Originality. It consists in the fact that the first dynamic problem was set and solved for the surface layers of the workpiece, represented as a two-support beam on an elastic base loaded with a suddenly applied longitudinal force, which can significantly exceed its critical value. Denoted areas of dynamic instability of the surface layers of the workpiece.

Practical value of the work lies in the fact that the modes of operation of the metal forming machine and the parameters of the workpiece were identified under which conditions for obtaining products of insufficient quality may arise. As well as developed recommendations for improving the quality of finished products.

Key words: metal forming, transients, longitudinal wave, shear wave, billet, loaded layer, overload coefficient, dynamic buckling, tool, rolling, knurling, drawing, hypothetical beam, impact, elastic wave propagation velocity.

Рекомендована к публикации
д. т. н. А. С. Зеленским

Поступила 28.03.2019

УДК 681.5.003.2:[669.018.255:539.374]

Наука

А. Д. Учитель /д. т. н./,
Ю. А. Малиновский /к. т. н./

Г. В. Данилина /к. т. н./, Н. В. Войтенко,
Д. П. Рыбак, С. Ю. Даценко

Национальная металлургическая академия
Украины, г. Днепро, Украина

Криворожский колледж НАУ, г. Кривой Рог,
Украина

Параметрические эффекты при фрикционном взаимодействии инструмента с заготовкой в процессе ее обработки давлением

A. D. Uchitel /Dr. Sci. (Tech.)/,
Yu. A. Malinovsky /Cand. Sci. (Tech.)/

G. V. Danilina /Cand. Sci. (Tech.)/,
N. V. Voytenko, D. P. Rybak, S. Y. Datsenko

National Metallurgical Academy of Ukraine,
Dnipro, Ukraine

Krivoy Rog College of NAU, Krivoy Rog, Ukraine

Parametric effects in the frictional interaction of a tool with preparation in the process of its treatment by pressure

Цель. Обоснование влияния пульсирующих динамических нагрузок в поверхностных слоях деталей, получаемых методами пластического деформирования, на качество готовой продукции при холодной прокатке, накатке, обкатке, волочении и штамповке.

Методика исследований. В работе принята схематизация, в которой заготовка или деталь являются анизотропной средой, упруго скрепленной по поверхности примыкания наружных упрочненных слоев с внутренним массивом детали. На основе предложенной физической модели найдены условия, при которых под действием циклических поверхностных нагрузок возможны нарушение целостности, появление трещиноватости и волнистости наружных волокон в процессе упрочняющей обработки полуфабрикатов и деталей.

Результаты. Полученные данные позволяют установить частотные характеристики процесса неустойчивых параметрических колебаний, вызванных нелинейным трением между формообразующим элементом и заготовкой (деталью), которые приводят к ухудшению качества готовых изделий. Кроме того, для установившихся режимов работы машин по холодной обработке металлов давлением получены зависимости амплитуд деформационных волн как функций от максимальных пульсаций «периодических» составляющих поверхностных усилий, а также предложены меры по снижению виброактивности в зоне взаимодействия инструмента с заготовкой и деталями машин по холодной обработке.

Научная новизна. Сформулирована и решена вторая динамическая задача для поверхностных слоев заготовки на границе раздела обработанных слоев и массива заготовки. Определены, в зависимости от

возникающих периодических сил для поверхностных слоев, условия устойчивой и неустойчивой работы формообразующего инструмента и всей машины по обработке металлов давлением в целом.

Практическая значимость работы состоит в том, что выявлены безопасные режимы эксплуатации станков по обработке металлов давлением, сформированы условия усовершенствования конструкции машин по холодной обработке металлов давлением, при которых будут минимизированы возможности возникновения параметрических колебаний, а также снижения виброактивности машин по холодной обработке металлов давлением в целом. (Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.)

Ключевые слова: обкатка, накатка, волочение, пластическое деформирование, ролик, инструмент, заготовка, амплитуда колебаний, нагрузки, коэффициент возбуждения, установившаяся амплитуда, деформационная волна.

DOI: 10.33101/s001-1902913518

Постановка проблемы. Изложение основного материала. Долговечность деталей тяжелого оборудования, работающего в условиях интенсивного износа, может быть значительно повышена за счет применения поверхностного пластического деформирования. Этот вид обработки часто используется как для восстановления поверхности деталей, так и для упрочнения новых деталей.

Пластическая деформация сопровождается увеличением объема поверхностного слоя металла, чему препятствуют нижележащие недеформированные слои. При этом поверхностные слои оказываются под действием остаточных напряжений сжатия, а нижележащие – под действием растягивающих остаточных напряжений. Высокие напряжения от действия внешних сил и концентраторы напряжений приводят к разрушению поверхностного слоя в процессе эксплуатации.

В зависимости от характера прилагаемой нагрузки поверхностное пластическое деформирование может быть статическим и динамическим. К видам статического поверхностного деформирования принято относить холодную прокатку, обкатывание и раскатку. К видам ударного поверхностного деформирования – обработку дробью, чеканку, центробежную обработку, упрочнение взрывом.

Для деталей, работающих при статических нагрузках, применяют обычно обработку дробью и чеканку, для деталей, работающих при динамических нагрузках, – поверхностное обкатывание, обработку дробью, накатывание, упрочнение взрывом, при трении и скольжении – поверхностное обкатывание, при работе в коррозионных средах – обработку дробью и при повышенных температурах – поверхностное обкатывание. При поверхностном пластическом деформировании глубина упрочнения составляет 0,05-10 мм, микротвердость увеличивается на 20-50%, шероховатость существенно снижается.

Пластическое деформирование сопровождается изменением параметров кристаллической решетки, упрочнением поверхностных и подповерхностных слоев, возникновением сжимающих остаточных напряжений. Наиболее простым и

доступным средством повышения усталостной прочности деталей, как при изготовлении, так и при ремонте является накатывание поверхностей роликами (или шариками). Этот способ используют в качестве предшествующей операции при нанесении гальванических покрытий или окончательной операции в комбинации с термическим или химико-термическим упрочнением.

Отметим, что даже в случае статического поверхностного деформирования, при определенных условиях, в нагруженных слоях деталей могут возникать устойчивые динамические режимы. В связи с такими особенностями поверхностного нагружения возможно проявление трех видов динамических задач:

- 1) задача о внезапном приложении касательных нагрузок к поверхностным слоям детали (исследована нами ранее: «МГП», № 6, 2018 г.);
- 2) задача о нагружении поверхностных слоев детали периодической касательной нагрузкой;
- 3) задача о нагружении поверхностных слоев детали касательной нагрузкой, обусловленной нестационарным трением между формообразующим инструментом и деталью (подлежит дальнейшему исследованию, рис. 1).

