УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПЛОТНЕНИЯ УПРУГОПОЛЗУЧИХ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВ

© А. Дасибеков, Ж. Т. Айменов, Б. Арапов, Д. С. Мырзалиев
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова,
Шымкент, Республика Казахстан

Поведение грунта в области нелинейной ползучести весьма сложно и изучено недостаточно полно, поэтому в настоящее время крайне необходимы всесторонние и углубленные экспериментальные и теоретические исследования ползучести грунта при высоких напряжениях. Причем физически нелинейный характер ползучести грунта отчетливо проявляется как при ступенчатом повышении нагрузки, так и при загрузке образцов постоянными сжимающими напряжениями различной величины. Исследование нелинейной задачи консолидации глинистых грунтов с учетом их ползучести в данной модели сводится к определению решений линейных интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: модель; упругоползучесть; нелинейность; неоднородность; грунт; упруговязкость; деформация; земляные массы; напряжение; консолидация; ползучесть.

В настоящее время существует много различных решений задач консолидации земляных масс, полученных методами линейной механики уплотняемых сред. Однако они дают возможность оценить напряженно-деформированное состояние массива грунта только для небольших диапазонов напряжений. В действительности же форма и размеры оснований сооружений при определенных нагрузках существенно изменяются, и принцип малости перемещений становится неприемлемым, т.е. линейный закон между напряжениями и деформациями уплотняемых сред перестает соблюдаться, и он заменяется нелинейной зависимостью. Отсюда следует, что для решения задач консолидации в широком плане нужно отказаться от линейной теории и перейти к более широким и сложным вопросам нелинейной теории.

Замена линейного закона нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями составляет сущность физической нелинейности. В дальнейшем эта нелинейность будет иметь место для изучения вопросов уплотнения упругоползучих многофазных грунтов.

Решением этих вопросов впервые занимался еще В. А. Флорин, один из основоположников механики грунтов. Он в работе [1], пользуясь уравнениями нелинейной теории ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном [2], дает основное уравнение, описывающее процесс уплотнения земляной среды с учетом старения и ползучести грунта. Получил решение для частного случая, когда уплотнение слоя данной толщины происходит под действием равномерно распределенной нагрузки.

Нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды без учета вязкого свойства грунта рассмотрены также в [3, 4, 5, 6], где выведены основные уравнения уплотнения, когда проницаемость грунта зависит от пористости, а пористость от напряжения. Приведены решения одномерной задачи для двух простейших случаев. Для пространственной и плоской задачи консолидации земляной среды при переменных характеристиках грунта, принимаемого в виде двухфазной системы, использован метод конечных разностей. Для линейной ползучести даны решения в работах [7, 8].

Поведение грунта в области нелинейной ползучести весьма сложно и изучено недостаточно полно, поэтому в настоящее время крайне необходимы всесторонние и углубленные эксперимен-

тальные и теоретические исследования ползучести грунта при высоких напряжениях. Причем физически нелинейный характер ползучести грунта отчетливо проявляется как при ступенчатом повышении нагрузки, так и при загрузении образцов постоянными сжимающими напряжениями различной величины.

Для решения задачи механики уплотняемых пористых сред согласно основной модели В. А. Флорина [1], необходимо совместно рассматривать уравнения, отражающие неразрывность твердой и жидкой фаз грунта, состояние его скелета, а также условия равновесия нестабилизированного состояния уплотняемого грунтового массива, т. е.

$$\begin{aligned}\varepsilon(M, t) + \beta' (1 + \varepsilon_{cp}) P(M, t) &= \Delta P(M, t) \cdot \gamma_b^{-1} (1 + \varepsilon_{cp}); \\ \Delta \varepsilon(M, t) &= \Phi[\sigma_{KK}(M, t), \alpha_0(M, t), \xi, K(M, t)]; \\ \sigma_{KK}(M, t) &= \sigma_{KK}^*(M) - n[P(M, t) - P^*(M)],\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\Delta P(M, t) = \frac{1}{x_1^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\alpha \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2};$$

Φ – функция, отражающая состояние скелета грунта.

