. Для одной из моделей построен функционал типа Ляпунова, на основе которого получены аналитические условия динамической устойчивости трубопровода. Предлагаются также математические модели динамики трубопровода с учетом запаздывания силовых и (или) инерционных характеристик.

Ключевые слова: трубопровод, деформация, динамика, устойчивость, нелинейная модель, дифференциальные уравнения в частных производных, метод функционалов Ляпунова.

doi:

MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR DYNAMICS OF THE PIPELINE

Petr Aleksandrovich Velmisov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor; graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Saratov State University; Head of the Department of Higher Mathematics at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles and monographs in the field of aerohydrodynamics, aerohydroelasticity, mathematical modeling. e-mail: velmisov@ulstu.ru.

Iulia Valerevna Pokladova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor; graduated from the Faculty of Economics and Mathematics of Ulyanovsk State Technical University; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at Ulyanovsk State Technical University; an author of articles and monographs in the field of aerohydroelasticity, mathematical modeling. e-mail: pokladovau@inbox.ru.

Mizher Usama Jawad, Postgraduate Student at the Department of Higher Mathematics of USTU; graduated from the University of Thi-Qar, College of Engineering Governorate, Bachelor (Iraq, Thi-Qar); Vladimir Dahl East Ukrainian National University, Master's program (Ukraine, Lugansk); an author of articles in the field of aerodynamics, aerohydroelasticity, mathematical modeling. e-mail: usama.mizher@gmail.com.

Abstract

In the work, various nonlinear mathematical models are proposed that describe pipeline vibrations. Models are presented that take into account only the transverse deformation of the pipeline, and models that take into account the longitudinal and transverse deformations. All models are described by partial differential equations for unknown strain functions. The numerical-analytical solution is based on the Bubnov-Galerkin method. Based on model equations, a numerical experiment was conducted for various parameters of a mechanical system, which showed a small difference in dynamic characteristics for different models. A functional of the Lyapunov type was constructed for one of the models, on the basis of which the analytical conditions for the dynamic stability of the pipeline were obtained. Also, mathematical models of the dynamics of the pipeline are proposed taking into account the delay of power and (or) inertial characteristics.

Key words: pipeline, deformation, dynamics, stability, nonlinear model, partial differential equations, Lyapunov functional method.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики и устойчивости составных частей конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения при аэрогидродинамическом воздействии является актуальной проблемой во многих отраслях техники. Широкий круг исследований включает в себя описание колебаний и распространения волн в трубопроводах, содержащих газожидкостную среду [1–32]. В работах Мовчана А.А. [1], Томпсона Дж.М.Т. [2], Феодосьева В.И. [3], Челомея С.В. [4] и др. исследуется динамика трубопроводов. Среди последних исследований по динамике и устойчивости трубопроводов и их элементов, при протекании внутри них потока жидкости или газа следует отметить исследования ученых Болотина В.В. [5], Овчинникова В.Ф., Смирнова Л.В. [6], Могилевича Л.И. [7–9], Ильгамова М.А. [10–12] и других [13–31]. В работе [7] рассмотрены проблемы движения вязкой несжимаемой жидкости в упругой цилиндрической оболочке при воздействии ряда факторов, в [10] рассматривается статический линейный изгиб трубопровода. В работе [13] исследовано динамическое поведение гибких трубопроводов с протекающей жидкостью. В [5] проводится систематическое исследование устойчивости участка трубопровода, наполненного невязкой движущейся жидкостью. В работах [14, 15] представлены нелинейные модели, описывающие динамику упругих элементов при взаимодействии с жидкостью. В [16, 17] проводится исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий.

В данной работе предложены различные модельные уравнения, описывающие динамику трубопровода с протекающей в нем жидкостью (газом). Скорость газожидкостной среды зависит от времени. На основе предложенных уравнений проведен численный эксперимент по исследованию динамики трубопровода. С помощью построенного функционала исследуется динамическая устойчивость трубопровода.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим задачу о динамике трубопровода с протекающей в нем жидкостью.

