НАХОЖДЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ЗАДАННОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ MATHCAD

© А.В. А. Саидов, М.Р.Б. Хадисов

ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионщикова, Грозный, Россия

В статье рассмотрены вопросы нахождения перестановочных матриц для заданной матрицы методом линейной алгебры и решение задачи с помощью программы MATHCAD.

Ключевые слова: перестановочная матрица, Mathcad, система линейных уравнений.

Произведение $A \cdot B$ двух матриц возможно только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , для перемножения квадратных матриц необходимо, чтобы они были одного порядка, при этом в результате получается матрица того же порядка, что и перемножаемые матрицы. Умножение матриц осуществляется по правилу умножения строки на столбец.

В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Но в случае квадратных матриц бывают случаи, когда $A \cdot B = B \cdot A$. Такие матрицы называются перестановочными или коммутативными [1].

Пусть даны две квадратные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Требуется решить задачу нахождения элементов матрицы B , чтобы выполнялось равенство $A \cdot B = B \cdot A$.

Для определённости положим, что известна матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Требуется найти такую матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, чтобы выполнялось равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Запишем произведения этих матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Из условия равенства матриц получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{cases} \quad (1)$$

При известной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ для которой находится искомая матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, учитывая условие равенства двух матриц (равенство их соответствующих элементов). Покажем это на следующих двух примерах.

Пример 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, найти матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, удовлетворяющую условию $A \cdot B = B \cdot A$. Полученная выше система линейных уравнений (1) при известной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ примет вид: } \begin{cases} 2b_{11} = 2b_{11} + b_{12} \\ b_{11} - 2b_{21} = 2b_{21} + b_{22} \\ 2b_{12} = -2b_{12} \\ b_{12} - 2b_{22} = -2b_{22} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2b_{11} = 2b_{11} + b_{11} \\ b_{11} - 2b_{21} = 2b_{21} + b_{22} \\ 2b_{12} = -2b_{12} \\ b_{12} - 2b_{22} = -2b_{22} \end{cases} \mapsto \begin{cases} b_{11} = 0, \\ b_{12} = 0, \\ -4b_{21} = b_{22}. \end{cases} \quad (2)$$

Как видно из (2), для данной матрицы можно получить бесчисленное количество перестановочных матриц [1].

К примеру, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Проверка: $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим решение примера 1 в программе Mathcad.

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим элементы матрицы A :

$$\begin{aligned} a_{11} &:= 2 & a_{12} &:= 0 & a_{21} &:= 1 & a_{22} &:= -2 \\ &&&&&&&&\text{Given} \end{aligned}$$

2) Записываем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} &= b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} &= b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} \\ a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} &= b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} &= b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{aligned}$$

3) Ввод оператор функции **Find** для нахождения элементов матрицы B , а именно: b_{12}, b_{21}, b_{22} .

$$\text{Find}(b_{12}, b_{21}, b_{22}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \\ b_{11} - 4 \cdot b_{21} \end{pmatrix}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} b_{11} &:= 0 & b_{12} &:= 0 & b_{21} &:= 1 & b_{22} &:= b_{11} - 4b_{21} \\ &&&&&&&b_{22} &= -4 \end{aligned}$$

Таким образом, записываем матрицы A и B со знаком «:=».

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Проверка: $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, записываем матрицы A и B со знаком «:=»

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Проверка: $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Для матрицы размера 3×3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ можно найти $A \cdot B = B \cdot A$ по аналогичной схеме, при этом придётся решать систему из 9 уравнений.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} \end{pmatrix}$$

Получена система из девяти линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}, \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} &= b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31}, \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} &= b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}, \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} &= b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}, \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} &= b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}, \\ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} &= b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}, \\ a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} &= b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}, \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} &= b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}, \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} &= b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}. \end{aligned}$$

Ввод оператор функции **Find** для нахождения элементов матрицы B . Найдём перестановочную матрицу, например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, решив полученную систему уравнений,

используя программу **Mathcad** [2].

