УДК 629.1.03

DOI 10.35211/1990-5297-2021-9-256-32-37

*В. В. Дяшкин-Титов¹, Н. С. Воробьева¹, В. В. Жога²***МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ШЕСТИМАССОВОЙ СИСТЕМЫ
МЕХАНИЗМА МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ***¹Волгоградский государственный аграрный университет²Волгоградский государственный технический университет,
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники,
Университет Иннополис, г. Иннополис

c_43.52.00@mail.ru

Работа посвящена построению математической модели динамики манипулятора параллельной структуры с тремя управляемыми степенями свободы, основанной на приведении кинетической энергии манипулятора к квадратичной форме относительно трех независимых обобщенных координат. Представлены сравнительные результаты математического моделирования.

Ключевые слова: манипулятор параллельной структуры, трипод, уравнения динамики.

*V. V. Dyashkin-Titov¹, N. S. Vorob'eva¹, V. V. Zhoga²***MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF A SIX-MASS SYSTEM
OF A PARALLEL STRUCTURE MANIPULATOR MECHANISM**¹Volgograd State Agrarian University²Volgograd State Technical University,

Center for Technology Components of Robotics and Mechatronics, Innopolis University

The paper is devoted to the construction of a mathematical model of the dynamics of a parallel structure manipulator with three controlled degrees of freedom, based on the reduction of the kinetic energy of the manipulator to a quadratic form relative to three independent generalized coordinates, comparative results of mathematical modeling are presented.

Keywords: parallel structure manipulator, tripod, dynamic equations.

Введение

Манипуляторы параллельной структуры, в основе которых лежит механизм трипода, находят применение в технологических процессах, при выполнении которых требуются высокие скорости и ускорения рабочего органа – захвата [1–3]. Основная задача, решение которой определяет возможность реализации технологических процессов, состоит в обеспечении подхода рабочего органа манипулятора к требуемым точкам объекта обслуживания с заданной ориентацией захватного устройства [4]. При малом быстродействии для решения этой задачи используют кинематические модели. При динамическом синтезе управляющих сигналов рассматривают линеаризованные модели динамики манипуляционной системы, позволяющие провести синтез алгоритмов управления, с использованием хорошо разработанных методов теории управления линейными системами [5–7]. Однако справедливость приближенных моделей имеет место лишь в ограниченной области рабочей зоны манипулятора. Поэтому

управляющие силы, синтезированные по приближенной модели системы, описывают реальные процессы системы с большими ошибками. Выбор динамической модели, адекватно описывающей режимы работы манипуляционной системы, зависит от ее структурной схемы и задач динамики, которые необходимо решать. В процессе проектирования манипуляторов возникают следующие задачи:

- определение движущих сил, необходимых для реализации требуемых движений захвата. На основании данных расчетов производят выбор двигателей, обеспечивающих эти движения;
- определение динамических нагрузок в кинематических парах, необходимых для проведения прочностных расчетов;
- синтез оптимальных программных движений захвата;
- определение динамических ошибок, возникающих при реализации программных движений;
- динамический синтез управляющих сигналов, обеспечивающих программное движение.

© Дяшкин-Титов В. В., Воробьева Н. С., Жога В. В., 2021.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-210.2020.8, РФФИ и администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-48-340013 p_a.

Решение этих задач связано с интегрированием дифференциальных уравнений движения манипулятора.

Известно несколько способов составления дифференциальных уравнений движения манипуляторов: с использованием уравнений Лагранжа 2-го рода, уравнений Лагранжа с неопределенными множителями с дополнительными голономными связями, уравнений Аппеля, принципа наименьшего принуждения Гаусса, метода кинетостатики [8]. В последние годы широко применяются методы моделирования динамики технических систем с помощью автоматического формирования уравнений движения и численных методов их решения [9].

Постановка задачи

Кинематическая схема и фото манипулятора параллельной структуры приведены на рис. 1.

Манипулятор состоит из пространственного подвижного трех-стержневого механизма с исполнительными звеньями переменной длины l_1, l_2, l_3 . В качестве исполнительных звеньев используются линейные звенья с электрическим приводом постоянного тока (актуаторы). Корпуса актуаторов соединяются с помощью двух подвижных шарниров, расположенных на неподвижном основании ABC . Продольные оси трех актуаторов сходятся в одной точке посредством сферического шарнира, что обеспечивает повышенную жесткость манипулятора [10]. Число степеней свободы манипулятора равно трем.