Состояние скелета грунта вместе со связанной водой математически может быть описано различными выражениями, отражающими связь между напряжениями и деформациями. Это зависит от выбранной модели. Оно для нелинейной задачи консолидации однородных наследственно-стареющих грунтов имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 - \varepsilon(t) &= \frac{a_0(t)}{1 + (n-1)\xi} \theta(t) - \frac{1}{1 + (n-1)\xi} \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) \frac{\partial a_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{1 + (n-1)\xi} \times \\ &\times \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

где ε_0 – начальный коэффициент пористости;

$\varepsilon(t)$ – коэффициент пористости грунта для некоторого исследуемого момента времени t ;

α_0 – коэффициент мгновенного уплотнения;

ξ – коэффициент бокового давления грунта;

$f[\theta(\tau)]$ – функция, зависящая от напряжений, отражает свойства нелинейности задачи;

$\theta(\tau)$ – сумма главных напряжений;

$n = 1, 2, 3$ – в зависимости от мерности рассматриваемой задачи;

$c(t, \tau)$ – мера ползучести, которая устанавливается экспериментальным образом.

Она является также функцией старения. Далее предположим, что функции $a_0(\tau)$ и $c(t, \tau)$, характеризующие упруго-мгновенную деформацию и деформацию ползучести скелета грунта, являются функциями пространственных координат. Причем эти функции не зависят в области рассматриваемых задач от напряженно-деформированного состояния сред. Тогда выражение (2) можно представить так:

$$\begin{aligned}[\varepsilon_0 - \varepsilon(t, x_s)] \cdot [1 + (n-1)\xi] &= a_0(t, x_s) \theta(t, x_s) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau, x_s) \frac{\partial a_0(\tau, x_s)}{\partial \tau} d\tau - \\ &- \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau, x_s)}{\partial \tau} d\tau.\end{aligned}$$

Данное выражение преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_0 - \varepsilon(t, x_s)] [1 + (n-1)\xi] = & \theta(t) \cdot a_0(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) \frac{\partial a_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau)] \cdot \frac{\partial \varepsilon(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ & + \theta(t) \cdot a_1(t, x_s) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) \frac{\partial a_1(\tau, x_s)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial K(t, \tau, x_s)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_1(\tau, x_s) = a_0(\tau, x_s) - a_0(\tau)$;

$$K(t, \tau, x_s) = - (t, \tau, x_s) - (t, \tau).$$

Пусть свойства неоднородного грунта могут быть описаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_0(t, x_s) &= a_0(\tau) \cdot [1 + \alpha_H \eta(x_s)], \\ c(t, \tau, x_s) &= c(t, \tau) \cdot [1 + \beta_H \eta(x_s)] \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

здесь $\eta(x_s)$ – функция пространственных координат;

α_H и β_H – параметры неоднородности, характеризующие упруго-мгновенную и ползучую деформации.

На основе (4) выражение (3) представляется в виде:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_0 - \varepsilon(t, x_s)] [1 + (n-1)\xi] = & \theta(t, x_s) \cdot a_0(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau, x_s) \frac{\partial a_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \\ & - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial \varepsilon(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \alpha_H \eta(x_s) \left[\theta(t, x_s) \cdot a_0(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau, x_s) \frac{\partial a_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{\beta_H}{\alpha_H} \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial \varepsilon(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) определяет изменение коэффициента пористости грунта в зависимости от суммы главных напряжений. Этим соотношением можно описать любое состояние скелета грунта. Действительно, если $\alpha_H=0$, то имеем дело с нелинейной задачей однородного грунта. При $f[\theta(\tau, x_s)] = \theta(\tau, x_s)$ задача сводится к линейному неоднородному состоянию грунта. Если $\alpha=0$, $f[\theta(\tau, x_s)] = \theta(\tau, x_s)$, то однородному состоянию грунта соответствует линейно-ползучее. Когда $\alpha=0$, $t=\tau_1$ состояние грунта упругое.

