УДК 008.2, 001.18

ББК 74.04(2)

DOI:10.33065/2307-1052-2020-1-31-143-149

Моделирование и обработка данных суточной термометрии

Цыганов Андрей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Россия

Цыганова Юлия Владимировна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий факультета математики, информационных и авиационных технологий, ORCID ID: 0000-0001-8812-6035, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

Аннотация. Рассмотрен класс математических моделей суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека, заданные в пространстве состояний дискретными линейными стохастическими системами. Для моделей третьего порядка среднесуточная температура (мезор) моделируется как неизвестное входное воздействие. Вектор состояния модели включает значение температуры тела в дискретные моменты времени. В случае, когда среднее значение температуры неизвестно, для моделей третьего порядка при моделировании процесса дискретной фильтрации данных термометрии вместо дискретного фильтра Калмана предложено использовать алгоритм Гиллийнса-Мура (S. Gillijns, B. De Moor).

Ключевые слова: здоровый человек, термометрия, тепловой гомеостаз, линейная дискретная стохастическая система, оптимальная дискретная фильтрация.

Modeling and Processing Daily Thermometry Data

Tsyganov Andrey V.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, School of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Tsyganova Iulia V.,

Doctor of Physics and Mathematics, Professor, School of Information Technology, Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technologies, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

Abstract. The article considers the class of mathematical models of daily thermometry of thermal homeostasis of a healthy person, defined in the state space by discrete linear

stochastic systems. For third-order models the daily average temperature (mesor) is modeled as an unknown input effect. The state vector of the model includes the value of body temperature at discrete time instants. In case when the average temperature is unknown when modeling the process of discrete filtering of thermometry data for third-order models, it is proposed to use the Gillijns-Moor algorithm (S. Gillijns, B. De Moor) instead of a discrete Kalman filter.

Keywords: healthy person, thermometry, thermal homeostasis, linear discrete stochastic system, optimal discrete filtering.

1. Введение

Температура определяет скорость и направленность химических реакций организма человека и является одним из его важнейших параметров. Тепловой гомеостаз или терморегуляция – это физиологическая функция, которая поддерживает в организме человека постоянную температуру тела (с небольшими колебаниями) с помощью регуляции теплопродукции и теплоотдачи. Тепловой гомеостаз является неотъемлемой частью общего гомеостаза организма.

Циркадные (циркадианные) биологические ритмы человека являются универсальным критерием функционального состояния организма, представляющим один из важнейших механизмов приспособления к окружающей среде [Redfern 1994: 253]. Проведенный учеными анализ экспериментальных данных зависимостей температуры тела человека от времени суток показал [Kelly 2006: 278], что процесс суточного изменения температуры тела человека может быть представлен как аддитивная смесь детерминистской составляющей и стохастической составляющей. Детерминистская составляющая является периодическим, колебательным процессом, которая в первом приближении может быть представлена моделью гармонического осциллятора с неопределенной, в общем случае, амплитудой и с 24-х часовым периодом. Стохастическую составляющую в исходной модели можно представить гауссовским марковским процессом первого порядка с двумя параметрами, которые также могут быть неопределенными и подлежащими идентификации на основе экспериментальных данных.

В [Semushin 2013: 775, Кроливецкая 2014: 140, Цыганова 2015: 167, Semushin 2016: 2429] построены математические модели теплового гомеостаза здорового человека, принадлежащие классам непрерывных и дискретных линейных стохастических систем, представленных в пространстве состояний. Метод активной параметрической идентификации таких моделей подробно рассмотрен в [Semushin 2016: 2429].

В данной работе рассматриваются методы моделирования процессов дискретной фильтрации данных суточной термометрии с применением указанных моделей.

2. Математические модели теплового гомеостаза человека

Следуя указанным выше работам, рассмотрим трехмерную дискретную линейную модель **3dDRCM** – 3-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model (трехмерная дискретная каноническая модель в вещественном базисе). Обозначим интервал дискретизации как $\tau \triangleq \Delta t \triangleq t_{i+1} - t_i = \text{const}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}}_B u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}}_G w_{dt},$$

$$z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_H x_t + v_t, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c \triangleq \cos \omega_n \tau, s \triangleq \sin \omega_n \tau, d \triangleq e^{-\lambda \tau}, a \triangleq 1 - d, b \triangleq \sigma \sqrt{1 - d^2},$$

где w_{dt}^0 – дискретный стандартный (то есть с единичной ковариацией $Q_d^0=1$) гауссовский белый шум.

Для удобства моделирования значений температуры тела человека перейдем в базис стандартной наблюдаемой модели [Семущин 2006] и запишем дискретную стандартную наблюдаемую модель.

Для построения этой модели сначала вычисляют матрицу наблюдаемости

$$W_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+s & c-s & d \\ f+g & f-g & d^2 \end{bmatrix}, f \triangleq \cos 2\omega_n \tau, g \triangleq \sin 2\omega_n \tau,$$

$$\det W_* = 2(-d^2 s + dg + sf - cg) = 2(dg - s(1 + d^2)).$$

Затем переходят в базис стандартной наблюдаемой модели с помощью преобразования $x^* = Wx$ (так как определитель матрицы W , не равен нулю, преобразование является невырожденным). В результате построена модель **3dDSOM** – 3-dimension Discrete-time Standard Observable Model (трехмерная дискретная стандартная наблюдаемая модель).