Рис. 1. Трубопровод с протекающей в нем жидкостью

Приведем предлагаемые нелинейные математические модели, описывающие динамику трубопровода. Запишем выражения для продольного усилия $G(x, t)$ и изгибающего момента $M(x, t)$:

$$G(x, t) = EF \left(u_x(x, t) + \frac{1}{2} w_x^2(x, t) \right),$$

$$M(x, t) = EJ w_{xx}(x, t) \left[1 + 2 \left(u_x(x, t) + \frac{1}{2} w_x^2(x, t) \right) \right]^{-3/2}. \quad (1)$$

В некоторых моделях изгибающий момент согласно (1) определяется выражением

$$M(x, t) = EJ w_{xx}(x, t) \left[1 - 3 \left(u_x(x, t) + \frac{1}{2} w_x^2(x, t) \right) \right].$$

В линейном приближении выражение для изгибающего момента имеет вид: $M(x, t) = EJ w_{xxx}(x, t)$.

1) Модель, учитывающая продольную и поперечную деформации (двухстепенная модель). В данной модели изгибающий момент учитывается в линейном приближении, а продольное усилие – в нелинейном. Учет демпфирования продольного усилия и изгибающего момента осуществляется в линейном приближении.

$$\begin{cases} -EF\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_x + (m_0 + m_*)u_{tt} - \\ -\alpha_1 u_{xxt} + g(x, t, u, u_t) = 0, \\ -EF\left[w_x\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x + (m_0 + m_*)w_{tt} + EJw_{xxxx} + \\ + (N(t) + m_*U^2(t))w_{xx} + 2U(t)m_*w_{xt} + \\ + \alpha_2 w_{xxxxt} + m_*U_t(t)w_x + f(x, t, w, w_t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$, $w(x, t)$ – продольная и поперечная деформации в сечении x в момент времени t , $x \in [0, l]$; E – модуль упругости материала трубопровода; J – момент инерции ($J = \pi/4(r_0^4 - r_*^4)$); F – площадь сечения трубопровода ($F = \pi(r_0^2 - r_*^2)$); l – длина трубопровода; r_0 , r_* – внешний и внутренний радиусы трубопровода; ρ_0 – плотность материала трубопровода; m_0 – погонная масса трубопровода ($m_0 = \rho_0 F$); $U(t)$, ρ_* , m_* – скорость, плотность и погонная масса жидкости ($m_* = \rho_* \pi r_*^2$); $N(t)$ – сжимающее (растягивающее) усилие; α_1 , α_2 – коэффициенты демпфирования; $g(x, t, u, u_t)$, $g(x, t, w, w_t)$ – некоторые внешние воздействия на трубопровод; индексы x , t обозначают частные производные по x , t соответственно.

2) Двухстепенная модель, учитывающая продольное усилие и его демпфирование в нелинейном приближении, а изгибающий момент и его демпфирование – в линейном:

$$\begin{cases} -EF\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_x + (m_0 + m_*)u_{tt} - \\ -\alpha_1\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_{xt} + g(x, t, u, u_t) = 0, \\ -EF\left[w_x\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x + (m_0 + m_*)w_{tt} + \\ + EJw_{xxxx} - \alpha_1\left[w_x\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_{xt} + \\ + (N(t) + m_*U^2(t))w_{xx} + 2U(t)m_*w_{xt} + \\ + \alpha_2 w_{xxxxt} + m_*U_t(t)w_x + f(x, t, w, w_t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

3) Двухстепенная модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента и продольного усилия, нелинейность их демпфирования, а также нелинейность центробежной силы:

$$\begin{cases} -EF\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_x + (m_0 + m_*)u_{tt} - \\ -\alpha_1\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_{xt} + g(x, t, u, u_t) = 0, \\ -EF\left[w_x\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x + (m_0 + m_*)w_{tt} + \\ + EJ\left[w_{xx}\left[1 - 3\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]\right]_{xx} - \\ -\alpha_1\left[w_x\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_{xt} + \\ + m_*U^2(t)w_{xx}\left[1 - 3\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right] + \\ + N(t)w_{xx} + 2U(t)m_*w_{xt} + \\ + \alpha_2\left[w_{xx}\left[1 - 3\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]\right]_{xxt} + \\ + m_*U_t(t)w_x + f(x, t, w, w_t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

4) Одноступенная модель, учитывающая нелинейности, возникающие вследствие удлинения трубопровода:

$$\begin{aligned} & (m_0 + m_*)\ddot{w} + EJw'''' + (N(t) + m_*U^2(t))w'' + \\ & + 2U(t)m_*\dot{w}' + \alpha_2\dot{w}'''' + m_*\dot{U}(t)w' - \\ & - w''\left[\mu \int_0^l w'^2(x, t)dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2(x, t)dx\right] + \\ & + f(x, t, w, \dot{w}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь μ , ν – некоторые положительные постоянные коэффициенты, $\mu = \frac{EF}{2l(1+K)}$, где $K=0$ для неподвижных концов трубопровода; точка и штрих обозначают производные по t и x соответственно; ν – коэффициент демпфирования.