Это уравнение связывает давление в поровой жидкости или напряжение в скелете грунта с пространственно-временными координатами. Учитывая соотношение (5), общеизвестное уравнение приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned} a_0(t) \cdot \theta'(t, x_s) - f[\theta(t, x_s)] \cdot \frac{\partial \varepsilon(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \partial t} d\tau + \\ + \alpha_H \eta(x_s) \cdot \left\{ a_0(t) \cdot \theta'(t, x_s) - \frac{\beta_H}{\alpha_H} f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial \varepsilon(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \right. \end{aligned}$$

$$a_0(t) \cdot \theta'(t, x_s) - f[\theta(t, x_s)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \partial t} d\tau +$$

$$+ \alpha_H \eta(x_s) \cdot \left\{ a_0(t) \cdot \theta'(t, x_s) - \frac{\beta_H}{\alpha_H} f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \right. \quad (6)$$

Если учесть равенство $\theta(t) = \theta^* + P^* n - hP(t)$, последнее уравнение представляется так:

$$A_0 \cdot \theta(t, x_s) - f[\theta(t, x_s)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \partial t} d\tau +$$

$$+ \alpha_H \eta(x_s) \cdot \left\{ a_0(t) \cdot \theta'(t, x_s) - \frac{\beta_H}{\alpha_H} f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \right.$$

$$- \frac{\beta_H}{\alpha_H} \int_{\tau_1}^t f[\theta(\tau, x_s)] \cdot \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \cdot \partial t} d\tau \Big\} = C_V \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \right) +$$

$$+ C_V \beta' \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^*}{n} + P^* \right), \quad (7)$$

где

$$A_0 = a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp}) \cdot n^{-1} [1 + (n-1)\xi];$$

$$C_V = (1 + \varepsilon_{cp}) \cdot K [1 + (n-1)\xi] \cdot (n\gamma)^{-1}.$$

В дальнейшем функцию $f[\theta(\tau, x_s)]$ примем в виде полинома m -той степени, т. е.

$$f[\theta(\tau, x_s)] = \theta(\tau, x_s) + \theta^m(\tau, x_s). \quad (8)$$

Такой вид функции использован в работах [7, 8] для решения некоторых задач теории упругоползучего грунта.

Выражение (8) подставим в (7), затем решение уравнения (7) ищем в следующем виде:

$$\theta(t, x_s, ?) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i(t, x_s) ?^i. \quad (9)$$

Тогда решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения консолидации сводится к определению интегралов следующей системы линейных уравнений:

$$A_0 \cdot W_i(t, x_s) - W_i(t, x_s) \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \int_{\tau_1}^t W_i(\tau, x_s) \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \cdot \partial t} d\tau + \alpha_H \eta(x_s) \times$$

$$\times \left\{ a_0(t) \cdot W_i(t, x_s) - \frac{\beta_H}{\alpha_H} W_i(\tau, x_s) \cdot \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \frac{\beta_H}{\alpha_H} \int_{\tau_1}^t W_i(\tau, x_s) \cdot \frac{\partial^2 c(t, \tau)}{\partial \tau \cdot \partial t} d\tau \right\} =$$

$$= C_V \nabla^2 W_i(t, x_s) + F_{i-1},$$

$$\nabla^2 W_i(t, x_s) = \frac{\partial^2 W_i(t, x_s)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W_i(t, x_s)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W_i(t, x_s)}{\partial x_3^2} \quad (10)$$

где $F_{-1}=0$; $F_0 = W_0^2$; $F_i = \frac{1}{iW_0} \sum_{n=1}^{\infty} (nm - i + n)W_n F_{i-n}$ при $m \geq 1$.