В данном исследовании обратимся к задаче 2.

Предположим, что к моменту рассмотрения данного вопроса переходный волновой процесс при захвате заготовки роликами уже завершился и имеет место между роликами и заготовкой установившийся автоколебательный процесс.

Рассмотрим схему обработки заготовки в роликах формообразующего инструмента машины «холодной» обработки металлов давлением (рис. 2).

При этом заготовку можно условно представить в виде гибкого шарнирно опертого стержня длиной l , где l – это длина части заготовки, подвергнутая продольному изгибу для балки, лежащей на упругом основании, которым являются внутренние слои заготовки, не испытывающие продольных деформаций. Опору балки в точке А можно считать шарнирно подвижной, так как валки сдвигают деформационный слой металла в сторону, противоположную направлению технологического процесса, а опору балки можно счи-

тат шарнирно неподвижной в точке В, так как в этой точке (поперечный) прогиб и осевое перемещение равны нулю. При этом длина участка, где балка теряет продольную устойчивость l , подлежит определению.

Можно представить, что изогнутая линия балки имеет вид синусоиды, состоящей из n полуволн (рис. 3):

$$v = A \sin \frac{n}{l} x, \quad (1)$$

где A – амплитудное значение волны синусоиды;

n – число полуволн синусоиды (для балки на упругом основании);

l – длина деформированного участка балки (длина участка балки, потерявшей упругую устойчивость) ($l \leq l_0$ – меньше длины заготовки).

Как следует из [1], жесткость упругого основания C , отнесенная к изгибной жесткости балки EI , связана с числом полуволн n и длиной участка балки, потерявшего упругую устойчивость l , следующим соотношением $\left(r = \frac{C}{EI}\right)$:

$$r = n^2 (n+1)^2 \frac{\pi^4}{l^2}. \quad (2)$$

Вместе с тем отношение действующей продольной силы T (близкой к своему критическому значению) к изгибной жесткости балки на упругом основании [1] также связано с числом полуволн балки, потерявшей продольную устойчивость, следующим соотношением $\left(\frac{T}{EI}\right)$:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2 [n^2 + (n+1)^2]}. \quad (3)$$

Рис. 3. Деформации поверхностных слоев детали при обкатке роликом:

$p(x)$ – нормальное напряжение в зоне контакта ролика и детали; T, T_1, T_2 – общее касательное усилие и усилия на участках детали подверженных поверхностной деформации; l_1 – растянутый участок; l_2 – сжатый участок; Δl_1 – деформация сжатого участка; h – толщина накатанного слоя; n – число полуволн поверхностных слоев при потере устойчивости; v – поперечный прогиб накатанных слоев; A – амплитуда деформационной волны синусоиды

Рис. 1. Характеристика трения скольжения между заготовкой и инструментом как функция скорости скольжения V

Рис. 2. Схема обработки заготовки в роликах формообразующего инструмента машины «холодной» обработки металлов давлением:

а) упрощенная схема холодной прокатки;
б) схематизация деформированного слоя

Из выражений (2) и (3) находим l и в представленных выражениях приравниваем правые части.

В результате выполненных преобразований и приведения подобных слагаемых получено уравнение четвертой степени относительно неизвестного числа полуволен (n):

$$l^4 = \frac{\pi}{k^4 [4n^4 + 4n^2(2n+1) + (2n+1)^2]}; \quad (4)$$

$$l^4 = \frac{\pi^4}{r [4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n + 1]}; \quad (5)$$

$$4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = \frac{k^4}{r [n^4 + 2n^3 + n^2]}; \quad (6)$$

$$\left(4 - \frac{k^4}{r}\right)n^4 + \left(8 - 2\frac{k^4}{r}\right)n^3 + \left(8 - \frac{k^4}{r}\right)n^2 + 4n + 1 = 0. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой уравнение четвертой степени относительно числа полуволен части гипотетической балки, потерявшей устойчивость (или перед потерей ею продольной устойчивости).

В качестве решения уравнения (7) могут быть приняты только действительные положительные числа.

После определения числа полуволен n на гипотетической балке, используя соотношения (2) или (3), получим длину гипотетической балки l , которая является частью общей длины заготовки. Заметим, что после достижения продольной силой критического значения T_k балка практически мгновенно теряет свою прямолинейную форму, при этом волны продольных и изгибных деформаций проходят со скоростью распространения звука в заготовке:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (8)$$

где E – модуль упругости материала заготовки;
 ρ – плотность этого материала.

Эти волны приведут к изменению состояния равновесия балки. Вместе с тем обрабатываемая заготовка (после валков) движется по направлению обработки, а деформированная часть балки остается «неподвижной» относительно цилиндрических вращающихся валков.

Таким образом, используя приведенные соотношения (2), (7), получим длину балки (ее части) l , потерявшей продольную устойчивость и число полуволен n на деформированной части балки. Заметим, что при отсутствии упругого основания (или дополнительных опор), деформация балки происходит по одной полуволе синусоиды. Полученную длину $l = l^*$ будем называть кри-

тической длиной балки. Тогда величину $\lambda = \frac{l^*}{n}$ назовем критической длиной одной полуволны.

Обратимся непосредственно к балке на упругом основании, которая может быть уподоблена части обрабатываемой полосы длиной l^* при наличии упругого основания (с коэффициентом отпора основания r).

Заметим, что в процессе обработки наружные слои деформируемой полосы испытывают значительные продольные перемещения, которые при продольном изгибе связаны с поперечными перемещениями соотношением [3]:

$$w(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi, \quad (9)$$

где $w(x, t)$ – полное продольное перемещение прокатываемой полосы;

$u(x, t)$ – продольное перемещение полосы от деформации сжатия;

$v(x, t)$ – поперечное перемещение прокатываемой полосы при потере ее устойчивости.

Исходя из выражения (9), следует, что поперечные смещения деформируемой полосы при установившемся режиме обработки обусловлены продольными колебаниями полосы.

Характерной особенностью задачи является то, что продольная сила по длине полосы является переменной величиной [4].

$$N(x, t) = T_0 + T_t \cos \Theta t - \int_x^l m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz. \quad (10)$$

Отметим, что выражение (10) имеет как «силовую», так и «инерционную» составляющие, при этом инерционная часть является переменной по длине балки.

Кроме того, уместно отметить, что продольная сила может быть определена из продольной деформации стержня по аналогии с законом Гука в форме:

$$N(x, t) = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (11)$$

Исходя из [2] и выражений (10), (11), получим дифференциальное уравнение (12), в котором продольные перемещения увязаны с поперечными перемещениями:

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \int \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] d\xi; \quad (12)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

В выражениях (12), (13), (14) F , I – площадь и момент инерции упрочненного слоя.