5) Одноступенная модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента и центробежной силы:

$$\begin{aligned} & (m_0 + m_*)\ddot{w} + \left[EJw''\left(1 - \frac{3}{2}(w')^2\right)\right]'' + \\ & + m_*U^2(t)w''\left(1 - \frac{3}{2}(w')^2\right) + N(t)w'' + \\ & + 2m_*U(t)\dot{w}' + m_*\dot{U}(t)w' + \\ & + \alpha_2\left[\dot{w}''\left(1 - \frac{3}{2}(w')^2\right) - 3w'w''\dot{w}'\right]'' + \\ & + f(x, t, w, \dot{w}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

б) Одностепенная нелинейная модель, учитывающая нелинейность изгибающего момента, центробежной силы и демпфирования изгибающего момента:

$$\begin{aligned} (m_0 + m_*) \ddot{w} + \left[EJw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + \\ + m_* U^2(t) w'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) + N(t) w'' + \\ + 2m_* U(t) w' + m_* \dot{U}(t) w' + \\ + \alpha_2 \left[w'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) - 3w'w''\dot{w}' \right]'' + \\ + f(x, t, w, \dot{w}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИИ

а) Искомые функции деформации $u(x, t)$, $w(x, t)$ для систем (2)–(4), описывающих продольно-поперечные колебания трубопровода, ищем в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) h_k(x),$$

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x),$$

где $\{h_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $\{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – полные на $[0, l]$ системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления концов трубопровода. Например, для шарнирного закрепления концов пластины ($w=0$, $w''=0$ при $x=0$, $x=l$) можно положить

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \lambda_k x, \text{ где } \lambda_k = \frac{\pi k}{l}.$$

Согласно методу Галеркина, из условия ортогональности невязки первого уравнения к системе базисных функций $\{h_k(x)\}_{k=1}^n$, второго уравнения к системе базисных функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^n$ получим нелинейную систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $u_k(t)$, $w_k(t)$.

Необходимо также задать начальные условия $w(x, 0) = f_1(x)$, $\dot{w}(x, 0) = f_2(x)$, $u(x, 0) = f_3(x)$, $\dot{u}(x, 0) = f_4(x)$. Согласно методу Галеркина, с учетом ортогональности систем функций $\{h_k(x)\}_{k=1}^n$, $\{g_k(x)\}_{k=1}^n$ получим начальные условия для $u_k(t)$, $w_k(t)$:

$$w_k(0) = \int_0^l f_1(x) g_k(x) dx / \int_0^l g_k^2(x) dx,$$

$$\dot{w}_k(0) = \int_0^l f_2(x) g_k(x) dx / \int_0^l g_k^2(x) dx;$$

$$u_k(0) = \int_0^l f_3(x) h_k(x) dx / \int_0^l h_k^2(x) dx,$$

$$\dot{u}_k(0) = \int_0^l f_4(x) h_k(x) dx / \int_0^l h_k^2(x) dx.$$

Полученная задача Коши является основой для проведения численного эксперимента.

б) Решение $w(x, t)$ уравнений (5)–(7), описывающих только поперечные колебания, ищется в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(x), \text{ где } \{g_k(x)\}_{k=1}^\infty - \text{ полная}$$

на $[0, l]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям.

Согласно методу Галеркина, получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_k(t)$. Необходимо также задать начальные условия $w(x, 0) = f_1(x)$, $\dot{w}(x, 0) = f_2(x)$. Согласно методу Галеркина, получим начальные условия для $w_k(t)$:

$$w_k(0) = \int_0^l f_1(x) g_k(x) dx / \int_0^l g_k^2(x) dx,$$

$$\dot{w}_k(0) = \int_0^l f_2(x) g_k(x) dx / \int_0^l g_k^2(x) dx.$$

Таким образом, получена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, на основе которой проведен численный эксперимент.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проведен численный эксперимент для двухстепенной модели, описываемой системой (2).