Алгоритм решения задачи:

1) Вводим элементы матрицы A :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &:= 1 & a_{12} &:= 2 & a_{13} &:= 3 \\
 a_{21} &:= 1 & a_{22} &:= 2 & a_{23} &:= 0 \\
 a_{31} &:= 2 & a_{32} &:= 1 & a_{33} &:= -5
 \end{aligned}$$

Given

2) Записываем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} &= b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} \\
 a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} &= b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} + b_{23} \cdot a_{31} \\
 a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} &= b_{32} \cdot a_{11} + b_{32} \cdot a_{21} + b_{32} \cdot a_{31} \\
 a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} &= b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} + b_{13} \cdot a_{32} \\
 a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} &= b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} + b_{23} \cdot a_{32} \\
 a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} &= b_{31} \cdot a_{12} + b_{32} \cdot a_{22} + b_{33} \cdot a_{32} \\
 a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} &= b_{11} \cdot a_{13} + b_{12} \cdot a_{23} + b_{13} \cdot a_{33} \\
 a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} &= b_{21} \cdot a_{13} + b_{22} \cdot a_{23} + b_{23} \cdot a_{33} \\
 a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} &= b_{31} \cdot a_{13} + b_{32} \cdot a_{23} + b_{33} \cdot a_{33}
 \end{aligned}$$

3) Ввод оператор функции **Find** для нахождения элементов матрицы B .

$$\text{Find}(b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, b_{33}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \cdot b_{21} - \frac{5}{4} \cdot b_{32} \\ \frac{7}{2} \cdot b_{21} - \frac{3}{2} \cdot b_{32} \\ -\frac{15}{2} \cdot b_{21} + \frac{21}{2} \cdot b_{32} \\ b_{21} \\ -\frac{1}{4} \cdot b_{21} + \frac{7}{4} \cdot b_{32} \\ \frac{3}{2} \cdot b_{21} - \frac{3}{2} \cdot b_{32} \\ -\frac{9}{2} \cdot b_{21} + \frac{13}{2} \cdot b_{32} \\ b_{32} \\ \frac{63}{4} \cdot b_{21} - \frac{85}{4} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$b_{22} := 1 \quad b_{32} := 0$$

Таким образом, записываем матрицы A и B со знаком «:=»

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -7 & -14 & 30 \\ -4 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -63 \end{pmatrix}$$

4) Проверка: $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 39 & -12 & -171 \\ -15 & -12 & 18 \\ -108 & -27 & 369 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 39 & -12 & -171 \\ -15 & -12 & 18 \\ -108 & -27 & 369 \end{pmatrix}$$

Таким образом, можно найти матрицу A для матрицы размером $n \times n$ систему из n^2 уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саидов А-В.А. Краткий курс высшей математики: учебное пособие. Грозный: ИПЦ ГГНТУ, 2019. Т. 1. С. 331.
2. Хадисов М-Р.Б. Методические особенности математического моделирования технико-экономических задач в Excel и MATHCAD. Инновационные подходы к решению профессионально-педагогических проблем: Сборник статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции. Нижний Новгород, 15 апреля-15 мая 2016 г. С. 76-77.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2002. 687 с.
4. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2014. 208 с.
5. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов / Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. 479 с.

FINDING TRANSFORMATION MATRIXS FOR A GIVEN MATRIX BY THE METHOD OF LINEAR ALGEBRA AND SOLVING THE PROBLEM WITH THE HELP OF MATHCAD

© A-V. A. Saidov, M-R. B. Khadisov

GSOTU named after acad. M. D. Millionshikov, Grozny, Russia

The article considers the issues of finding permutation matrices for a given matrix by the method of linear algebra and solving the problem using the MATHCADcs program.

Keywords: permutation matrix, Mathcad, system of linear equations.

REFERENCES

1. Saidov, A-V. A. (2019) *Kratkij kurs vysshej matematiki: uchebnoe posobie*. [Short course in higher mathematics]. GSOTU. Grozny. Pp. 331.
2. Khadisov, M-R. B. (2016) *Metodicheskie osobennosti matematicheskogo modelirovaniya tekhniko-ekonomicheskix zadach v Excel i MATHCAD*. [Methodological features of mathematical modeling of technical and economic problems in Excel and MATHCAD]. *Innovacionny'e podxody k resheniyu professional'no-pedagogicheskix problem: Sbornik statej po materialam Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii*. Nizhnij Novgorod. p. 76-77.
3. Krass, M. S., Chupry'nov, B. P. (2002) *Osnovy matematiki i ee prilozheniya v e'konomicheskom obrazovanii*. [Fundamentals of mathematics and its applications in economic education]. Delo. M. P. 687.
4. Gevorkyan, P. S. (2014) *Vy'sshaya matematika. Linejnaya algebra i analiticheskaya geometriya*. [Higher mathematics. Linear Algebra and Analytical Geometry]. Fizmatlit. M. P. 208.
5. Kremer, N. Sh. (2010) *Vysshaya matematika dlya ekonomistov: Praktikum dlya studentov vuzov*. [Higher mathematics for economists]. YuNITI-DANA. M. Pp. 479.