УДК 539.42

DOI: 10.35211/1990-5297-2020-2-237-58-61

А. А. Тырымов

**ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ
И КОЭФФИЦИЕНТА БИАКСИАЛЬНОСТИ ДЛЯ КОМПАКТНОГО ОБРАЗЦА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЕМЕНТА
ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ УПРУГОГО ТЕЛА**

Волгоградский государственный технический университет

e-mail: tyrymov2010@yandex.ru

В работе представлены результаты численного расчета коэффициента интенсивности напряжений и коэффициента биаксиальности для компактного образца при внецентренном растяжении. Для анализа напряженного состояния вблизи трещины используется сингулярный элемент графовой модели упругого тела.

Ключевые слова: математическое моделирование, упругость, компактный образец, коэффициент интенсивности напряжений T -напряжения, коэффициент биаксиальности напряжений.

А. А. Tyrymov

**NUMERICAL EVALUATION OF STRESS INTENSITY FACTOR
AND STRESS BIAXIALLITY FOR COMPACT SPECIMEN BASED
ON GRAPH MODEL OF ELASTIC SOLID**

Volgograd State Technical University

The paper presents the results of numerical calculation of the stress intensity factor and the biaxiality factor for a compact tension specimen. A singular element of the graph model of an elastic solid is used to analyze the stress state near a crack.

Keywords: mathematical simulation, elasticity, compact specimen, stress intensity factor, T -stress, stress biaxiality factor.

При определении характеристик трещиностойкости и испытаниях на вязкость разрушения используется прямоугольный компактный образец с краевой трещиной. Образец нагружается двумя растягивающими силами, приложенными к контурам круговых отверстий, симметрично расположенных относительно линии трещины. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений у вершины трещины в таких конструкциях применялись методы конечных элементов, граничных коллокаций, преобразования Фурье [1–3].

В настоящей работе внимание сосредото-

но на возможностях построенного на основе графовой модели сингулярного элемента, предназначенного для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза, вблизи остроконечных включений и других сингулярных точек и линий. Используется элементарная ячейка прямоугольного элемента с восемью степенями свободы [4, 5].

Моделируя сингулярный характер распределения напряжений и деформаций у вершины трещины, аппроксимируем неизвестные деформации в пределах прямоугольного элемента следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 r^{-\alpha}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 r^{-\alpha}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 r^{-\alpha}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= d_0 + d_1 x + d_2 y + d_3 r^{-\alpha}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)y + (c_3 + d_3)r^{-\alpha},\end{aligned}\tag{1}$$

где $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от произвольной точки элемента до вершины трещины. Предполагается, что начало локальной декарто-

вой системы координат располагается в вершине трещины, а сама трещина лежит на оси Ox . Значения коэффициентов в формулах (1) удастся выразить через деформации сторон элемента.

Графовый метод позволяет построить линейную (соответствует квадратичной функции перемещений) или сингулярную аппроксимацию деформаций на четырехузловом прямоугольном элементе с восемью степенями свободы. В традиционном подходе метода конечных элементов (МКЭ) для такой аппроксимации необходимо применение элемента с восемью узлами (16 степеней свободы). В результате определяющая система уравнений графового метода содержит примерно в 3 раза уравнений меньше по сравнению с системой, выведенной традиционным способом МКЭ.

В качестве примера использования сингулярного элемента рассмотрим прямоугольную пластину (рис. 1) с внешней границей Γ_0 , краевым прямолинейным разрезом Γ_1 и двумя круговыми отверстиями с границей Γ_2 . Геометрические характеристики пластины таковы: высота $H=1,2W$, ширина $L=1,25W$, радиус круговых отверстий $R=0,125W$, а их центры имеют координаты $(W; \pm 0,275W)$. В приводимых ниже расчетах принято $W=48$ мм. Упругие характеристики материала взяты такими: модуль упругости $E=200000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,3$.

Рис. 1. Геометрия компактного образца

Трещина перпендикулярна стороне пластины с размером H , расположена на оси симметрии Ox и задается условием $\Gamma_1=\{x: W-a \leq x \leq 1,25W\}$. Изучалось плоское напряженное состояние образца. В виду симметрии рассматривалась половина всей области. Граничные условия задачи заданы следующим образом: на горизонтальной оси вне контура разреза $\nu=0$, границы Γ_0 и Γ_1

свободны от напряжений, на границе Γ_2 действует растягивающая сила $P=50$ МПа. В расчетах действие сосредоточенной силы заменим действием эквивалентной нагрузки, распределенной между тремя соседними узлами. Исследуемая область разбивалась на 680 элементов. В окрестности трещины использовались два сингулярных элемента с размером $0,25 \times 0,2$ мм. Во всех других элементах применялась линейная аппроксимация деформаций. В приводимых ниже расчетах при моделировании сингулярности напряжений использована корневая особенность вида $r^{-0,5}$. Расчетная схема и пример деформированного состояния пластины показаны на рис. 2.