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_*} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}}_{B_*} (1-d) u_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}}_{G_*} \sigma \sqrt{1-d^2} w_{dt}^0,$$

$$z_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_*} x_t^* + v_t, \quad \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ g \end{bmatrix},$$

$$-a_3 = d, \quad -a_2 = -1 - 2d \cos \omega_n \tau, \quad -a_1 = d + 2 \cos \omega_n \tau.$$

В случае, когда средняя суточная температура θ^* неизвестна и также подлежит оцениванию, очевидным решением является ее добавление в вектор состояния модели 3dDRCM. Вследствие чего размер вектора состояния станет равным 4, а сама дискретная модель примет следующий вид:

4dDRCM – 4-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model (четырёхмерная дискретная в вещественном базисе каноническая модель).

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} \cos \omega_n \tau & -\sin \omega_n \tau & 0 & 0 \\ \sin \omega_n \tau & \cos \omega_n \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \sqrt{1-d^2} \\ 0 \end{bmatrix} w_{dt},$$

$$z_t = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] x_t + v_t,$$

$$x_0 = [1/2, \quad -1/2, \quad 0, \quad u^*]^T.$$

Далее, как и в предыдущем случае, перейдем в базис стандартной наблюдаемой модели 4dDSOM. Для этого найдем матрицу наблюдаемости:

$$W_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \omega_n \tau + \sin \omega_n \tau & \cos \omega_n \tau - \sin \omega_n \tau & d & 1 \\ \cos 2\omega_n \tau + \sin 2\omega_n \tau & \cos 2\omega_n \tau - \sin 2\omega_n \tau & d^2 & 1 \\ \cos 3\omega_n \tau + \sin 3\omega_n \tau & \cos 3\omega_n \tau - \sin 3\omega_n \tau & d^3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det W_* = 4(1-d) \sin \omega_n \tau [(\cos \omega_n \tau - 1)(d^2 + 1) + d(\cos 2\omega_n \tau + 2 \cos \omega_n \tau)].$$

Поскольку $\text{rank } W_* \neq 0$, существует невырожденное преобразование. Выполнив преобразование базиса $x^* = W_* x$, запишем дискретную стандартную наблюдаемую модель **4dDSOM** – 4-dimension Discrete-time Standard Observable Model (четырёхмерная дискретная стандартная наблюдаемая модель).

$$x_{t+1}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_*} x_t^* + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} \sigma \sqrt{1-d^2} w_t}_{G_*},$$

$$z_t = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0]}_{H_*} x_t^* + v_t;$$

$$-a_4 = -d, -a_3 = 1 + d(2\cos \omega_n \tau + 1),$$

$$-a_2 = -(d+1)(2\cos \omega_n \tau + 1), -a_1 = d + 1 + 2\cos \omega_n \tau;$$

$$x_0^* = [u^0, \sin \omega_n \tau + u^0, \sin 2\omega_n \tau + u^0, \sin 3\omega_n \tau + u^0]^T,$$

где $d \triangleq e^{-\lambda \tau}$, z_t – измерения температуры тела здорового человека, $\tau \triangleq \Delta t \triangleq t_{i+1} - t_i$ – интервал дискретизации, равный 5 мин, w_t – дискретный гауссовский белый шум с единичной ковариацией ($Q=1$), $\omega_n = 2\pi/T_n$, $T_n = 24$ ч, v_t – ошибка измерения с нулевым средним и ковариацией $R=(0,125)^2$, u^0 – начальное значение среднесуточного уровня температуры ($u^0 \approx 36.0^\circ\text{C}$).

3. Методы оптимальной линейной дискретной фильтрации данных суточной термометрии

Предположим, что оценки значений модельных параметров λ и σ определены в результате применения процедуры активной параметрической идентификации [Semushin 2016: 2429], которая построена на основе метода вспомогательного функционала качества (ВФК) [Semushin 2013: 513] с минимизацией ВФК одним из известных градиентных методов [Васильев 2002].

Рассмотрим задачу математического и компьютерного моделирования процесса дискретной фильтрации данных суточной термометрии.

Для класса дискретных линейных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами, к которым относятся рассмотренные модели суточной термометрии, оптимальным линейным дискретным фильтром является хорошо известный алгоритм Калмана [Grewal 2001].

Алгоритм 1. Фильтр Калмана.

Инициализация. Задать начальные значения $P_0 = \Pi_0$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

Для $t=1, 2, \dots$ выполнить

1. Этап экстраполяции. Найти априорную ковариационную матрицу ошибок оценивания $P_{t|t-1}$ и априорную оценку состояния $\hat{x}_{t|t-1}$ следующим образом:

$$P_{t|t-1} = F_{t-1} P_{t-1} F_{t-1}^T + G_{t-1} Q_{t-1} G_{t-1}^T,$$

$$\hat{x}_{t|t-1} = F_{t-1} \hat{x}_{t-1} + B_{t-1} u_{t-1}.$$

II. Этап фильтрации. Используя априорные оценки $P_{t|t-1}$ и $\hat{x}_{t|t-1}$, найти их апостериорные значения P_t и $\hat{x}_t$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= H_t P_{t|t-1} H_t^T + \tilde{R}_t, \\ K_t &= P_{t|t-1} H_t^T \Sigma_t^{-1}, \\ P_t &= (I - K_t H_t) P_{t|t-1}, \\ \hat{x}_t &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t (z_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}).\end{aligned}$$

Конец.