Рис. 1. Кинематическая схема (а) и фото (б) манипулятора-трипода на неподвижном основании

Механическая система манипулятора состоит из шести масс – трех корпусов и трех штоков актуаторов. Корпуса актуаторов совершают вращательные движения вокруг неподвижной точки, штоки каждого актуатора совершают переносное сферическое и относительное прямолинейное поступательное. Векторы угловых скоростей корпусов актуаторов и их штоков одинаковые. С корпусом каждого исполнительного звена (рис. 1) связаны под-

вижные системы координат $O_i x_i y_i z_i$, ($i=1-3$) [11]. Ориентация каждой подвижной системы координат $O_i x_i y_i z_i$ относительно абсолютной системы $Oxyz$ задается двумя углами ϕ_i при повороте вокруг оси $O_i x_i$ и δ_i при повороте вокруг подвижной оси $O_i y_i$ (рис. 2).

Ориентация в пространстве подвижной системы координат, связанной с корпусом каждого исполнительного звена, не зависит от последовательности поворотов [12].

Рис. 2. Углы поворота подвижной системы координат исполнительных звеньев

Обобщенными координатами манипулятора являются длины исполнительных звеньев $l_k(t)$ и углы $\delta_i(t)$, $\varphi_i(t)$, ($i=1-3$) поворотов исполнительных цилиндров относительно абсолютной системы координат. Три координаты являются независимыми. На координаты наложены голономные стационарные связи

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_2 - \varphi_3 = 0, \\ f_2 &= l_3 \cos \delta_3 - l_2 \cos \delta_2 = 0, \\ f_3 &= l_1 \cos \delta_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \delta_2 \cos \varphi_2 = 0, \\ f_4 &= l_3 \sin \delta_3 - l_2 \sin \delta_2 - 2OB = 0, \\ f_5 &= l_1 \sin \delta_1 - l_2 \sin \delta_2 - OB = 0, \\ f_6 &= l_1 \cos \delta_1 \sin \varphi_1 - l_2 \cos \delta_2 \sin \varphi_2 - OA = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решая систему уравнений (1), определяем выражения углов $\delta_i(t)$, $\varphi_i(t)$, ($i=1-3$) поворотов актуаторов, выраженные через длины исполнительных звеньев

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a \sin \left(\frac{OB + l_2 \sin(\delta_2)}{l_1} \right), \delta_2 = -a \sin \left(\frac{4OB^2 + l_2^2 - l_3^2}{4OB \cdot l_2} \right), \\ \delta_3 &= a \sin \left(\frac{2OB + l_2 \sin(\delta_2)}{l_3} \right), \varphi_1 = a \cos \left(\frac{l_2 \cos(\varphi_2) \cos(\delta_2)}{l_1 \cos(\delta_1)} \right), \\ \varphi_2 &= -a \sin \left(\frac{OA^2 + 0,5(-l_1^2 + l_2^2 - l_1^2 \cos(2\delta_1) + l_2^2 \cos(2\delta_2))}{2OA \cdot l_2 \cos(2\delta_2)} \right), \varphi_3 = \varphi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как манипулятор представляет собой многомассовый пространственный механизм, то динамика его движений описывается сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений [13], полученных с помощью уравнения Лагранжа с неопределенными множителями с учетом голономных связей (1). Применение аналитических методов исследования и решение задач синтеза его движений затруднено. Вместе с тем из-за ошибок при определении значений параметров модели и неточности методов расчета сложная модель может неадекватно описывать реальные физические процессы. Для удобства решения задач динамики в работе предлагается математическая модель динамики манипулятора, основанная на приведении кинетической энергии манипулятора к квадратичной форме относительно трех независимых обобщенных скоростей.

Метод решения

Для описания динамики движения звеньев манипулятора воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода для обобщенных $q_1=l_1$, $q_2=l_2$, $q_3=l_3$ координат манипулятора [14]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^\Phi, \quad j=1 \div 3, \quad (3)$$

где T – кинетическая энергия манипулятора; Q_j – обобщенная сила, соответствующая j -й координате; Q_j^Φ – обобщенная сила сил сопротивления.

Выражение кинетической энергии [12; 15–16] имеет вид

$$T = 0.5 \begin{pmatrix} m_{12} \dot{l}_1^2 + \left(I_k + I_r + m_{12} \left(l_1 - \frac{1}{2} l_{10} \right)^2 \right) (\dot{\delta}_1^2 + \dot{\phi}_1^2 \cos^2 \delta_1) + \\ + m_{22} \dot{l}_2^2 + \left(I_k + I_r + m_{22} \left(l_2 - \frac{1}{2} l_{20} \right)^2 \right) (\dot{\delta}_2^2 + \dot{\phi}_2^2 \cos^2 \delta_2) + \\ + m_{32} \dot{l}_3^2 + \left(I_k + I_r + m_{32} \left(l_3 - \frac{1}{2} l_{30} \right)^2 \right) (\dot{\delta}_3^2 + \dot{\phi}_3^2 \cos^2 \delta_3) + \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $I_{ix}=I_{iy}=I_k$; $I_{iz}=0$; ($i=1-3$) – моменты инерции корпусов исполнительных звеньев относительно осей подвижных систем координат; m_{i2} – массы штоков актуаторов; l_{k0} – начальная длина актуаторов.

