УДК 517,51-7
ББК 22.161

DOI:10.33065/2307-1052-2020-4-34-93-98

Нелинейная математическая модель функционирования педагогической системы

Коноплева Ирина Викторовна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской авиации имени главного маршала авиации Б. П. Бугаева, г. Ульяновск, Россия, orcid.org/0000-0002-2206-908X

Сибирева Анна Рудольфовна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Россия, orcid.org/0000-0001-6755-8867

Аннотация. Цель работы – изучение кризиса в педагогических системах произвольной природы с точки зрения внутреннего наблюдателя. Задача работы – построить и исследовать математическую модель, описывающую протекание кризисов в педагогических системах. При построении модели применяется синергетическая методология, системный и процессный подходы. Для математического анализа различных социальных явлений используются системы дифференциальных уравнений, позволяющие исследовать динамику процесса. В работе рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве, описывающая функционирование педагогической системы в период кризиса. Для ее исследования использованы численные и топологические методы нелинейной динамики, метод характеристических показателей Ляпунова, теория странных аттракторов Лоренца. Численное моделирование решений системы при различных наборах управляющих параметров (коэффициентов системы) позволяет определить область устойчивости (асимптотической устойчивости), предельные циклы, точки бифуркации, описать возможные траектории развития педагогической системы. Математическое моделирование углубляет знания о сущности кризисов, особенностях их протекания, делает возможным качественное изучение и численное моделирование, а также позволяет прогнозировать возможные эффективные меры по борьбе с кризисными явлениями и разработать новые подходы в управлении педагогическими системами.

Ключевые слова: педагогическая система, кризис в педагогической системе, особые точки, устойчивость, гомоклинические траектории, гетероклинические траектории, странный аттрактор.

Nonlinear Mathematical Model of Pedagogical System Functioning

Konopleva Irina V.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Natural Sciences, Ulyanovsk Institute of Civil Aviation, Ulyanovsk, Russia, orcid.org/0000-0002-2206-908X

Sibireva Anna R.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia, orcid.org/0000-0001-6755-8867

Abstract. The purpose of this article is to study the crisis in pedagogical systems from the point of view of an internal observer. The aim of the work is to build and investigate a mathematical model describing the course of crises in pedagogical systems. When building the model, a synergetic methodology, system and process approaches are used. For the mathematical analysis of various social phenomena, systems of differential equations are used to investigate the dynamics of the process. The paper considers a system of nonlinear differential equations in three-dimensional space that describes the functioning of the pedagogical system during the crisis. Numerical and topological methods of nonlinear dynamics, the method of Lyapunov characteristic exponents and the theory of strange attractors by Lorentz were used to study it. Numerical modeling of system solutions for various sets of control parameters (system coefficients) makes it possible to determine the region of stability (asymptotic stability), limit cycles, bifurcation points, and describe possible trajectories of development of the pedagogical system. Mathematical modeling deepens the knowledge about the essence of crises, the peculiarities of their course, makes it possible to study qualitative and numerical modeling, and also allows predicting possible effective measures to combat crisis phenomena and develop new approaches in the management of pedagogical systems.

Keywords: singular points, stability, homoclinic and heteroclinic trajectories, strange attractor.

Актуальность. Математическое моделирование поведения социальных, в частности педагогических систем (ПС), в период кризиса – актуальная задача сегодняшнего дня. Математические модели функционирования социально-педагогических систем рассматриваются в работах В. П., Милованова, В. И. Жегалова, С. Н. Киясова и др. [Милованов 2001; Жегалов, Киясов 2007], в которых синергетическое моделирование ведется на языке нелинейных дифференциальных уравнений. Кризис в таких моделях представлен как точка бифуркации, после которой система выбирает одну из возможных траекторий развития. Происходящее в точке бифуркации скрыто от внешнего наблюдателя. Вызывает интерес описание процессов внутри этого «черного ящика» с точки зрения внутреннего наблюдателя.

На основании наблюдений и экспериментов было установлено, что система информационных потоков в период кризиса имеет четкую структурную организацию, общую для социально-педагогических систем различной природы [Сибирев, Сибирева 2016: 236]. Эмпирически наблюдаемые свойства системы в кризис переключаются со свойствами странного аттрактора Лоренца, состоящего из множества многократно проходимых петель, обладающего «масштабной инвариантностью» (т.е. «в мелком масштабе

он выглядит примерно так же, как и в крупном» [Малинецкий 2007:101]. Это определило выбор математического аппарата данной статьи.

