УДК 378.147, 372.851
ББК 74.489

DOI:10.33065/2307-1052-2020-4-34-108-115

Инструкционная схема организации мыслительной деятельности будущих учителей математики в процессе освоения базовых понятий функционального анализа

Макеева Ольга Викторовна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Россия, orcid.org/0000-0003-4345-2296

Фолиадова Елена Викторовна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Россия, orcid.org/0000-0001-6353-1536

Аннотация. Универсальность математического знания, его *a priori* метапредметный характер и фундаментальная роль при формировании научного стиля мышления предъявляют высокие требования к подготовке учителей математики в рамках системы высшего профессионального образования. Эта подготовка включает в себя формирование компетенций, связанных с умением понимать и передавать знание, сформулированное на языке математики, умением встраивать его в уже имеющуюся систему математической и общенаучной подготовки, а также активное, творческое освоение математического содержания с учётом как специфики этого содержания, так и уровня развития средств автоматизации вычислений. В работе представлена инструкционная схема организации мыслительной деятельности (ОМД) по решению учебных математических задач. Являясь универсальной, схема отвечает приведённым выше требованиям подготовки будущих учителей математики и разрабатывалась именно с ориентацией на эту категорию обучающихся. Методологической основой предложенной конструкции является деятельностный подход, при котором линейность мышления как процесса дополняется и обогащается системностью мышления как сложной структуры. Приведён конкретный пример использования схемы при освоении будущими учителями математики фундаментальных понятий функционального анализа – раздела, который с полным правом можно отнести к современной математике.

Ключевые слова: математическое образование, педагогическое образование, мыследеятельностный подход, математическая деятельность, структуры данных, функциональный анализ.

Instructional Scheme of Organizing Mental Activity of Future Maths Teachers while Mastering Basic Concepts of Functional Analysis

Makeeva Olga V.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia, orcid.org/0000-0003-4345-2296

Foliadova Elena V.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia, orcid.org/0000-0001-6353-1536

Abstract. The universality of mathematical knowledge, its a priori metasubject nature and fundamental role in forming the scientific style of thinking make high demands on the training of maths teachers within the framework of the higher professional education system. This training includes the formation of competencies related to the ability to understand and transmit knowledge formulated in the language of mathematics, the ability to embed it into the existing system of mathematical and general scientific training, as well as active, creative mastering of mathematical content. The article presents an instructional diagram of mental activity organization for solving educational mathematical problems. Being universal, the scheme meets the above requirements for training future maths teachers and it was developed specifically with an orientation towards this category of students. The article provides the specific example of the use of the scheme.

Keywords: mathematical education, pedagogical education, thought-activity approach, mathematical activity, data structures, functional analysis

Актуальность. Проблема подготовки педагогических кадров для массовой школы всегда стоит очень остро и носит разноплановый характер. Умение раскрыть смысл и значимость содержания математического знания в условиях активного развития электронных вычислителей становится нетривиальной проблемой. Для современной Z-аудитории необходимо программировать понимание (математического текста, рассуждения) как специально организованный процесс. Отметим, что умения «понимать рассуждение обучающихся», «анализировать предлагаемое обучающимся рассуждение» Профессиональный стандарт педагога, утверждённый в 2013 г., относит к числу основных умений учителя математики [Профессиональный стандарт 2013: 21]. Это означает, что освоение современного курса математики будущими учителями предполагает превращение «готового» математического знания, зафиксированного в учебниках, справочниках, информационных системах, в знание «становящееся», разворачиваемое, организуемое под конкретного «пользователя» и при этом согласно логике своего содержания самоорганизующееся.

Учитель математики как фасилитатор активного и продуктивного процесса освоения знания (метапредметного уже по природе своего предмета) – один из эталонов педагогического мастерства для современной школы. Подготовка такого профессионала, владеющего не только систематическим математическим знанием, но и обобщёнными приёмами его освоения как процесса «разворачивания смыслов» – это задача не только

профильных учебных заведений в целом, но и всех преподавателей-предметников высшей педагогической школы.