Заметим, что дифференциальное уравнение (13) с учетом выражения (11) может быть записано в виде (14). При этом дифференциальное уравнение описывает поперечные колебания балки на упругом основании с переменной по длине силой $N(x, t)$.

Тогда дифференциальное уравнение (13) с учетом (11) будет существенно нелинейным уравнением, описывающим продольный изгиб балки на упругом основании с учетом продольных перемещений.

В этом случае краевая задача будет содержать дифференциальное уравнение продольных колебаний деформированной полосы (12), связанное с дифференциальным уравнением, описывающим продольный изгиб полосы.

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

При этом поперечные перемещения балки (полосы) ищем в виде:

$$v = \sum v_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (15)$$

с граничными условиями для $v(x, t)$, $u(x, t)$.

$$\begin{cases} v(0, t) = 0; & v(l, t) = 0 \\ v'_x(0, t) = 0; & v'_x(l, t) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Граничные условия для $u(x, t)$ принимаем:

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ EFu'_x(l, t) = T_0 + T_t \cos \Theta t. \end{cases} \quad (17)$$

Решение задачи (12), (13), (16) сопряжено с серьезными математическими трудностями. Упростим задачу, определим отдельно поперечные перемещения $v(x, t)$ с учетом продольных перемещений, вычисленных для однородного уравнения.

Учитывая тот факт, что нас интересует в большей степени влияние продольных колебаний на поперечные, а не наоборот, то в нашем случае, допустимо пренебречь нелинейными составляющими от поперечных колебаний в уравнении (12) с учетом такого допущения, система (12), (13), (16), (17), распадается на независимое однородное уравнение продольных колебаний (18) с неоднородными граничными условиями (14) и однородное уравнение поперечных колебаний (13):

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (19)$$

Как известно [4], такая задача допускает решение для установившегося режима движения в виде:

$$u(x, t) = \frac{T_0 x}{EF} + u_0(x) \cos \Theta t. \quad (20)$$

Таким образом, функция $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \Theta^2 u_0 = 0 \quad (21)$$

или с учетом:

$$\frac{m \Theta^2}{EF} = \gamma \zeta^2 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \zeta^2 u_0 = 0. \quad (23)$$

Рассматривая (23) с учетом граничных условий:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ EF \frac{\partial u_0(l)}{\partial x} = T_t, \end{cases} \quad (24)$$

получаем:

$$u_0(0) = \frac{T + \sin \zeta x}{\zeta EF \cos \zeta l}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20), найдем продольное перемещение $u(x, t)$ без учета влияния поперечных перемещений в виде:

$$u(x, t) = \frac{T_0 x}{EF} + \frac{(T_t + \sin \zeta x) \cos \Theta t}{\zeta \gamma EF \cos \zeta l}. \quad (26)$$

При $\cos \zeta l = 0$ выражение (26) обращается в ∞ . Это соответствует резонансу продольных колебаний.

Учитывая $\zeta = \Theta_k \sqrt{\frac{m}{EF}}$, находим, что резонансный режим возникает при:

$$\Theta_k = \frac{k\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}, \quad (k = 1, 3, 5...). \quad (27)$$

В нашем случае Θ является частотой продольного автоколебательного процесса, происходящего при взаимодействии рабочего органа и деформируемой полосы (обычно автоколебательные процессы происходят по одной из собственных частот продольных колебаний).

Если подставить в дифференциальное уравнение (13), описывающее колебательный процесс при продольном изгибе, выражение для $v(x, t)$ в форме ряда (15), то в результате преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение типа:

$$v'_k + \omega_k^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_k} - \psi \frac{T_t}{T_k} \cos \Theta t \right) v = 0 \quad (28)$$

или в форме Матье:

$$v'_k + \Omega_k^2 (1 - 2\mu \psi \cos \Theta t) v = 0. \quad (29)$$

В выражениях (28), (29) коэффициент ψ определяется согласно [4] в виде:

$$\psi = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\cos vx}{\cos \zeta vl} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx \quad (30)$$

или

$$\psi = \frac{tg \zeta l}{\zeta l} \frac{1 - \frac{\zeta^2 l^2}{4\pi^2}}{1 - \frac{\zeta^2 l^2}{4\pi^2}}. \quad (31)$$

Судя по форме, коэффициент ψ зависит только от состояния между возбуждающей частотой и собственной частотой продольных колебаний.

В приведенном выражении (28):

$$\omega_k = \frac{1}{m \left(\frac{k^4 \pi^4 EI}{l^4} + \beta \right)},$$

где k -я – частота собственных изгибных колебаний незагруженного стержня на упругом основании;
 β – коэффициент постели;

$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_{*k}}}$ – частота собственных поперечных колебаний системы, нагруженной постоянной составляющей продольной силы;

$T_k = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2}$ – выражение для k -й критической силы совокупности дифференциальных уравнений (28);

μ_k – так называемый коэффициент возбуждения:

$$\mu_k = \frac{T_t}{2(T_k - T_0)}.$$

Выражение для коэффициента ψ можно аппроксимировать [4] более простым выражением:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\Theta \zeta 4 l^2 m}{\pi^2 EF}}. \quad (32)$$

Следовательно, учет продольных колебаний при исследовании продольного динамического изгиба деформированной полосы сводится к введению эффективной продольной силы:

$$N(t) = T_0 + T_t \frac{\cos \Theta t}{1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2 l}}, \quad (33)$$

где Θ – частота автоколебаний полосы при прокатке, возбуждаемых за счет нестационарной характеристики трения между инструментом и заготовкой;

$\omega_L = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}$ – низшая собственная частота продольных колебаний заготовки деформированного слоя.

Если отвлечься в системе уравнений (12), (13), (16), (17) от связанности продольных и поперечных колебаний, а также считая продольную силу постоянной по длине заготовки, то вместо уравнений (12), (13) получим уравнение, которое проще исследовать для определения критических частот. При необходимости в результаты решения можно ввести эффективную продольную силу (33).

Полагая, что инерционная составляющая по длине заготовки равна 0, тогда вместо системы (12), (13), (16), (17) приходим к уравнению:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (34)$$

где $N(t)$ – нестационарная продольная сила, обусловленная нелинейным трением между инструментом и заготовкой при пластическом деформировании (рис. 3): $N(t) = T_0 + T_t \cos \Theta t$, где T_0 – усредненное (установившееся) значение продольного усилия; T_t – половина амплитуды автоколебаний нагрузки.