Кризис – период становления новой программы стабильного функционирования (гомеостаза) ПС. Среди происходящих в период кризиса процессов (подробнее см. [Сибирев, Сибирева 2016: 236]) определяющими являются: $z(t)$ – деятельность по построению новых целей, $y(t)$ – деятельность по созданию организационной структуры новой программы гомеостаза, $x(t)$ – деятельность по выбору фактического содержания новой программы. Поведение педагогической системы в период кризиса можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx + ay, \\ \frac{dy}{dt} = bx + by - cxz, \\ \frac{dz}{dt} = -dz + mxy; \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) связывает величины x, y, z с помощью положительных параметров k, a, b, c, d, m , которые характеризуют влияние внешних и внутренних сред на систему. Так как они изменяются медленнее, чем создается новая целевая программа функционирования, считаем их постоянными. Коэффициенты при x и y во втором уравнении, вообще говоря, различны, но наблюдения показывают, что процессы по выбору фактического содержания новой программы и построения ее организационной структуры происходят синхронно, поэтому можно брать равные коэффициенты при линейных слагаемых во втором уравнении.

Модель, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений, аналогичная (1), исследовалась в [Коноплева, Сибирева 2018: 105–107] методами, указанными в [Гурина, Дорофеев 2010: 65–66], а именно: преобразованиями и исключением переменных система (1) приводилась к виду, в котором гомоклинической петле соответствует гетероклиническая траектория, с последующей проверкой стыковки частей этой траектории, что доказывает существование хаотического аттрактора Лоренца.

Характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе, при любых значениях параметров имеет два отрицательных и один положительный корень. Следовательно, система (1) имеет 3 особые точки:

$$O_0(0,0,0), O_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{db(a+k)}{cmk}}, \pm\sqrt{\frac{dkb(a+k)}{a^2cm}}, \frac{b(a+k)}{ac}\right) \quad (2)$$

точка $O_0(0,0,0)$ – седло-узел с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями (всюду далее используется терминология [Шильников, Шильников 2004]).

Используя топологические методы нелинейной динамики, в том числе метод характеристических показателей Ляпунова [Никитина 2014: 69–71], определим гомоклинические траектории седло-узла $O_0(0,0,0)$, разрушение которых при изменении

значений управляющих параметров приводит к бифуркации гомоклинического каскада (хаотического аттрактора).

Введем малые отклонения $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ в системе (1) от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и составим уравнения в вариациях

$$\delta \frac{dx}{dt} = -k\delta x + a\delta y, \quad \delta \frac{dy}{dt} = (b - c\bar{z})\delta x + b\delta y - c\bar{x}\delta z, \quad \delta \frac{dz}{dt} = -a\delta z + m(\bar{x}\delta y + \bar{y}\delta x) \quad (3)$$

Характеристическое уравнение системы (3) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(d + k - b) + \lambda(d(k - b) - b(k + a) + c(m\bar{x}^2 + a\bar{z})) + d(-b(k + a) + a\bar{c}) + m\bar{c}\bar{x}(k\bar{x} + a\bar{y}) = 0 \quad (4)$$

и определяет характеристические показатели любой особой точки в поле трехмерного пространства системы (1).

Проведем численное исследование системы (1) при следующих значениях управляющих параметров [Гурина, Дорофеев 2010: 67]:

$$(a, b, c, m, k) = (1, 4, 8, 4, 1) \quad d \in (2, \dots, 2,3345) \quad (5)$$

При малых изменениях значений коэффициента d может существенно измениться динамика решений. Следовательно, параметр d , характеризующий способность системы к целеполаганию, является бифуркационным. Практическое подтверждение этого можно найти в работах по менеджменту, где указано, что целеполагание определяющим образом влияет на поведение системы.

Из уравнения (4) следует, что особая точка O_0 системы (1) является седло-узлом для указанных значений параметров, и в O_0 седловая величина $\sigma_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ для параметров (5).

Выделим в правых частях системы (3) слагаемые линеаризации (1). Остальные члены содержат частные решения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Они могут влиять лишь на мнимую часть характеристических показателей. Тогда седловая величина для всех точек пространства, порожденных системой дифференциальных уравнений (1), будет одинаковой, и бифуркационный процесс описывает теорема Гробмана–Хартмана [Шильников, Шильников 2009: 79]: «Пусть точка O_0 есть грубое состояние равновесия. Тогда существуют окрестности U_1 и U_2 , в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны». Т.е. окрестность, заполненная седлоузловыми точками, переходит седлофокусный континуум. Седлофокусная петля имеет отрицательную седловую величину σ во всех точках траектории для рассматриваемых параметров (5). Численными методами определяется, что сумма показателей Ляпунова системы (1) для параметров (5) отрицательна, а это означает существование гомоклинической траектории седлофокусной петли.