По мнению авторов, «динамической» в указанном смысле структурой представления математического знания является традиционная математическая задача: она не только содержит прямое приглашение к диалогу в виде вопроса (требования), но и создаёт возможности для дискурсивного анализа представленной ситуации. При этом приходится констатировать, что в современных условиях (информационной насыщенности, а порой, избыточности) учебный процесс в его традиционном варианте не реализует эти возможности достаточно полно: у школьников и студентов в большинстве случаев не формируется модель математической деятельности, чего прямо требует стандарт [Профессиональный стандарт 2013: 21].

Попытки описать технику математической деятельности как поиска решения математической задачи, чаще всего «нестандартной», предпринимались неоднократно, начиная по крайней мере с работы М. Вертгеймера (нем. Max Wertheimer) «Продуктивное мышление», изданной в 1945 г. [Вертгеймер 1987: 39–69], а также книг Дж. Пойа (англ. George Pólya), адресованных учителям и преподавателям математики и не утратившим актуальности; так, в [Пойа 1959: 202] приведена суммирующая рекомендации автора таблица «Как решать задачу». В советской психологии и дидактике математики аналогичные проблемы с опорой на исследования «круга Выготского» 1930–1950-ых гг. решали многие авторы; отметим здесь лишь работы Л. М. Фридмана, в частности, [Фридман: 1977], и авторское представление их результатов в виде рекомендаций для учащихся. Однако указанные и иные реализованные в 1960–1980-ые гг. исследования не привели к формированию технологии массового математического образования, которая решала бы проблему «осмысленного» освоения предмета, – во всяком случае, технологии, воспроизводимой в современных условиях. По мнению авторов, фрагменты такой технологии разумно разрабатывать с ориентацией на высшее педагогическое образование, с опорой на дуальную позицию будущих учителей математики в процессе освоения математических дисциплин [Макеева 2017].

Методология исследования. В 1950-ые годы П. Я. Гальпериным была разработана теория поэтапного формирования умственных действий – психологическая теория обучения как перехода внешней деятельности во внутренний план (в ходе интериоризации). Описаны процессы и условия формирования осмысленных действий по генерации знаний субъекта – представлений и понятий об объектах и их связях. К ним относятся активная ориентировка субъекта в условиях действия; наличие средств действия – своеобразных орудий психической деятельности (эталонов, мер, знаков); понимание процесса возникновения образов восприятия и мышления как перехода внешних действий в план операций, осуществляемых в уме.

Согласно этой теории освоение мыслительных действий и усвоение соответствующих им знаний состоит в последовательном прохождении следующих этапов:

- мотивационный этап;
- ориентировочный этап (предварительное ознакомление с материалом освоения и составление схемы ориентировочной основы будущего действия (ООД));
- материальный этап (усвоение содержания каждой операции действия под контролем со стороны преподавателя в условиях максимального разворачивания действия и выполнения фактически с опорой на внешние вспомогательные средства);
- этап внешней речи (проговаривание вслух каждого шага решения задачи);
- этап внешней речи про себя (отличается от предыдущего этапа большей скоростью выполнения и сокращённостью);

– этап умственного или внутриречевого действия (сокращение и автоматизация действия, когда оно становится максимально сокращённым и освоенным) [Гальперин 2002:195].

Проблема. Теория поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина хорошо известна в отечественной психологии и получила широкое международное признание. Обучение, построенное с учётом положений теории П. Я. Гальперина, обладает большей эффективностью по сравнению с традиционной системой, так как управляет процессом формирования умственных действий (в том числе качествами действий). Однако активного применения в современной отечественной системе образования данный подход не находит.

Цель исследования – разработать структуру организации эффективной учебной математической деятельности (в том числе самостоятельной); представить её наглядно и компактно в виде «мягкой инструкционной схемы», сформулированной в терминах деятельности обучающегося.

Объект исследования – предметно-деятельностная компонента образовательного пространства студентов направления подготовки «Педагогическое образование» профиля «Математика».

Предмет исследования – организация эффективного профессионально ориентированного процесса освоения математического знания студентами направления подготовки «Педагогическое образование» профиля «Математика» с учётом положений деятельностного подхода в обучении.