В силу осевой симметрии исполнительных звеньев центробежные моменты инерции равны нулю. Принимаем, что моменты инерции штоков исполнительных звеньев относительно собственных центральных осей инерции $I_{zci}=0$, а $I_{xci}=I_{yci}=I_r$.

Кинетическая энергия, выраженная через скорости длин актуаторов, имеет вид [17]

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \dot{l}_i \dot{l}_j. \quad (5)$$

$$A_{12} = A_{21}, A_{13} = A_{31}, A_{23} = A_{32}. \quad (5)$$

Выражения коэффициентов кинетической энергии A_{ij} находятся из (4) после подстановки выражений (2). Потенциальная энергия $\Pi(q_k)$ манипулятора имеет вид

$$\Pi(q_k) = - \sum_{n=1}^3 (0.5 m_{n1} l_{n0} + m_{n2} z_{cn}) g \cos \delta_n \cos \varphi_n, \quad (6)$$

где $z_{cn} = l_n - 0.5 l_{n0}$ – координата центра масс штока исполнительного звена; m_{n1} – массы корпусов исполнительных звеньев; m_{n2} – массы штоков исполнительных звеньев.

Рис. 3. Блок-схема алгоритма численного определения коэффициентов кинетической энергии

Потенциальную энергию (6) также выражаем через длины исполнительных звеньев с помощью выражений (2).

На рис. 3 приведена блок-схема алгоритма численного определения значений коэффициентов $A_{12}=A_{21}$, $A_{13}=A_{31}$, $A_{23}=A_{32}$ кинетической энергии.

На рис. 4 представлен график зависимости коэффициента $A_{11}(l_1, l_2, l_3)$ от длин исполнительных звеньев.

Обобщенные силы сопротивления в случае линейного вязкого трения вычисляются через диссипативную функцию Рэлея, которая для системы с тремя степенями свободы может быть записана в виде

$$\Phi = 0.5 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} \dot{l}_i \dot{l}_j, \quad (7)$$

где μ_{ij} – постоянные приведенные коэффициенты сопротивления.

Обобщенные силы сопротивления в выражении (3) равны

$$Q_j^\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (8)$$

Рис. 4. Зависимости коэффициента $A_{11}(l_1, l_2, l_3)$ от длин исполнительных звеньев ($a - l_1=785$ мм; $b - l_1=950$ мм)

Если принять значения коэффициентов инерции A_{ij} в выражении (5) кинетической энергии постоянными, то, используя формализм (3), с учетом (6) и (8), получим следую-

щую систему дифференциальных уравнений, описывающих движение манипулятора с тремя степенями свободы:

$$\begin{aligned} A_{11}\ddot{l}_1 + A_{12}\ddot{l}_2 + A_{13}\ddot{l}_3 + \mu_{11}\dot{l}_1 + \mu_{12}\dot{l}_2 + \mu_{13}\dot{l}_3 &= F_1 + \frac{\partial \Pi(l_1, l_2, l_3)}{\partial l_1}, \\ A_{21}\ddot{l}_1 + A_{22}\ddot{l}_2 + A_{23}\ddot{l}_3 + \mu_{21}\dot{l}_1 + \mu_{22}\dot{l}_2 + \mu_{23}\dot{l}_3 &= F_2 + \frac{\partial \Pi(l_1, l_2, l_3)}{\partial l_2}, \\ A_{31}\ddot{l}_1 + A_{32}\ddot{l}_2 + A_{33}\ddot{l}_3 + \mu_{31}\dot{l}_1 + \mu_{32}\dot{l}_2 + \mu_{33}\dot{l}_3 &= F_3 + \frac{\partial \Pi(l_1, l_2, l_3)}{\partial l_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 5 представлены результаты расчета управляющих усилий при использовании уравнений динамики манипулятора, полученных на основе уравнений Лагранжа 2-го рода с неопределенными множителями (кривые 1–3) и с помо-

щью приближенной модели (9) (кривые 1'–3'). Как видно из графиков зависимостей усилий, при перемещении захвата по пространственной прямой приближенная модель адекватно описывает динамические процессы манипулятора.