Пример. Рассмотрим шарнирное закрепление концов трубопровода $u(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \sin \lambda_k x$,

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \lambda_k x, \text{ где } \lambda_k = \pi k / l. \text{ Пусть}$$

трубопровод изготовлен из полипропилена ($\rho_0 = 930$, $E = 1,3 \cdot 10^9$), рабочая среда – вода ($\rho_* = 1000$). Для значений параметров: $n = 3$, $r_0 = 0,055$, $r_* = 0,05$, $l = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,05$, $g(x, t, u, \dot{u}) = 0$, $f(x, t, w, \dot{w}) = 0$, $N(t) = 1000$, $v = 0$ (все значения приведены в системе СИ) с помощью системы Mathematica 12.0 получим графики функций деформаций $u(x, t)$, $w(x, t)$ в точке $x_0 = 1,2$ в зависимости от заданного закона изменения скорости рабочей среды.

На рисунке 2, соответствующем периодическому изменению скорости потока жидкости $U(t) = 10 + 10 \sin 3t$, наблюдаются устойчивые колебания трубопровода. На рисунке 3, соответствующем линейному увеличению скорости потока $U(t) = 10 + 1,5t$, при достижении скорости значения $U(t) \approx 30$ ($t \approx 12$) наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний.

Для моделей (3), (5)–(7) как одностепенных, так и двухстепенных, также был проведен численный эксперимент, в результате которого были получены графики

деформаций $w(x, t)$, $u(x, t)$ ($u(x, t)$ – для двухступенных), мало отличающиеся друг от друга, а также от графиков, представленных на рисунках 2 и 3, соответствующих модели (2).

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Проведем аналитическое исследование устойчивости на основе модели вида (5).

$$\begin{aligned} & \tilde{M} \ddot{w} + D w'''' + \eta(t) w'' + 2U(t) m_* \dot{w}' + \alpha_2 \dot{w}'''' + \\ & + \beta_1 \dot{w} + \beta_0 w + m_* \dot{U}(t) w' - \\ & - w'' \left(\mu \int_0^l w'^2(x, t) dx + \nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2(x, t) dx \right) + \\ & + f_0(t, w) + f_1(t, w) \dot{w} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ – коэффициенты жесткости и демпфирования основания (упрочняющего слоя, слоя обжатия и т. д.). Введены обозначения: $\tilde{M} = m_0 + m_*$,

$$D = EJ, \eta(t) = N(t) + m_* U^2(t).$$

Введем в рассмотрение функционал:

$$\begin{aligned} J(t) = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[\tilde{M} \dot{w}^2 + D w''^2 - \eta(t) w'^2 + \beta_0 w^2 \right] dx + \\ & + \xi \left(2 \tilde{M} w \dot{w} + \alpha_2 w''^2 + \beta_1 w^2 \right) dx + \\ & + \int_0^l \left(\int_0^w [f_0(z, t) + \xi z f_1(z, t)] dz \right) dx + \\ & + \left(\frac{1}{4} \mu + \frac{1}{2} \xi \nu \right) \left(\int_0^l w'^2 dx \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ξ – некоторая положительная константа.

Будем считать, что концы трубопровода закреплены жестко или шарнирно ($w = w' = 0$ или $w = w'' = 0$). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & - \int_0^l \left[\alpha_2 \dot{w}''^2 + \frac{1}{2} \dot{\eta}(t) w'^2 + \beta_1 \dot{w}^2 + m_* \dot{U}(t) w' \dot{w} \right] dx + \\ & + \xi \int_0^l \left[-\tilde{M} \dot{w}^2 + D w''^2 - \eta(t) w'^2 + \beta_0 w^2 - 2U(t) m_* w' \dot{w} \right] dx - \\ & - \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w'^2 dx \right)^2 - \xi \mu \left(\int_0^l w'^2 dx \right)^2 - \int_0^l \left[\xi w f_0(t, w) + f_1(t, w) \dot{w} - \int_0^w \left[\xi \frac{\partial f_1(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial f_0(t, z)}{\partial t} \right] dz \right] dx. \end{aligned}$$

Рис. 2. Графики функций $u(x_0, t)$, $w(x_0, t)$ при скорости потока жидкости $U(t) = 10 + 10 \sin 3t$

Рис. 3. Графики функций $u(x_0, t)$, $w(x_0, t)$ при скорости потока жидкости $U(t) = 10 + 1,5t$