Решение (34) можно представить в виде ряда (для решения задачи в линейной постановке или слабой нелинейности):

$$v(x, t) = \sum v_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (35)$$

где $v_k(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению. Фундаментальные функции задачи $\varphi_k(x)$ имеют вид:

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (36)$$

При этом фундаментальные функции являются формами собственных изгибных колебаний и формами потери устойчивости шарнирно опертого стержня при продольном изгибе. Фундаментальные функции (36) соответствуют граничным условиям (16). После подстановки (35) в (34) приходим к совокупности дифференциальных уравнений:

$$v_k^4 + \omega_k^2 \left(1 - \frac{T_0 + T_t \cos \Theta t}{T_k} \right) v_k = 0, \quad (37)$$

где $\omega_k = \frac{1}{m} \left(\frac{k^4 \pi^4 EI}{l^4} + \beta \right)$ – частота собственных колебаний незагруженного стержня на упругом основании;

$T_{*k} = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2}$ – значение k критической силы стержня на упругом основании (гипотетической балки).

Совокупность уравнений (37) преобразуем к совокупности уравнений Матье вида [5]:

$$v_k'' + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \Theta t) v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (38)$$

где Ω_k – частота поперечных собственных колебаний системы, нагруженной постоянной составляющей продольной силы $\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_k}}$;

μ_k – малый параметр, называемый коэффициентом возбуждения нагрузки $\mu_k = \frac{T_t}{2(T_k - T_0)}$.

Воспользуемся уравнением (38) в форме Матье для построения периодических решений и определения критической частоты, при которых наступают неустойчивые состояния для описываемых колебательных процессов.

Определение критических частот, при которых наступают неустойчивые состояния в условиях процесса обработки детали

Периодическое решение уравнений Матье ищем в виде ряда [4]:

$$v_k(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left(a_k \sin \left[\frac{k\Theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\Theta t}{2} \right] \right) \quad (39)$$

Подстановка ряда (39) в дифференциальное уравнение Матье после приравнивания коэффициентов при $\sin \frac{k\Theta t}{2}$, $\cos \frac{k\Theta t}{2}$ согласно [4] приводит к уравнениям для определения критических частот, при которых возможно неограниченное возрастание амплитуд уравнений (38), иначе говоря, выражает вероятность возникновения параметрического резонанса.

Уравнение критических частот в общем случае имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\Theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 \dots \\ -\mu & 1 - \frac{9\Theta^2}{4\Omega^2} & -\mu \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{9\Theta^2}{4\Omega^2} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

Откуда следует, что критическая частота, при которой возникает параметрический резонанс равна:

$$\Theta_* = \frac{2\Omega}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Формула (41) дает соотношение между частотой изменения силы трения (скольжения) между валками и заготовкой, при котором возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний. Около соотношений (41) располагаются области динамической неустойчивости стержня (заготовки).

В соответствии с числом k различают первую, вторую, третью и т. д. области динамической неустойчивости. Область неустойчивости, лежащая вблизи $\Theta_* = 2\Omega$, является наиболее опасной, и поэтому имеет наибольшее практическое значение. Эту область называют главной областью динамической неустойчивости [4].

Определение амплитуд деформационных волн в процессе обработки заготовки

В решении задачи о продольном изгибе деформируемого слоя прокатываемой заготовки при линейной постановке задачи мы получаем верный ответ о величинах критической силы и критической частоты, оставляя открытым вопрос о прогибах стержня в критической и послекритической стадиях.

Рассматривая этот вопрос применительно к теории обработки металлов давлением, недостаточно остановиться на линейном поведении материала при значительных его пластических деформациях.

Изначально будем исходить из линейного уравнения колебаний слоя, связанного с упругим основанием в виде (13) с учетом различных нелинейностей [3], [4]:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (T_0 + T_t \cos \Theta t + \Delta T) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (42)$$

При этом учтем точное значение кривизны изогнутой линии слоя ($1/\rho$):

$$a) \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right)^3}; \quad (43)$$

б) продольную упругую связь свободного конца слоя:

$$\Delta T (\Delta T = -cw), \quad (44)$$

где w – продольное перемещение свободного конца стержня;

c – жесткость упругой связи:

$$w = \frac{\pi^2 v^2}{4l} + \frac{3}{64} \frac{\pi^4 v^4}{l^3} + \dots; \quad (45)$$

в) переменную по длине составляющую продольной силы:

$$N(x, t) = \frac{\pi^2 m}{4} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right) [v'' + (v')^2]. \quad (46)$$

С учетом нелинейных факторов дифференциальное уравнение колебаний стержня на упругом основании при его продольном изгибе запишем в виде:

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\frac{\partial v^2}{\partial x^2}}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right)^3} \right] + (T_0 + T_t \cos \Theta t + \Delta T) \times$$

$$\times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta N \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (47)$$

Для решения уравнения (47), которое является базовым, используем метод Бубнова – Галеркина в виде:

$$v(x, t) = \sum_{k=1,2}^n v_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (48)$$

При этом в результате подстановки (48) в (47) переходим к уравнению типа Матье (49) с некоторыми нелинейными слагаемыми $\Psi_k(v_k, v_k', v_k'')$, которое включает нелинейности: а), б), в). Кроме того, в уравнение введем затухание ε (в общем случае нелинейное).

Из дифференциального уравнения (38) получены значения критических частот, которые имеют место для линейной задачи. Для задач с нелинейностью, которая состоит в использовании точного значения кривизны изогнутой оси стержня (случай а) или в учете продольной упругой связи ΔT (случай б), а также в учете переменной продольной силы ΔN , обусловленной распределенными по длине стержня силами инерции (случай в). Учитывая эти особенности в расчетной схеме задачи, которая предложена нами для описания существенно нелинейных эффектов при реализации процесса холодной прокатки было получено уравнение колебаний стержня на упругом основании, представленное в виде (47). После подстановки в (47) ряда (48), выполнения стандартных преобразований и группировки слагаемых получено дифференциальное уравнение, по виду соответствующее уравнению Матье и содержащее два дополнительных слагаемых, первое – $\Psi_k(v_k, v_k', v_k'')$ (существенно нелинейное) и второе, содержащее затухание в системе $2\varepsilon v_k'$, которое может быть как линейным, так и нелинейным. Полученное уравнение (47) с учетом (48) описывает параметрически возбуждаемые колебания в заготовке, на амплитуды колебаний которых существенно влияют дополнительные слагаемые. Тогда уравнение (47) может быть приведено к виду:

$$v_k'' + 2\varepsilon v_k' + \Omega_k^2 (1 - 2\mu \psi \cos \Theta t) v + \Psi_k(v_k, v_k', v_k'') = 0. \quad (49)$$

Рассмотрим отдельно влияние каждого нелинейного слагаемого функции ψ_k на колебательный процесс.