Рис. 2. Расчетная схема и деформированная сетка

Среди методов количественной оценки параметров жесткости напряженного состояния у вершины трещины наиболее распространен метод, связанный с расчетом коэффициента интенсивности напряжений (КИН). В механике разрушения коэффициенты интенсивности напряжений играют существенную роль. КИН является тем параметром, который позволяет оценивать локальное поле напряжений в вершине трещины.

В таблице приведены в зависимости от отношения a/W значения нормированного коэффициента интенсивности напряжений $\frac{K\sqrt{W}}{P}$.

Во второй строке таблицы приведены данные из работы [3], в которой использован метод сингулярных интегральных уравнений, в третьей – значения, полученные графовым методом с использованием сингулярного элемента и применением инвариантного интеграла Черепанова–Райса. Контур интегрирования выбирался проходящим через те точки, которые использовались для численного интегрирования по квадратным формулам Гаусса при выводе матрицы жесткости сингулярного элемента. Как видно из таблицы, результаты расчетов хорошо согласуются, наибольшее расхождение для длинных трещин не превосходит два процента.

Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений

a/W	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
Результаты из работы [3]	7,3304	8,3449	9,6381	11,3364	13,6465	16,8832	21,6283
Расчет по графовой модели	7,3639	8,4450	9,7739	11,5098	13,8740	17,2039	22,0824

В последние годы интенсивно развивается, так называемая, двухпараметрическая модель механики разрушения. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что необходимы дополнительные параметры для уточнения однопараметрического подхода, использующего только КИН. Таким параметром служит второй (несингулярный) член в разложении Вильямса при определении напряженного состояния в окрестности вершины трещины

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(\sqrt{r}), \quad (2)$$

Здесь K – коэффициент интенсивности напряжений в условиях нормального отрыва, (x, y) и (r, θ) декартовы и полярные координаты с началом (полусом) в вершине трещины соответственно, а член T называют T -напряжением.

Для расчета T -напряжений воспользуемся компонентой σ_{xx} . Действительно, если рассматривать берега трещины, когда $\theta = -\pi$ или $\theta = \pi$, то из формулы (2) следует $T = \sigma_{xx}$.

В процессе численного анализа T -напряжения, в отличие от теоретических значений, не

остаются постоянными. Они зависят от метода расчета, от степени разреженности используемой сетки, от расстояния до вершины трещины. В связи с этим введем в рассмотрение среднее значение T -напряжений, определенное в n точках вдоль берега

$$T_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{xx}(x_i)$$

При определении среднего значения T -напряжений напряжения σ_{xx} вычислялись в n точках вдоль берега трещины на участке длиной $0,2a$ и отсчитываемого от вершины трещины. Шаг разбиения во всех расчетах был принят $0,3$ мм.

Для оценки параметров жесткости напряженного состояния у вершины трещины широко используется безразмерный параметр биаксиальности [6]

$$B = \frac{T\sqrt{\pi l}}{K}$$

Здесь $l=a+0,25W$ – длина трещины, K – КИН в условиях нормального отрыва. Параметр B можно рассматривать как меру стеснения деформаций в зоне предразрушения у вершины трещины.

Рис. 3. Зависимость коэффициента биаксиальности от отношения a/W

На рис. 3 показана зависимость коэффициента биаксиальности от относительной длины трещины a/W . Кривая 1 построена на основе графового метода для компактного образца, размеры которого соответствуют рис. 1. Результаты этих расчетов полностью согласуются с данными

из работы [6]. Следует отметить, что ширина компактного образца оказывает значительное влияние на коэффициент биаксиальности. Кривая 2 на рис. 3 отвечает значению $H=W$ [6].

Хорошее совпадение между численными результатами, представленными в работе, и ре-

зультатами, известными из литературных источников, придает достоверность применяемому графовому методу при моделировании напряженно-деформированного состояния вблизи особых точек разреза и сингулярных точек в теории трещин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Морозов, Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
2. *Srawley J.E., Gross B.* Stress intensity factors for bent and compact specimens // *Engng. Fract. Mech.* – 1972. 4, № 3. – P. 587–589.
3. *Civelek M.B., Erdogan F.* Crack problems sor a rectangular plate and an infinite strip // *Int. Journ. of Fracture.* – 1982. – Vol. 19, № 2. – P. 139–159.
4. Кузовков, Е. Г. Графовые модели в плоской и осесимметричной задачах теории упругости / Е. Г. Кузовков, А. А. Тырымов. – Волгоград : ИУНЛ ВолгГТУ, 2010. – 128 с.
5. Тырымов, А. А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат / А. А. Тырымов // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 125–136. DOI:org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47.
6. *Leevers, P. S., Radon J.C.* Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // *Int. Journ. of Fracture.* 1982. – Vol.19. – P.311–325.-DOI: 10.1007/BF00012486.