Рис. 5. Зависимости изменения управляющих усилий

Расчеты проводились для следующих значений параметров манипулятора и траектории: $m_{i2}=6,3$ кг ($i=1-3$); $l_{10}=950$ мм; $l_{20}=900$ мм; $l_{30}=800$ мм; $l_{1k}=950$ мм; $l_{2k}=965$ мм; $l_{3k}=1050$ мм; $I_k=0,86$ кг·м²; $I_r=1,294$ кг·м²; $A_{11}=20$; $A_{22}=18$; $A_{33}=10$; $A_{12}=A_{21}=8$; $A_{13}=A_{31}=-4$; $A_{23}=A_{32}=-4$; $\mu_{11}=\mu_{12}=\mu_{13}=1$; $\mu_{21}=\mu_{22}=\mu_{32}=0,5$; $\mu_{31}=\mu_{32}=\mu_{33}=2$.

Заключение

Разработанная математическая модель динамики манипулятора параллельной структуры на основе представления кинетической энергии в виде квадратичной формы обобщенных скоростей адекватно описывает динамические процессы при перемещении захвата в рабочей зоне и может быть использована при аналитическом синтезе оптимальных законов перемещения и синтезе управляющих сигналов, обеспечивающих заданные программные перемещения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бушуев, В. В. Механизмы параллельной структуры в машиностроении / В. В. Бушуев, И. Г. Хольшев // СТИН. – 2001. – № 1. – С. 3–8.
2. Афонин, В. Л. Обработывающее оборудование на основе механизмов параллельной структуры : учеб. пособие / В. Л. Афонин, П. В. Подзоров, В. В. Слепцов ; под общ. ред. В. Л. Афонина. – М. : Издательство МГТУ СТАНКИН, Янус-К, 2006. – 448 с.
3. Liu, N., Wu, J. Kinematics and application of a hybrid industrial robot Delta-RST. Sens. Transducers 169(4), 186–192 (2014).
4. Задача позиционирования манипулятора параллельно-последовательной структуры с управляемым захватным устройством / В. В. Жога, В. В. Дяшкин-Титов, И. А. Несмиянов, Н. С. Воробьева // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – № 8 – Т. 17. – С. 525–530.
5. Ibrahim, O., Khalil, W. Inverse and direct dynamic models of hybrid robots. Mech. Mach. Theory 45(4), 627–640 (2010).
6. Cheng, H. H., Lee, J. J., Penkar, R. Kinematic analysis

of a hybrid serial-and-parallel-driven redundant industrial manipulator. Int. J. Robot. Autom. 10(4), 159–166 (1995).

7. Chen Chi-Tsong. Introduction to linear system theory. – N.Y.: Holt, Rinehart and Winston Inc, 1970.

8. O. Ibrahim and W. Khalil. Inverse and direct dynamic models of hybrid robots. Mech. Mach. Theory, 45(4), pp. 627–640, 2010.

9. Briot, S., Khalil, W. Dynamics of Parallel Robots – From Rigid Bodies to Flexible Elements. Mechanisms and Machine Science, vol. 35. Springer, Switzerland (2015).

10. Пат. 2651781 Российская Федерация, МПК B66C 23/44. Манипулятор-трипод промышленного назначения / В. В. Жога, В. В. Дяшкин-Титов, А. В. Дяшкин, Н. С. Воробьева, И. А. Несмиянов, М. Е. Николаев ; опубл. 23.04.2018. Бюл. №12.

11. Zhoga V., Dyashkin-Titov V., Nesmiyanov I., Vorob'eva N., Dyashkin A. Modeling dynamic of tripod manipulator considering mass of actuating links. 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics, NIR 2020, 2020, 9290240.

12. Zhoga V., Dyashkin-Titov V., Nesmiyanov I., Dyashkin A. (2020) Algorithm to Synthesize Control Force for Tripod Manipulator Drives. In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) Proceedings of 14th International Conference on Electromechanics and Robotics “Zavalishin's Readings”. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 154. Springer, Singapore. Pp. 223–235.

13. Dyashkin-Titov V. V., Zhoga V. V., Nesmiyanov I. A. and Vorob'eva N. S. (2018) Dynamics of the Manipulator Parallel-Serial Structure. Advances in Mechanical Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Pp. 33–43.

14. Коловский, М. З. Основы динамики промышленных роботов / М. З. Коловский, А. В. Слоущ. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1998. – 240 с.

15. Воробьева, Н. С. Динамический синтез алгоритмов управления манипулятором параллельно-последовательной структуры / Н. С. Воробьева, В. В. Жога, Л. В. Жога // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – № 12. – Т. 21. – С. 706–715.

16. Дяшкин-Титов, В. В. Синтез оптимальных программных усилий исполнительных звеньев манипулятора на основе трипода / В. В. Дяшкин-Титов, В. В. Жога, Н. С. Воробьева // Известия ВолгГТУ : научный журнал № 9 (244) / ВолгГТУ. – Волгоград, 2020. – С. 34–38.

17. Кинематика, динамика и точность механизмов : Справочник / под ред. Г. В. Крейнина. – М. : Машиностроение, 1984. – 224 с.