Случай а) (геометрическая нелинейность)

Нелинейная функция при учете геометрической нелинейности (уточненное значение кривизны упругой линии стержня) имеет вид ряда:

$$\Psi_k(t) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k v^{2k+1}, \quad (50)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2}; \quad \gamma_2 = \frac{3}{32} \frac{\pi^4 \omega^4}{l^4}.$$

Обычно в разложении часто бывает достаточно ограничиться первым членом ряда, то есть:

$$\Psi_1(t) = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2}. \quad (51)$$

Случай б) (учет нелинейной упругой связи стержня)

К нелинейной функции (50) приводит учет дополнительной продольной силы, обусловленной продольной жесткостью стержня, нелинейная функция при учете одного слагаемого с номером $k = 1$ имеет вид:

$$\Psi_1(t) = \gamma v^3(t), \quad (52)$$

где $\gamma = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2 \left(2 \frac{cl}{T_*} + 1 \right)}$ является коэффициентом нелинейной упругости.

Случай в) (учет нелинейной инерционности)

Учет инерционности подразумевает, что продольная сила по длине стержня изменяется в связи с изменением продольных перемещений, при этом по длине стержня появляется приращение продольной силы $\Delta N(x, t)$, а в исходном уравнении (47) появляется слагаемое $\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta N \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. Тогда в уравнении (49) функция $\Psi_3(t)$ имеет вид:

$$\Psi_3(t) = 2\chi v[v, (v'^2, v'')], \quad (53)$$

где $\chi = \frac{\pi^4}{4l^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right)$ – коэффициент, учитывающий инерционность самого стержня (его части, связанной с полосой заготовкой на упругом основании).

Особенности нелинейных функций будут нас интересовать при определении амплитуд параметрических колебаний, возникающих в технологическом процессе и оказывающих существенное воздействие на механизмы и детали машин для обработки металлов давлением.

Так как в уравнении (49) функции $\Psi_{1,2,3}(t)$ представлены как функции с малыми параметрами, то при определении амплитуд параметрических колебаний естественно искать решение (49), по форме соответствующее решению линейной задачи (48).

Решение (49) в виде (35) обращает нелинейное уравнение в тождество, если функции $\Psi(v, v', v'')$ не содержат слагаемых с четкими степенями.

Сделаем вывод по поводу влияния функций Ψ_1, Ψ_2 на параметрические колебания стержня. Судя по первому приближению функции Ψ_1, Ψ_2 описываются одним выражением, формула (52). Отличие заключается только в выражении для постоянного множителя:

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2} \left(2 \frac{cl}{T_*} + 1 \right).$$

Если предположить, что жесткость упругой связи $c \equiv 0$, то значение γ совпадает с его же значениями (для случая а). То есть геометрическая нелинейность уже создается выражением $\Psi_2(t)$, формула (52). Поэтому учет геометрической нелинейности выполняется автоматически. Рассматривая жесткость упругой связи, под ней будем подразумевать продольную жесткость деформируемого слоя заготовки. Так как процесс прокатки заготовки происходит в упругопластической области, то жесткость дополнительной упругой связи должна быть вычислена с учетом приведенного модуля упругости заготовки [6]:

$$E_{**} = \frac{4EE_*}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_*})^2}, \quad (54)$$

где E – номинальный модуль упругости прокатываемого материала;

E_* – касательный модуль упругости материала;

E_{**} – приведенный модуль упругости материала в упруго-пластичной зоне.

Объединим нелинейные функции $\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t)$ в одну существенно нелинейную функцию $\Psi(t)$.

При этом новая функция не содержит четных степеней v, v', v'' :

$$\Psi(v, v', v'') = \sigma v^3 + 2\varepsilon_4 v^2 v' + 2\chi v [vv'' + (v')^2] \quad (55)$$

и удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим колебания, которые происходят при главном резонансе $\Theta \approx \frac{2\Omega}{k}$, то есть ряд (39) запишем в виде:

$$v(t) = a \sin \frac{\Theta t}{2} + b \cos \frac{\Theta t}{2}. \quad (56)$$

Иначе ограничимся в разложении главными составляющими, где:

a, b – составляющие амплитуды колебаний при главном резонансе:

$$A = a^2 + b^2. \quad (57)$$

Тогда систему алгебраических уравнений для определения амплитуд на основании [4] запишем в виде:

$$\left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\Theta^2}{4} \right] a - \varepsilon \Theta b + \varphi(a, b) = 0. \quad (58)$$

Если подставить выражение $v(t)$ в выражение для нелинейной функции $\Psi(v, v', v'')$, то получим:

$$\begin{aligned} \Psi^*(v, v', v'') &= \frac{A^2}{4} (3\gamma a - \varepsilon_4 \Theta b - \chi \Theta^2 a) \sin \frac{\Theta t}{2} + \\ &+ \frac{A^4}{4} (3\gamma ab - \varepsilon_4 \Theta a - \chi \Theta^2 b) \cos \frac{\Theta t}{2}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\varphi(a, b), \Psi(a, b)$ являются коэффициентами разложения функции $\Psi^*(v, v', v'')$ в ряд Фурье:

$$\varphi(a, b) = \frac{A^2}{4(3\gamma a - \varepsilon_L \Theta b - \chi \Theta^2 a)}. \quad (60)$$

Введем обозначения: $n = \frac{\Theta}{2\Omega}; \Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}; \Delta_L = \frac{\pi\varepsilon_L}{2\Omega}$.

Приравняв нулю определитель при неизвестных a и b (58), получено общее выражение для амплитуды при параметрическом резонансе в системе с учетом нелинейного выражения для кривизны, нелинейной упругости и нелинейной инерционности. Тогда будем иметь следующее общее выражение для амплитуды установившихся параметрических колебаний в системе:

$$A = \sqrt{\frac{P(1-n^2) - \frac{n^2}{\pi^2} \Delta \Delta_L \pm \sqrt{\mu^2 \left(P^2 + \frac{n^2}{\pi^2} \Delta L^2 \right) - \frac{n^2}{\pi^2} [P\Delta + \Delta_L(1-n^2)]^2}}{P^2 + \frac{n^2}{\pi^2} \Delta_L^2}}, \quad (61)$$

где $P = \chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}$.