Основные результаты работы. Предложена схема-инструкция организации мыслительной деятельности обучающихся в процессе решения математических задач, нацеленная на то, чтобы вывести во внешний план и отразить во внешней речи процессы, которые при сформированном «умении решать задачи» происходят в свёрнутом виде [ср.: Макеева 2019: 647]. Понятие «математическая задача» трактуется авторами достаточно широко, в духе мыследеятельностного подхода [Громыко 2000], и включает, например, задачи понимания математического текста, конструирования примеров и контрпримеров к заданным утверждениям, проверки математических гипотез, построения математических моделей задачных ситуаций и др. Разработанная схема применима в работе как с рутинными и квазирутинными [Балл 1990: 58], так и с нерутинными (для данного решателя) задачами. Для любых типов задач инструкционная схема включает разделы анализа математической постановки задачи, решения задачи и рефлексивной оценки проведённого решения. Как правило, это позволяет говорить об одновременном рассмотрении нескольких различных [Балл 1990: 62] задач: родовой или индивидуальной математической задачи, представленной в формулировке, и задачи поиска решения этой задачи, а также о включении данной задачи в более общий класс, о самостоятельной постановке новых вопросов в описанной задачной ситуации и др. С точки зрения авторов, эти аспекты имеют принципиально важное значение для формирования профессиональных компетенций будущих учителей математики, ср. [Яновская 2013: 148–149].

Приведём пример использования инструкционной схемы в процессе освоения элементов теории множеств студентами педагогического университета. Ведущей целью изучения основ функционального анализа и теории функций действительной переменной в педагогическом вузе авторы считают формирование культуры рассуждений и тезауруса будущих учителей, способности и привычки к аккуратному использованию терминологии и символики, к пониманию, анализу корректности и самостоятельному

конструированию доказательств математических фактов [ср.: Мельников 2008: 104, 109; Мельников 2017: 109]. Одним из приёмов, способствующих достижению этих результатов, является постановка задач, для решения которых необходимо привлекать (и различать) теоретико-множественные, топологические, метрические и иные свойства объектов, вариативные способы их задания. Все эти аспекты решения хорошо «улавливаются» предлагаемой инструкционной схемой организации мыслительной деятельности. В таблице отражён возможный результат анализа одной задачи на сравнение мощностей множеств – многообразий в евклидовых пространствах либо их частей (приведены лишь фрагменты решения).

Табл. Пример решения задачи с применением инструкционной схемы ОМД.

Формулировка задачи		
Сравните мощности следующих множеств: А – множество иррациональных точек отрезка $[0;1/2020]$ числовой прямой; – множество всех точек окружности радиуса $[0;1/2020]$ на плоскости с центром в точке ; В – множество всех точек окружности радиуса $1/\pi$ на плоскости с центром в точке $(\sqrt{2}; \pi)$; С – множество рациональных точек круга радиуса 2020 на плоскости с центром в точке $(\sqrt{2}; \pi)$; D – множество целых точек некоторого угла на плоскости с вершиной в начале координат; Е – множество рациональных точек единичной сферы трёхмерного пространства с центром в начале координат; F – множество целых точек шара диаметра 3 в трёхмерном пространстве с центром в точке $(1; \sqrt{2}; \pi)$; G – множество целых точек гиперкуба в четырёхмерном пространстве с центром в начале координат и диагональю, соединяющей точки $(0;0;0;0)$ и $(2;2;2;2)$.		
В процессе решения задачи студент		
1) на этапе анализа математической постановки задачи		
называет	объект исследования	Рассматриваются множества точек в координатных пространствах различных размерностей (1, 2, 3, 4)
формулирует	предмет исследования	с точки зрения их мощности.
выделяет	компоненты объекта исследования	Во всех случаях элементы множества – точки, заданные декартовыми координатами, т.е. элементы R, R^2, R^3 или R^4 , обладающие указанными характеристическими свойствами.
характеризует	компоненты объекта исследования (в соответствии с требованиями предмета исследования)	Множество А – подмножество множества иррациональных чисел, имеющего мощность континуум. Характеристическое свойство элементов задаётся двойным неравенством. Множество В – подмножество множества R^2 , имеющего мощность континуум. В – замкнутая кривая, т.е. характеристическое свойство (ограничение), выделяющее точки этого множества, можно задать в виде уравнения связи между координатами – неявный способ задания кривой – или в виде параметрических уравнений. Множества С,Е – подмножества множеств Q^2, Q^3 соответственно, имеющих мощность $\aleph_0$. Для множества С ограничение может быть задано неравенством, для множества Е – например, уравнением связи между тремя координатами. ... Множества А,В,С,Е, F, G заданы однозначно, D – неоднозначно: лучи, ограничивающие угол, не фиксированы.