Рис. 1. Проекция решения системы (1) на плоскость Oxy (а – при $d=2,6$ – при $d=2,33$)

На Рис. 1 приведены проекции численных решений системы (1) на плоскость Oxy (рис. 1(а) при $d=2$, рис. 2 (б) при $d=2,3$). При $d=2$ нет четкого разделения на деятельность организационного и содержательного характера, это единый процесс. При небольшом увеличении параметра $d=2,3$ точка O включена в петлю траектории (рис. 1 (б)). На Рис. 1(б) полужирной линией обозначены траектории, содержащие седлофокусные точки, тонкой линией – седлоузловые. Система начинает разделять организационную деятельность и деятельность по созданию фактического содержания программы, осуществляя произвольный выход то на одну, то на другую петлю.

Возрастание коэффициента d приводит образованию траектории относительно особых точек O_1 и O_2 . Физическая интерпретация этого факта: увеличение диссипации вызывает увеличение притяжения, увеличение отрицательной седловой величины σ во всех точках траектории приводит к разделению предельного цикла на два.

Для педагогических и иных систем это означает, что жизнь организационных структур протекает независимо от содержания, для реализации которого они создаются.

На рис. 2, а, б, в представлены проекции на координатные плоскости при $d=2,4$

Рис. 2. Проекция решения системы (1) на координатные плоскости, $d=2,4$

Структура типа странного аттрактора рождается за пределами значения параметра d , рассматриваемого в (5). Области существования замкнутой траектории относительно особых точек O_1 и O_2 не пересекаются. Порождается орбитальная неустойчивость, которая сопровождается перескоком изображающей точки с одной орбиты на другую. Т.е. увеличение параметра d усиливает хаотизацию процесса.

Рассмотрены также средневыворочные значения управляющих параметров – коэффициентов системы (1)

$$a=18,2; b=18,8; c=9,75; d=32,7; m=8,4; k=8,4 \quad (6)$$

полученные экспериментально [Сибирева, Гумирова 2018: 88-95] в соответствии с методикой «оценки самоорганизации деятельности» [Мандрикова 2010: 59], предлагающей тест для оценки в баллах величин, сопоставимых по смыслу с коэффициентами системы (1). Для этих значений коэффициентов седлофокусная петля имеет положительную седловую величину σ во всех точках траектории. Сумма показателей Ляпунова в этом случае положительна, что свидетельствует о хаотическом поведении системы: с увеличением скорости целеполагания происходит отдаление организационных структур (и их действий) от процесса смыслового наполнения новой программы гомеостаза, что ведет к негативному сценарию протекания кризиса.

Вывод. Каждая наука в своем развитии проходит различные этапы: от эмпирических наблюдений – к сбору и классификации фактов, далее к их математическому описанию и анализу. В последнее время такой переход наблюдается в социальных науках. Междисциплинарной

методологией при этом выступает синергетика, описывающая поведение сложных открытых систем в терминах нелинейных дифференциальных уравнений. При этом математическое описание поведения систем согласуется с эмпирическими наблюдениями и с результатами экспериментов (в том числе и педагогических).

Математические модели, описывающие поведение ПС в кризис, углубляют наши знания о характере его протекания, позволяют прогнозировать некоторые возможные сценарии развития. Проведение численных расчетов с адекватной моделью позволяет избежать экспериментов с созданием кризисных ситуаций, нежелательных в реальной жизни или недоступных исследователю. Дальнейшие исследования в данном направлении позволят проводить диагностику динамики кризиса, выработать соответствующие методики и рекомендации по кризисному сопровождению и управлению педагогических и социальных систем.

Источники и литература:

1. Гурина Т. А., Дорофеев И. А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 63–68.
2. Жегалов В. И. Киясов С. Н. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007). 179 с.
3. Коноплева И. В., Сибирева А. Р. Математическое моделирование кризисных явлений в педагогических системах // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Материалы XIII Межд. научно-техн. конф. Пенза, Пензенский гос. ун-т., 2018. С. 103–111.
4. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 312 с.
5. Мандрикова Е. Ю. Разработка опросника самоорганизации деятельности (ОСД) // Психологическая диагностика. 2010. № 2. С. 59–83.
6. Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 263 с.
7. Никитина Н. В. О существовании гомоклинической траектории с симметрией в трехмерных системах // Доповіді Національної академії наук України. 2014. № 7. С. 68–75.
8. Сибирев В. В., Сибирева А. Р. Структурная организация кризиса в педагогических системах // Казанский педагогический журнал. 2016. № 2. С. 236–242.
9. Сибирева А. Р., Гумирова В. П. Диагностика и прогноз самоуправления подростка // Поволжский педагогический сборник. 2018. № 3 (25). С. 88–95.
10. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. М., Ижевск: ИКИ, 2004. 416 с.

Статья поступила в редакцию 23.10.2020.