Рассмотрим случай, когда $\Psi(v) = \gamma v^3$ (случай нелинейной упругости). Выражение для амплитуды примет вид:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}}. \quad (62)$$

Для нелинейной инерционности

В случае нелинейной инерционности нелинейная функция имеет вид:

$$\Psi(v, v', v'') = 2\chi v [vv'' + (v')^2]. \quad (63)$$

Тогда для определения амплитуды A формула:

$$A = \frac{1}{n\sqrt{\chi}} \sqrt{1 - n^2 - \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}}. \quad (64)$$

В формулах для амплитуд (61), (62), (63) имеем по два решения, одно из которых неустойчиво. Обращаясь к формулам для определения амплитуд, приведем выражения для используемых в расчетах коэффициентов:

$$P = \chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2} - \text{коэффициент, учитывающий}$$

распределенную инерционность и нелинейную упругость;

$$n = \frac{\Theta}{2\Omega} - \text{отношение частот;}$$

$$\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega} - \text{коэффициент затухания;}$$

$$\Delta_4 = \frac{\pi\varepsilon_4}{2\Omega} - \text{коэффициент нелинейного затухания;}$$

$$\mu = \frac{T_t}{2(T_{*k} - T_0)} - \text{коэффициент возбуждения на грузки;}$$

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2} \left(2 \frac{cl}{T_*} + 1 \right) - \text{коэффициент нелинейной упругости, где } c = \frac{\pi^2 E_1 J_1}{2l^3} - \text{изгибная жесткость упрочненного слоя.}$$

Все приведенные в формулах (61), (62), (64) коэффициенты обычно вычисляются с использованием величины модуля упругости E . Так как при решении задач прокатки имеет место упруго-пластическое состояние прокатываемого материала, поэтому при расчёте всех перечисленных коэффициентов должен быть использован приведенный модуль упругости E_{**} .

Учет влияния продольных колебаний на дифференциальное уравнение колебаний стержня при его продольном изгибе с нелинейными эффектами (49) можно произвести после подстановки (35) в уравнение (49) и приведения всех слагаемых к стандартному виду (49) с одним отличием, в качестве коэффициента μ'_k необходимо принять коэффициент $\mu'_k = \Psi \mu_k$ (модифицированный коэффициент возбуждения системы), где Ψ – коэффициент эффективности продольной силы

$$\Psi = \frac{\omega_4^2}{\omega_k^2 - \Theta_k^2}; \quad (65)$$

$$\omega_L = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}. \quad (66)$$

Тогда дифференциальное уравнение Матье приобретет вид:

$$v_k'' + 2\varepsilon v_k' + \Omega_k^2 (1 - 2\mu'_k \Psi \cos \Theta t) v_k + \Psi \mu_k (v_k, v_k', v_k'') = 0. \quad (67)$$

И для определения амплитуд установившихся параметрических колебаний с учетом продольных колебаний можно использовать формулы (61), (62), (64), только вместо коэффициента возбуждения системы μ_k необходимо взять модифицированный коэффициент μ'_k .

Анализ формулы для установившихся амплитуд:

а) выполним упрощение формулы (64) и оставим в выражении слагаемые, учитывающие только затухание (ее линейную часть), тогда выражение для амплитуд представим в виде:

$$A = \frac{1}{P} \sqrt{1 - n^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}}. \quad (68)$$

Формула обеспечивает для амплитуды вещественные значения, пока $\frac{n\Delta}{\pi} < \mu$ или $\frac{\Delta}{\pi} < \mu$, так как $n \approx 1$. (Введем понятие критического коэффициента возбуждения $\mu_{*1} = \frac{\Delta}{\pi}$; $\mu_{*k} = k \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}$.)

Если же $\frac{\Delta}{\pi} > \mu$, то установившиеся колебания не возникают вообще. Заметим, что величина $P = \chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}$.

С уменьшением затухания его влияние на величину амплитуды вообще не ощутимо. Так, при $\mu > 3\mu_*$ (где μ_* – критический коэффициент возбуждения) формула (64) приобретает вид (69), использование последующей формулы дает для практики приемлемые результаты [4]:

$$A = \sqrt{\frac{1 - n^2 \pm \mu}{P}}; \quad (69)$$

б) выясним, как влияет на установившиеся амплитуды величина внешней нагрузки, обращаясь к формуле для амплитуд [4]:

$$A = \sqrt{\frac{2\mu}{[P]}}. \quad (70)$$

Как видно из формулы, амплитуда колебаний растет пропорционально корню квадратному из амплитуды периодической силы, где:

$$\mu_k = \frac{T_t}{2(T_* - T_0)}; \quad (71)$$

в) при наличии двух факторов – нелинейной упругости и нелинейной инерционности – обратимся к параметру $P = \chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}$, если $P > 0$, преобладает нелинейная инерционность, если $P < 0$, преобладает нелинейная упругость.

Если $\frac{4}{3}\chi \frac{\Omega^2}{\gamma} > 1$ ($n \approx 1$), то амплитуды будут возрастать с уменьшением возбуждающей частоты.

Если $\frac{4}{3}\chi \frac{\Omega^2}{\gamma} < 1$ ($n \approx 1$), то амплитуды будут возрастать с увеличением возбуждающей частоты;

Если $P \equiv 0$, то получим выражение для критической частоты Θ_∞ :

$$n_\infty = \frac{\Theta_\infty}{2\Omega}, \text{ тогда } \Theta_\infty = 2n_\infty\Omega = \sqrt{3\frac{\gamma}{\chi}}. \quad (72)$$

В формуле (72) $\omega_L = \sqrt{\frac{\gamma}{\chi}}$ представляет «линеаризованную» частоту колебаний в продольной системе, если не учитывать множитель $\sqrt{3}$.

Если нелинейная упругость и нелинейная инерционность компенсируют друг друга, то частота Θ_∞ попадает в область динамической неустойчивости. Этот случай является наиболее благоприятным с точки зрения амплитуд колебаний: параметрический резонанс и резонанс в продольной системе накладываются друг на друга. Конечность амплитуд сохраняется за счёт нелинейности затухания. На графике (рис. 4) показана зависимость амплитуд от нелинейной упругости деформируемого слоя.

Остановимся на рекомендациях по мерам борьбы с параметрическими колебаниями. Нами могут быть предложены следующие мероприятия:

– увод конструкции из описанной области путем изменения ее параметров;

Рис. 4. Зависимость амплитуд от нелинейной упругости деформируемого слоя, где $A_0^2 = \frac{2l^2 T_t}{\pi^2 k T_\infty}$

– линейное демпфирование. Эффективно, если затухание $\mu_\infty \approx \mu$. При $\mu_\infty > \mu$ параметрическое возбуждение становится невозможным.