Пусть выполняются условия:

$$\begin{aligned} f_1(t, w) &\geq 0, \quad \int_0^w [f_0(t, z) + \xi z f_1(t, z)] dz \geq 0, \\ \xi w f_0(t, w) - \int_0^w \left[\xi z \frac{\partial f_1(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial f_0(t, z)}{\partial t} \right] dz &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (9), (10) справедливы оценки:

$$\begin{aligned} J(t) &\geq \frac{1}{2} \int_0^l [\tilde{M} \dot{w}^2 + w'^2 (-\eta(t) + \lambda(D + \xi \alpha_2)) + 2\xi \tilde{M} w \dot{w} + (\beta_0 + \xi \beta_1) w^2] dx, \\ \frac{\partial J}{\partial t} &\leq - \int_0^l \left[(\beta_1 + \theta \alpha_2 - \xi \tilde{M}) \dot{w}^2 + m_* (\dot{U}(t) - 2\xi U(t)) \dot{w} w' + \left(\xi \lambda D + \frac{1}{2} \dot{\eta}(t) - \xi \eta(t) \right) w'^2 + \xi \beta_0 w^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение квадратичные формы:

$$\begin{aligned} \omega_1(\dot{w}, w') &= \tilde{M} \dot{w}^2 + \\ &+ w'^2 (-\eta(t) + \lambda(D + \xi \alpha_2)) + 2\xi \tilde{M} w \dot{w}, \\ \omega_2(\dot{w}, w') &= (\beta_1 + \theta \alpha_2 - \xi \tilde{M}) \dot{w}^2 + \\ &+ m_* (\dot{U}(t) - 2\xi U(t)) \dot{w} w' + \\ &+ \left(\xi \lambda D + \frac{1}{2} \dot{\eta}(t) - \xi \eta(t) \right) w'^2. \end{aligned}$$

Если эти квадратичные формы являются положительно определенными, то $J(t) \geq 0$, $\partial J / \partial t, J(t) \leq J(0)$, т. е.

$$\frac{1}{2} \int_0^l [\omega_1(\dot{w}, w') + (\beta_0 + \xi \beta_1) w^2] dx \leq J(0). \quad (11)$$

Из неравенства (11) следует устойчивость функций $w(x, t)$, $w'(x, t)$ в среднем на $[0, l]$ относительно начальных значений $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $w''(x, 0)$. Условия устойчивости – условия положительности квадратичных форм $\omega_1(\dot{w}, w')$, $\omega_2(\dot{w}, w')$:

$$\begin{aligned} \lambda(D + \xi \alpha_2) - \eta(t) &> \xi^2 \tilde{M}, \quad \beta_1 + \theta \alpha_2 - \xi \tilde{M} > 0, \\ (\beta_1 + \theta \alpha_2 - \xi \tilde{M}) &\left(\xi \lambda D + \frac{1}{2} \dot{\eta}(t) - \xi \eta(t) \right) > \\ &> m_*^2 \left(\frac{1}{2} \dot{U}(t) - \xi U(t) \right)^2. \end{aligned}$$

При $\xi = 0$ получим известные условия:

$$N(t) < \lambda D - m_* U^2(t),$$

$$2(\beta_1 + \theta \alpha_2) (\dot{N}(t) + 2m_* U(t) \dot{U}(t)) > m_*^2 \dot{U}^2(t).$$

Используя построенный функционал $J(t)$ и его производную $\partial J / \partial t$, можно получать различные виды условий устойчивости, проводя различные преобразования и оценки для $J(t)$ и dJ / dt .

Замечание: Приведем пример функций $f_0(t, w)$, $f_1(t, w)$, удовлетворяющие условиям (9):

$$f_0(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{0k}(t) w^{2k+1},$$

Имеют место неравенства Рэля [33]:

$$\begin{aligned} \int_0^l w''^2 dx &\geq \lambda \int_0^l w'^2 dx, \\ \int_0^l \dot{w}''^2 dx &\geq \theta \int_0^l \dot{w}'^2 dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где λ, θ – некоторые положительные числа.

$$f_1(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{1k}(t) w^{2k},$$

$$\begin{aligned} \text{при этом } f_{1k}(t) &\geq 0, f_{0k}(t) + \xi f_{1k}(t) \geq 0, \\ \xi f_{0k}(t) - \frac{1}{2k+2} (\dot{f}_{0k}(t) + \xi \dot{f}_{1k}(t)) &\geq 0, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Для моделирования динамики трубопровода предлагается использовать математические модели с учетом запаздывания силовых характеристик (изгибающего момента и продольного усилия)