намечает	ответ задачи (результат исследования объекта)	Требуется упорядочить заданные множества в соответствии с их мощностями (мощности некоторых множеств совпадают). Ответ может зависеть от параметров, определяющих множество D . Все заданные множества имеют мощность не больше континуума, C, D, E, F, G – не более чем счётные, возможно, конечные.
2) на этапе решения задачи		
формулирует	идею решения задачи (возможные приёмы исследования объекта)	Можно применить определение равных и неравных мощностей либо найти мощность каждого из множеств A, B, C, D, E, F, G .
отбирает	инструменты решения задачи (методы исследования объекта)	Будем считать известными мощности множеств Z, Q, R ; используем теоремы о мощности степени счётного множества, ..., а также теорему Кантора-Бернштейна. В случае необходимости будем описывать заданные множества точек с помощью уравнений и/или неравенств.
намечает	шаги решения задачи (план исследования объекта)	Для каждого из заданных множеств: 1. укажем мощность охватывающего множества – декартовой степени Z, Q или R ; 2. попытаемся выделить подмножество такой же мощности; если это удастся сделать, мощность множества установлена; 3. иначе построим какую-либо аналитическую модель множества, с её помощью выделим нужное подмножество или установим биекцию с эталонным множеством; сделаем вывод о мощности множества. Из полученных результатов сделаем вывод о соотношениях между мощностями множеств
комментирует	применение инструментов на каждом шаге решения задачи (процесс исследования объекта)	... Множество $D \subset \{(r; \varphi) \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, $\alpha < \beta$ заданы; для точки $(r; \varphi)$ имеем $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$; если обе координаты целые, то $\operatorname{tg} \varphi \in Q$. Между любыми α и β можно найти угол φ так, чтобы было $\operatorname{tg} \varphi \in Q$ (требуется обоснование*). Следовательно, D бесконечно, а поскольку $D \subset Z^2$, оно счётно (теорема Кантора-Бернштейна). (*) следует из плотности Q в R : ...
формулирует	ответ задачи (результат исследования объекта)	$\operatorname{card} F < \operatorname{card} G < \operatorname{card} C = \operatorname{card} D = \operatorname{card} E < \operatorname{card} A = \operatorname{card} B$
3) на этапе анализа решения задачи		
проверяет	корректность каждого шага решения задачи (правильность хода исследования объекта)	Шаги решения выполнены верно: • введённые биекции между множествами определены корректно, • приведены ссылки на необходимые определения и теоремы.
оценивает	полноту решения задачи (полноту исследования объекта)	Решение полное, так как однозначный ответ получен с учётом всех возможных значений параметров для множества D (остальные множества заданы однозначно).

оценивает	рациональность решения задачи (рациональность процесса исследования объекта)	Решение рационально в том смысле, что не применяет прямое построение биекций с эталонными множествами, для множеств из данной задачи, очевидно, весьма трудоёмкое. Для конечных множеств удалось использовать оценку, а не прямой подсчёт мощности.
формулирует	выводы (итоги исследования объекта)	Были рассмотрены множества в пространствах размерности 1, 2, 3, 4 – кривые, поверхности, тела, их пересечения с множествами Q^n , Z^n . Мощность бесконечных множеств не зависела от размерности объекта. Для «однотипных» конечных множеств (кубы, шары одинаковых линейных размеров) мощность быстро растёт с ростом размерности.
анализирует	возможность переноса результатов решения задачи (уникальность объекта исследования)	Аналогично можно обосновать, что «произвольная» кривая в R^n , поверхность в R^n и т.д. – множество мощности континуум (придётся уточнить, что такое кривая, поверхность, ...). Для «кривых» и «поверхностей» в Q^n вопрос о мощности (счётно множество или конечно) решается всякий раз индивидуально, это предмет алгебраической геометрии. Удобна «рациональная параметризация». Для ограниченных множеств в Z^n вопрос о мощности – задача комбинаторики.