Рассмотрим более подробно критические значения коэффициента возбуждения. Решая алгебраическое уравнение (40) относительно критических частот [4], получаем формулу:

$$\Theta_* = 2\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^4}}. \quad (73)$$

Так как декремент затухания Δ весьма мал по сравнению с 1, то $\Delta = 0,01 \div 0,05$, потому вместо (73) запишем упрощённую формулу:

$$\Theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}. \quad (74)$$

Для предельного случая $\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2$ определим минимальное значение коэффициента возбуждения, при котором возможно возникновение незатухающих колебаний, тогда для первой главной области неустойчивости следует, что критическое значение коэффициента возбуждения составляет:

$$\mu_{*1} = \frac{\Delta}{\pi}. \quad (75)$$

Из (75) следует, что чем больше затухание, тем больше амплитуда продольной силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость полосы.

Переходим к определению границ второй области неустойчивости.

Решая алгебраическое уравнение (40) относительно критических частот, получаем формулу [4]:

$$\Theta_* = \Omega \sqrt{1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 (1 - \mu^2)}}. \quad (76)$$

Минимальное значение μ , при котором (76) дает для частоты вещественные значения, найдём из условия:

$$\mu^4 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 (1 - \mu^2) = 0. \quad (77)$$

Приближённое значение коэффициента возбуждения будет равно:

$$\mu_{*2} = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}. \quad (78)$$

Для определения границ третьей области неустойчивости воспользуемся зависимостью для Θ_* [4].

$$\Theta = \frac{2\Omega}{3} \sqrt{1 - \zeta}; \quad (79)$$

$$\zeta = \frac{\frac{8}{9}\mu^2 \pm \sqrt{\mu^6 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{64}{81} - \frac{2}{3}\mu^2\right)}}{\frac{64}{81} - \mu^2}. \quad (80)$$

Из выражения (80) видно, что возникновение третьего резонанса возможно при условии:

$$\frac{\Delta}{\pi} < \frac{\mu^3}{\frac{64}{81} - \frac{2}{3}\mu^2}. \quad (81)$$

Тогда:

$$\mu_{*3} = \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\pi}}. \quad (82)$$

Обобщая формулы, приходим к выводу, что для возбуждения колебаний при частоте k -порядка:

$$\Theta_* = \frac{2\Omega}{k}, \quad k = 1, 2, 3... \quad (83)$$

Необходимо, чтобы коэффициент возбуждения перешел критическое значение:

$$\mu_{*k} = \sqrt[k]{\frac{\Delta}{\pi}}, \quad k = 1, 2, 3..., \quad (84)$$

где $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega\sqrt{1 - \frac{T_0}{T_*}}}$ – декремент затухания собствен-

ных колебаний стержня нагруженного постоянной составляющей продольной силы;

$$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} - k\text{-я частота собственных колебаний незагруженного стержня};$$

ε – коэффициент затухания (экспериментальная константа).

Общие выводы. Проанализируем более детально степень влияния на амплитуды периодических колебаний параметров обрабатываемой заготовки и силовых составляющих, приложенных к заготовке в результате нагружения ее поверхностных слоев пульсирующими продольными нагрузками. При этом согласно (70) рассмотрим коэффициент возбуждения нагрузки μ и коэффициент распределенной инерционности и нелинейной упругости p . Если судить по формуле (70), то амплитуда автоколебаний будет пропорциональна корню квадратному из отношения половины амплитуды переменной нагрузки к разности между критической силой для внешних слоев T_x и средним значением сжимающей силы T_0 и обратно пропорциональна корню квадратному из коэффициента нелинейной инерционности и нелинейной упругости p . Отметим, что амплитудные значения сжимающей силы будут связаны соотношениями $T_{TP \max} = \frac{2T_0 + T_i}{2}$

и $T_{TP \min} = \frac{2T_0 - T_i}{2}$, где $T_{TP \max}$ и $T_{TP \min}$ – максимальное и минимальные значения силы трения между роликом и заготовкой, согласно характеристике трения [9]. Обращаясь к формулам (61), (62), (64), (70), делаем вывод, что коэффициент p в значительной степени (для обработки металлов давлением) обусловлен нелинейной упругостью γ , а не инерционностью. Поэтому считаем, что коэффициент инерционности χ является величиной второго порядка малости по отношению к коэффициенту нелинейной упругости γ . Тогда формулу (70) запишем в следующем виде, ориентируясь на главную гармонику ($k = 1$) и будем иметь:

$$A \approx \frac{2\Omega}{\sqrt{3}\gamma} \sqrt{\mu}. \quad (85)$$

Подставляя в (85) вместо Ω , γ , μ их значения, получим амплитуду для первой гармоники:

$$A = 4\sqrt{\frac{2}{3}}l \frac{1}{\sqrt{\frac{2cl}{T_x} + 1}} \sqrt{\frac{T_t}{2T_x}}. \quad (86)$$

В формуле (86) подкоренное выражение знаменателя $\frac{2cl}{T_x} \gg 1$ представляет собой квадрат коэффициента нелинейной упругости, тогда критическая сжимающая сила T_x и в числителе, и в знаменателе сокращаются, и, следовательно, амплитуда главной гармоники при параметрических колебаниях будет прямо пропорциональна корню квадратному из амплитуды периодической составляющей сжимающей силы и обратно пропорциональна изгибной жесткости упругого слоя (c).

При этом необходимо подбирать параметры колебательной системы таким образом, чтобы коэффициент критической нагрузки:

$$\mu_{*1} = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega} > \mu \quad (87)$$

превышал коэффициент возбуждения нагрузки μ , поэтому в колебательную систему машины по обработке металлов давлением необходимо вводить демпфирующие элементы в соответствии с условием (87), выполнение которого предотвращает возникновение параметрических колебаний.

Введением упругих и инерционных нелинейностей можно добиться снижения амплитуд параметрических колебаний. При выполнении процесса прокатки нелинейная упругость напрямую связана с температурой заготовки, в этом случае управление температурным процессом затруднительно, поэтому нелинейная упругость может быть введена как дополнительный элемент

в приводных механизмах стана путем применения муфт с билинейной характеристикой. Как правило, оптимально настроенная муфта с мягкой характеристикой является муфтой с предварительным сжатием амортизатора. Самый простой вариант – применение упругих муфт с предварительным сжатием амортизаторов или пружин.

Применение нелинейной инерционности связано с изменением масс и моментов инерции элементов станков, что, в конечном счёте, приводит к повышению металлоемкости приводных механизмов, поэтому, на наш взгляд, такая мера может оказаться не достаточно обоснованной.

Кроме перечисленных методов снижения динамических нагрузок, эффективным является применение демпферов. В промышленности нашли применение демпферы сухого, внутреннего трения и жидкостного трения.