Таким образом, исследование нелинейной задачи консолидации глинистых грунтов с учетом их ползучести в данной модели сводится к определению решений линейных интегро-дифференциальных уравнений. В дальнейшем займемся решениями этой системы уравнений применительно к конкретным задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флорин В. А. Основы механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961. 543 с.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
3. Месчан С. Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов. М.: Недра, 1985. 342 с.
4. Цытович Н. А. Механика грунтов. М.: Изд. литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. 633 с.
5. Абелев М. Ю. Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах. М.: Стройиздат, 1983. С. 59-91.
6. Цытович Н. А., Тер-Мартirosян З. Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. М.: Высшая школа, 1981. 319 с.
7. Дасибеков А., Юнусов А. А., Юнусова А. А., Мадияров Н. К. Многомерные задачи консолидации наследственно-стареющих земляных масс // Международный журнал экспериментального образования. Москва, 2014. № 8. Часть 1. С. 37-46.
8. Дасибеков А., Юнусов А. А., Айменов Ж. Т., Алибекова Ж. Д. Задачи теории консолидации и ползучести грунтов, решаемые в функциях Куммера // Успехи современного естествознания. Москва, 2014. № 4. С. 89-95.

EQUATIONS OF NONLINEAR PROBLEMS OF COMPACTION OF ELASTIC-CREEPING INHOMOGENEOUS SOILS

© A. Dassibekov, Zh. T. Aymenov, B. Arapov, D. S. Myrzaliyev

M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan

The behavior of soil in the field of nonlinear creep is very difficult and insufficiently studied, so at present it is essential to conduct comprehensive and in-depth experimental and theoretical studies of soil creep at high stresses. Moreover, the physically nonlinear nature of the soil creep is clearly manifested both in the stepwise increase in the load and when loading samples with constant compressive stresses of various sizes. The study of the nonlinear problem of consolidation of clay soils taking into account their creep in this model is reduced to the definition of solutions of linear integro-differential equations.

Keywords: model; elasticcreep; nonlinearity; heterogeneity; soil; elastic viscosity; deformation; earth masses; stress; consolidation; creeping.

REFERENCES

1. Florin, V. A. (1961) *Osnovy mekhaniki gruntov*. [Fundamentals of Soil Mechanics]. Gosstroizdat, Moscow, 543 p.
2. Arutyunyan, N. Kh. (1952) *Nekotorye voprosy teorii polzuchesti*. [Some questions of the theory of creep]. Gostekhizdat, Moscow, 323 p.
3. Meschyan, S. R. (1985) *Eksperimental'naya reologiya glinistyx gruntov*. [Experimental rheology of clay soils]. Nedra, Moscow. 342 p.
4. Tsytoich, N. A. (1963) *Mekhanika gruntov*. Izd. literatury po stroitel'stvu, arkhitekture i stroitel'nyim materialam. [Soil mechanics. Ed. literature on construction, architecture and building materials]. Moscow. 633 p.
5. Abelev, M. Yu. (1983) *Stroitel'stvo promyshlennykh i grazhdanskikh sooruzhenii na slabykh vodonasyshchennykh gruntakh*. [Construction of industrial and civil structures on weak water-saturated soils]. Stroizdat, Moscow. Pp. 59-91.
6. Tsytoich, N. A. and Ter-Martirosyan, Z. G. (1981) *Osnovy prikladnoi geomekhaniki v stroitel'stve*. [Foundations of Applied Geomechanics in Construction]. Vysshaya shkola, Moscow, 319 p.
7. Dasibekov, A., Yunusov, A. A., Yunusova, A. A. and Madiyarov, N. K. (2014) 'Mnogomernye zadachi konsolidatsii nasledstvenno-stareyushchikh zemlyanykh mass' // *Mezhdunarodnyi zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya*. [Multidimensional problems of consolidation of hereditarily aging earth masses. International Journal of Experimental Education], № 8, chast' 1, Moscow, pp. 37-46.
8. Dasibekov, A. Yunusov, A. A., Aimenov, Zh. T. and Alibekova, Zh. D. (2014) 'Zadachi teorii konsolidatsii i polzuchesti gruntov, reshaemye v funktsiyakh Kummera'. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*. [Problems of the theory of consolidation and creep of soils, solved in the Kummer functions. Successes of modern natural science]. № 4, Moscow, pp. 89-95.