$$\begin{cases} \tilde{M} u_{tt}(x, t) - G_x(x, t + \tau_1) + \\ + g(x, t, u, w, u_t, w_t, u_x, w_x, w_{xt}, w_{xx}) = 0, \\ \tilde{M} w_{tt}(x, t) - [w_x(x, t) G(x, t + \tau_1)]_x + M_{xx}(x, t + \tau_2) + \\ + f(x, t, u, w, u_t, w_t, u_x, w_x, w_{xt}, w_{xx}) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\tilde{M} = m_0 + m_*$; τ_1, τ_2 – запаздывания продольного усилия и изгибающего момента; M, G задаются формулами (1). При разложении $G(x, t + \tau_1)$ и $M(x, t + \tau_2)$ в ряды по степеням τ_1 и τ_2 в первом приближении получим систему уравнений (4), в которой параметры запаздывания $EF\tau_1$ и $EF\tau_2$ играют роль коэффициентов трения α_1 и α_2 .

Если предположить запаздывание инерционных характеристик, то в (12) следует заменить $u_t(x, t)$, $w_t(x, t)$ на $u_t(x, t + \tau_3)$, $w_t(x, t + \tau_4)$, тогда при разложении в ряды по степеням τ_3 и τ_4 в уравнениях (12) возникнут дополнительные слагаемые $u_{ttt}(x, t)$, $w_{ttt}(x, t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены различные нелинейные математические модели, описывающие колебания трубопровода. На основе модельных уравнений проведен численный эксперимент при различных параметрах механической системы, который показал малое отличие

динамических характеристик для различных моделей. Для одной из моделей построен функционал типа Лапунова, на основе которого получены аналитические условия динамической устойчивости трубопровода. Обсуждаются модели с запаздыванием силовых и (или) инерционных характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мовчан А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика. – 1965. – Вып. 4. – С. 760–762.
2. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике : пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
3. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – 1951. – Т. 10. – С. 169–170.
4. Челомей С.В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. Сер. «Механика». – 1980. – Т. 252, № 2. – С. 307–310.
5. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 174–184.
6. Численное моделирование динамического деформирования пространственного трубопровода с жидкостью при локальном ударном нагружении / С.В. Зефилов, А.В. Кочетков, В.Ф. Овчинников, А.О. Савихин, Л.В. Смирнов, А.В. Яскеляин // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – № 75 (2). – С. 152–159.
7. Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. The dynamics of viscous incompressible flow inside elastic pipe // Техническое регулирование в транспортном строительстве. – 2018. – № 6 (32). – С. 69–73.
8. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, с учетом рассеяния энергии // Вестник Московского авиационного института. – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 186–195.
9. Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И. Моделирование волн деформаций в физически нелинейной оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость // Тр. МАИ. – 2013. – № 69. – С. 5.
10. Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 100–112.
11. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Изгиб длинного трубопровода, находящегося в очень вязкой жидкости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 1. – С. 7–12.
12. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. – М. : Наука, 1991. – 200 с.
13. Васина В.Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестник Московского энергетического института. – 2007. – № 1. – С. 1–11.
14. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. – 2014. – V. 7. – No. 6. – pp. 1133–1148.
15. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement. 2009. pp.424–432.
16. Velmisov P.A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time // Rev. Mat. Estat., Sao Paulo, 19. 2001. pp.159–178.
17. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2004. – № 4 (28). – С. 26–29.
18. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. V. 14. pp. 2986–2993.
19. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // Journal of Fluids and Structures. – 2015. – V. 55. – pp. 204–217.
20. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. – 2016. – V. 63. – pp. 120–139.
21. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dynamic stability of piped conveying fluid // J. Sound and Vibr. – 1974. – V. 33. – pp. 267–294.
22. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Yu.V. Stability of solutions of initial-boundary value problems in aerohydroelasticity // AIP Conference Proceedings. 2018. – V. 2048. – Iss. 1. – pp. 040011-1–040011-10.
23. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
24. Вельмисов П.А., Васильева А.А., Семенова Е.П. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов : тр. 7 Междунар. конф., Ульяновск, 2–5 февраля 2009 г. – Ульяновск : УлГУ, 2009. – С. 68–70.
25. Вельмисов П.А., Гладун А.В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 89–97.
26. Вельмисов П.А., Киреев С.В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 200 с.
27. Вельмисов П.А., Корнеев А.В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 1 (39). – С. 63–73.
28. Вельмисов П.А., Корнеев А.В., Киреев С.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 2. – С. 106–114.

29. Вельмисов П.А., Логинов Б.В., Милушева С.Д. Исследование устойчивости трубопровода // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклады и научни съобщения. XXI национална школа. – Болгария, Варна, 1995. – С. 299–304.