Наиболее предпочтительным вариантом при применении демпферов являются демпферы жидкостного трения (гидравлические).

Как правило, такие демпферы обладают нелинейной характеристикой. Возможна установка демпфера в приводе последовательно или параллельно упругой связи. Наличие в приводе стана параллельно установленного демпфера позволит обеспечить затухающий колебательный процесс. При использовании в приводе последовательно установленных демпферов позволит обеспечить в приводе периодическое затухающее движение (такой подход, на наш взгляд, является более приемлемым).

Отметим, что динамические нагрузки в условиях приводов прокатных станов в значительной степени обусловлены зазорами между взаимодействующими деталями, включая также и зубчатые передачи.

Способ предварительного устранения зазоров в сочленениях позволяет уменьшить коэффициент динамичности в приводе от $k_g = 3 \div 8$ до $k_g \approx 2$.

Библиографический список / References

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 800 с.
Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformiruemyykh sistem*. Moscow, Nauka, 1972, 800 p.
2. Вибрации в технике. Справочник: в 6 т. / под ред. В. Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
Chelomeya V. N. (ed.) *Vibratsii v tekhnike*. Moscow, Mashinostroenie, 1978, vol. 1, 352 p.
3. Вибрации в технике. Справочник: в 6 т. / под ред. В. Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – 351 с.

Chelomeya V. N. (ed.) *Vibratsii v tekhnike* Moscow, Mashinostroenie, 1979, vol. 2, 351 p.

4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 650 с.

Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem*. Moscow, GITTL, 1956, 650 p.

5. Вульфсон И. И. Нелинейные задачи динамики машин / И. И. Вульфсон, М. З. Коловский. – М.: Машиностроение, 1968. – 284 с.

Vul'fson I. I., Kolovskiy M. Z. *Nelineynye zadachi dinamiki mashin*. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 284 p.

6. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1967. – 420 с.

Panovko Ya. G., Gubanova I. I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprtsgikh sistem*. Moscow, Nauka, 1967, 420 p.

7. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

Panovko Ya. G. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. Moscow, Nauka, 1985, 288 p.

8. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1991. – 334 с.

Alfutov N. A. *Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem*. Moscow, Mashinostroenie, 1991, 334 p.

9. Смирнов В. А. Механика приводов прокатных станов / В. А. Смирнов, Р. А. Яковлев. – М.: Металлургия, 1977. – 219 с.

Smirnov V. A., Yakovlev R. A. *Mekhanika privodov prokatnykh stanov*. Moscow, Metallurgiya, 1977, 219 p.

Мета. Обґрунтування впливу пульсуючих динамічних навантажень у поверхневих шарах деталей, одержуваних методами пластичного деформування, на якість готової продукції при холодній прокатці, накатці, обкатці, волочінні і штампуванні.

Методика досліджень. У роботі прийнято схематизацію, в якій заготовка або деталь є анізотропним середовищем, пружно скріпленим по поверхні примикання зовнішніх зміцнених шарів з внутрішнім масивом деталі. На основі запропонованої фізичної моделі знайдено умови, за яких під дією циклічних поверхневих навантажень можливі порушення цілісності, поява тріщинуватості і хвилястості зовнішніх волокон у процесі зміцнюючої обробки напівфабрикатів і деталей.

Результати. Отримані дані дозволяють встановити, частотні характеристики процесу нестійких параметричних коливань, викликаних нелінійним тертям між формотворчим елементом і заготовкою (деталлю), які призводять до погіршення якості готових виробів. Крім того, для сталих режимів роботи машин з холодної обробки металів тиском отримано залежності амплітуд деформаційних хвиль як функцій від максимальних пульсацій «періодичних» складових

поверхневих зусиль, а також запропоновано заходи щодо зниження віброактивності в зоні взаємодії інструмента із заготовлею і деталях машин з холодної обробки.

Наукова новизна. Сформульовано і вирішено другу динамічну задачу для поверхневих шарів заготовки на кордоні розділу оброблених шарів і масиву заготовки. Визначено, залежно від виникаючих періодичних сил для поверхневих шарів, умови стійкої і нестійкої роботи формувального інструмента і всієї машини з обробки металів тиском у цілому.

Практична значущість роботи полягає в тому, що виявлено безпечні режими експлуатації верстатів з обробки металів тиском, сформовано умови удосконалення конструкції машин з холодної обробки металів тиском, за яких будуть мінімізовані можливості виникнення параметричних коливань, а також зниження віброактивності машин з холодної обробки металів тиском у цілому.

Ключові слова: обкатка, накатка, волочіння, пластичне деформування, ролик, інструмент, заготівля, амплітуда коливань, навантаження, коефіцієнт збудження, встановлена амплітуда, деформаційна хвиля.

Purpose. Justification of the influence of pulsating dynamic loads in the surface layers of parts obtained by plastic deformation methods on the quality of finished products during cold rolling, knurling, running in, drawing and stamping.

Methodology. A schematization was adopted in which the workpiece or part is an anisotropic medium elastically bonded along the surface of the junction of external reinforced layers with the internal mass of the part. On the basis of the proposed physical model, conditions were found under which under the action of cyclic surface loads, violations of the integrity of the appearance of fracturing and waviness of external fibers in the process of strengthening treatment of semi-finished products and parts are possible.

Findings. The obtained data allows us to establish the frequency characteristics of the process of unstable parametric oscillations caused by nonlinear friction between the forming element and the workpiece (part), which lead to a deterioration in the quality of finished products. In addition, for the steady-state operating modes of machines for cold metal forming, the dependence of the amplitudes of deformation waves, as functions of the maximum pulsations of the "periodic" components of surface forces, was obtained, and measures were proposed to reduce vibroactivity in the area of tool interaction with the workpiece and machine parts for cold processing.

Originality. It consists in formulating and solving the second dynamic problem for the surface layers of the workpiece at the interface of the processed layers and the workpiece array. Depending on the occurring periodic forces for the surface layers, the conditions of steady and unstable operation of the shaping tool and the whole machine for metal forming by pressure, as a whole, are determined.

Practical value of the work lies in the fact that safe modes of operation of metal forming machines have been identified, conditions for improving the design of machines for cold metal forming have been created, under which the possibility of occurrence of parametric oscillations, as well as the reduction of vibratory activity of machines for cold metal forming in minimized whole.

Key words: running in, knurling, drawing, plastic deformation, roller, tool, workpiece, amplitude of oscillations, load, excitation coefficient, steady amplitude, deformation wave.

Рекомендована к публикации
д. т. н. А. С. Зеленским

Поступила 10.04.2019