Предложенный материал наглядно показывает, что развёрнутый анализ задачи теории множеств, «забегая вперёд», стимулирует уточнение представлений о многообразиях и введение строгих определений некоторых топологических понятий, а также уяснение взаимосвязей различных математических дисциплин.

Выводы и заключения. Разработанная авторами инструкционная схема организации мыследеятельности в процессе решения математических задач используется ими в образовательном процессе (курсы математического анализа, теории функций действительной переменной, теории вероятностей и др., см. [Макеева 2019: 648]) и демонстрирует свою эффективность. Развёрнутое и комментированное применение схемы обучающимися, прежде всего студентами, соответствует первому этапу освоения «умения решать задачи». Требуется изучения вопроса, будет ли «след» схемы функционировать во внутреннем плане при самостоятельном решении студентами новых поставленных перед ними учебных и творческих математических задач. Авторы планируют проведение серии психолого-педагогических экспериментов для получения количественной оценки эффективности предложенной конструкции в образовательном пространстве, а также с целью дальнейшего совершенствования её структуры и разработки технологических приёмов её использования в индивидуальной и групповой работе в системе общего и высшего профессионального образования.

Источники и литература:

1. Профессиональный стандарт «Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)». Утверждён приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от «18» октября 2013 г. № 544н. Модуль «Предметное обучение. Математика».
2. Балл Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М.: Педагогика, 1990. 184 с.
3. Вертеймер М. Продуктивное мышление. / Вступ. ст. В. П. Зинченко. М.: Прогресс, 1987. 336 с.
4. Гальперин П. Я. Лекции по психологии: Учебн. пособ. для студентов вузов. М.: Книжный дом «Университет»: Высшая школа, 2002. 400 с.
5. Громыко Ю. В. Мыследеятельностная педагогика (теоретико-практическое руководство по освоению высших образцов педагогического искусства). Минск: Техно-принт, 2000. 376 с.

6. Макеева О. В., Фолиадова Е. В. Технология педагогической мастерской в математическом образовании будущих учителей математики // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России: Материалы Международного форума по математическому образованию, 18–22 октября 2017 г. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. Т. 2. С. 122–126. [Электронный ресурс]. // URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32523824> (дата обращения: 05.11.2020).
7. Макеева О. В., Фолиадова Е. В. Формирующее оценивание мыслительности будущих учителей математики в процессе решения задач по математической дисциплине // Электронные библиотеки. 2019. № 22 (6). С. 644–654. [Электронный ресурс]. URL: <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2019-22-6-644-654> (дата обращения: 31.10.2020).
8. Мельников Ю. Б., Поторочина К. С., Ткаленко Н. В. Стратегия как механизм планирования при обучении математике // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2008. № 48. С. 103–115. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13054178> (дата обращения: 05.11.2020).
9. Мельников Ю. Б., Шитиков С. А., Синцова С. Г. Отношение к математическим феноменам и их влияние на обучение математике // Вестник ТГПУ. 2017. № 8 (185). С. 108–113. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29769609> (дата обращения: 05.11.2020).
10. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. М.: Учпедгиз, 1959. 208 с.
11. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 1977. 208 с.
12. Яновская Н. Б. Концепция продуктивного обучения как основа развития личности посредством создания рефлексивно направленной образовательной среды // Ярославский педагогический вестник. 2013. № 3. Т. 2 (Психолого-педагогические науки). С. 147–150. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21361647> (дата обращения: 05.11.2020).

Статья поступила в редакцию 23.10.2020.