30. Вельмисов П.А., Манжосов В.К. Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 204 с.

31. Гладун А.В., Вельмисов П.А. О построении управления колебаниями трубопровода // Вестник УлГТУ. – 2019. – № 2 (86). – С. 29–37.

32. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М. : Мир, 1978. – 336 с.

33. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М. : Наука, 1968. – 503 с.

REFERENCES

1. Movchan A.A. Ob odnoi zadache ustoichivosti trubyy pri protekanii cherez nee zhidkosti [On a Stability Problem of a Pipeline Containing Flowing Fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Informatics], 1965, iss. 4, pp. 760–762.

2. Tompson J.M.T. *Neustoichivost i katastrofy v nauke i tekhnike. Per. s angl.* [Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1985. 254 p.

3. Feodosiev V.I. O kolebaniyakh i ustoichivosti trubyy pri protekanii cherez nee zhidkosti [On Vibration and Stability of a Pipeline Containing Flowing Fluid]. *Inzh. sb.* [Engineering Proc. of the Academy of Sciences of the USSR], 1951, vol. 10, pp. 169–170.

4. Chelomei S.V. O dinamicheskoy ustoichivosti uprugikh sistem [On Dynamic of Elastic Systems]. *Dokl. AN SSSR. Ser. Mekhanika* [Proc. of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics Series], 1980, vol. 252, no. 2, pp. 307–310.

5. Bolotin V.V., Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. Ustoichivost uchastka truboprovoda s uprugoi oporoi [Stability of a Pipeline Section with an Elastic Support]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids. Proc. of the Russian Academy of Sciences.], 2009, no. 1, pp. 174–184.

6. Zefirov S.V., Kochetkov A.V., Ovchinnikov V.F., Savikhin A.O., Smirnov L.V., Iaskeliain A.V. Chislennoe modelirovanie dinamicheskogo deformirovaniya prostranstvennogo truboprovoda s zhidkostiu pri lokalnom udarnom nagruzhении [Numerical Simulation of Dynamic Deformation of a Spatial Pipeline with a Liquid under Local Shock Loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2013, no. 75 (2), pp. 152–159.

7. Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. The Dynamics of Viscous Incompressible Flow Inside Elastic Pipe. *Tekhnicheskoe regulirovanie v transportnom stroitelstve* [Technical Regulation in Transport Construction], 2018, no. 6 (32), pp. 69–73.

8. Blinkova A.Iu., Blinkov Iu.A., Mogilevich L.I. Nelineinye volny v tsilindricheskikh obolochkakh, sodержashchikh

viaskuiu neszhimaemuiu zhidkost, s uchetom rasseianiia energii [Nonlinear Waves in Cylindrical Shells Containing a Viscous Incompressible Liquid, Taking into Account Energy Scattering]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta* [Bulletin of the Moscow Aviation Institute], 2013, vol. 20, no. 3, pp. 186–195.

9. Blinkov Iu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I. Modelirovanie voln deformatsii v fizicheski nelineinoy obolochke, sodержashchei viaskuiu neszhimaemuiu zhidkost [Deformation Waves Simulation in a Physically Non-linear Shell Containing a Viscous Incompressible Fluid]. *Tr. MAI* [Proc. of MAI], 2013, no. 69, pp. 5.

10. Ilgamov M.A., Iulmukhametov A.A. Priamaia i obratnaia zadachi izgiba truboprovoda [Direct and Inverse Problems of Pipeline Bending]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Bull. of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics], 2017, no. 3, pp. 100–112.

11. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Izgib dlinnogo truboprovoda, nakhodiashchegosya v ochen viaskoi zhidkosti [Bending of a Long Pipeline in a Very Viscous Liquid]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings], 2009, no. 1, pp. 7–12.

12. Ilgamov M.A. *Vvedenie v nelineinuiu gidrouprugost* [Introduction to Non-linear Hydroelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 200 p.

13. Vasina V.N. Parametricheskie kolebaniia uchastka truboprovoda s protekaiushchei zhidkostiu [Parametric Oscillations of the Pipeline Division with Flowing Liquid]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta* [Bulletin of Moscow Power Engineering Institute], 2007, no. 1, pp. 1–11.

14. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid Structure Interaction Problem with Changing Thickness Beam and Slightly Compressible Fluid. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S*, 2014, vol. 7, no. 6, pp. 1133–1148.

15. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. A Stability Estimate for Fluid Structure Interaction Problem with Non-Linear Beam. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement*. 2009. pp.424–432.

16. Velmisov P.A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the Asymptotic Stability of a Pipeline in the Presence of Delay in Time. *Rev. Mat. Estat.*, Sao Paulo, 2001, no. 19, pp.159–178.

17. Velmisov P.A., Pokladova Iu.V. Issledovanie dinamiki truboprovoda s uchetom zapazdyvaniia vneshnikh vozdеistvii [The Investigation of Pipeline Dynamics Subject to External Action Lagging]. *Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bull. of Ulyanovsk State Technical University], 2004, no. 4 (28), pp. 26–29.

18. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 2986–2993.

19. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and Stability of a Flexible Pinned-Free Cylinder in Axial Flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2015, vol. 55, pp. 204–217.

20. Mditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a Partially Confined, Discharging, Cantilever Pipe with Reverse External Flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2016, vol. 63, pp. 120–139.

21. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dynamic Stability of Piped Conveying Fluid. *J. Sound and Vibr.*, 1974., vol. 33, pp. 267–294.

22. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Iu.V. Stability of Solutions of Initial-Boundary Value Problems in Aerohydroelasticity. *AIP Conference Proceedings*. 2018, vol. 2048, iss. 1, pp. 040011-1–040011-10.

23. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoychivosti* [Nonconservative Problems of the Elastic Stability Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 339 p.

24. Velmisov P.A., Vasileva A.A., Semenova E.P. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki uprugikh elementov pri aerogidrodinamicheskom vozdествii [Mathematical Modeling of Dynamics of Elastic Elements with Hydrodynamic Effects]. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh, ekonomicheskikh, tekhnicheskikh, sotsialnykh sistem i protsessov. Tr. 7 Mezhdunar. konf., Ulyanovsk, 2-5 fevralia 2009 g.* [Proc. of the 7th Int. Conf. Mathematical Modeling of Physical, Economic, Technical, Social Systems and Processes]. Ulyanovsk, UISU Publ., 2009, pp. 68–70.

25. Velmisov P.A., Gladun A.V. Ob upravlenii dinamikoi truboprovoda [On Control of Pipeline Dynamics]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle-Volga Mathematical Society Journal], 2016, vol. 18, no. 4, pp. 89–97.

26. Velmisov P.A., Kireev S.V. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh staticheskoi neustoychivosti uprugikh elementov konstruksii pri*

aerogidrodinamicheskom vozdествii [Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Elements of Constructions upon Aerohydrodynamic Influence]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2011. 200 p.

27. Velmisov P.A., Korneev A.V. Matematicheskoe modelirovanie v zadache o dinamicheskoi ustoychivosti truboprovoda [Mathematical Modeling in the Problem of Dynamic Stability of the Pipeline]. *Avtomatizatsiia protsessov upravleniia* [Automation of Control Processes], 2015, no. 1 (39), pp. 63–73.

28. Velmisov P.A., Korneev A.V., Kireev S.V. Issledovanie dinamicheskoi ustoychivosti truboprovoda [Investigation of Dynamic Stability of the Pipeline]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle-Volga Mathematical Society Journal], 2016, vol. 18, no. 2, pp. 106–114.

29. Velmisov P.A., Loginov B.V., Milusheva S.D. Issledovanie ustoychivosti truboprovoda [Investigation of the Pipeline Stability]. *Prilozhenie na matematikata v tekhnikata: Sb. dokladi i nauchni sobshcheniia. XXI natsionalnaia shkola* [Applied Mathematics and Engineering: Proc. of the 21th National School]. Bolgariya, Varna, 1995, pp. 299–304.

30. Velmisov P.A., Manzhosov V.K. *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamiki vibroudarnykh i aerouprugikh sistem* [Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Vibro-Shock and Aeroelastic Systems]. Ulyanovsk, UISTU Publ., 2014. 204 p.

31. Gladun A.V., Velmisov P.A. *O postroenii upravleniia kolebaniiami truboprovoda* [On Construction of Control of Pipeline Fluctuations]. *Vestnik UIGTU* [Bull. of UISTU], 2019, no. 2 (86), pp. 29–37.

32. Shmidt G. *Parametricheskie kolebaniia* [Parametric Oscillations]. Moscow, Mir Publ., 1978. 336 p.

33. Kollatts L. *Zadachi na Sobstvennye Znacheniiia* [Eigenvalue Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 503 p.