Однако, алгоритм 1 имеет ограничение, а именно, знание значений детерминированного вектора входных воздействий u_t в каждый дискретный момент времени t . Таким образом, алгоритм 1 можно применять для моделей 3dDRCM и 3dDSOM в случае, когда значение u_t считают известным, и для моделей 4dDRCM и 4dDSOM в случае, когда значение u_t предполагают априорно неизвестным.

В недавней работе [Цыганов 2019: 65] впервые предложен подход к решению задачи дискретной фильтрации данных суточной термометрии, который в случае априорной неопределенности процесса u_t (среднего значения температуры – мезора) не требует перехода к четырехмерной модели с расширенным вектором состояния. Вместо этого мы предлагаем рассмотреть класс линейных дискретных стохастических моделей с неизвестным вектором входных воздействий, для которого в [Gillijns 2007: 934] построен алгоритм дискретной фильтрации.

Алгоритм 2. Алгоритм Гиллийнса-Мура.

Инициализация. Задать начальные значения $P_0 = P_0$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

Для $t=1,2,\dots$ выполнить

I. Прогноз x_t и P_t без учета оценки вектора входных

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t|t-1} &= F_{t-1} \hat{x}_{t-1}, \\ P_{t|t-1} &= F_{t-1} P_{t-1} F_{t-1}^T + G_{t-1} Q_{t-1} G_{t-1}^T,\end{aligned}$$

II. Оценка вектора входных воздействий u_{t-1}

$$\begin{aligned}\tilde{R}_t &= H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t, \\ D_t &= H_t B_{t-1}, \\ M_t &= (D_t^T \tilde{R}_t^{-1} D_t)^{-1} D_t^T \tilde{R}_t^{-1}, \\ \hat{u}_{t-1} &= M_t (z_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}),\end{aligned}$$

III. Прогноз x_t и P_t с учетом оценки вектора входных воздействий

$$\begin{aligned}\hat{x}_t^* &= \hat{x}_{t|t-1} + B_{t-1} \hat{u}_{t-1}, \\ P_t^* &= (I_n - B_{t-1} M_t H_t) P_{t|t-1} (I_n - B_{t-1} M_t H_t)^T + B_{t-1} M_t R_t M_t^T B_{t-1}^T,\end{aligned}$$

IV. Коррекция x_t и P_t

$$\tilde{R}_t^* = (I_m - H_t B_{t-1} M_t) \tilde{R}_t (I_m - H_t B_{t-1} M_t)^T,$$

$$S_t^* = -B_{t-1} M_t R_t,$$

$$\alpha_t = [0 \ I_p] U_t^T \tilde{S}_t^{-1},$$

$$K_t = (P_t^* H_t^T + S_t^*) \alpha_t^T (\alpha_t \tilde{R}_t^* \alpha_t^T)^{-1} \alpha_t,$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^* + K_t (z_t - H_t \hat{x}_t^*),$$

$$P_t = P_t^* - K_t (P_t^* H_t^T + S_t^*)^T.$$

Конец.

Замечание. В алгоритме 2 матрица $\tilde{S}_t$ такова, что $\tilde{S}_t \tilde{S}_t^T = \tilde{R}_t$, а U_t – ортогональная матрица, составленная из левых сингулярных векторов в сингулярном разложении матрицы $\tilde{S}_t^{-1} H_t B_{t-1}$.

Алгоритм 2 позволяет одновременно вычислить оптимальные оценки вектора состояния модели (в том числе – значение температуры) и оценить неизвестное значение мезора в текущий момент времени по данным измерений.

Приведем план вычислительного эксперимента:

1. Задать все известные параметры модели.
2. Определить интервал моделирования, который соответствует количеству измерений за сутки, произведенных каждые 5 минут.
3. Сгенерировать для каждого дискретного момента времени t гауссовы случайные величины w_t и v_t с нулевым математическим ожиданием и заданными ковариациями Q и R , соответственно.

4. Предполагая, что “истинное” значение мезора $u^* = 36.2^\circ\text{C}$, смоделировать очередное измерение y_t .

5. По предыдущим оценкам $\hat{x}_{t-1}$, $\hat{u}_{t-1}$, и текущему измерению y_t вычислить текущие оценки $\hat{x}_t$, $\hat{u}_t$ по уравнениям алгоритма 2.

6. Заключение

В работе рассмотрены два метода моделирования процесса дискретной фильтрации данных суточной термометрии здорового человека.

Первый метод предполагает применение алгоритма Калмана для моделей теплового гомеостаза третьего порядка в случае, когда значение среднесуточного уровня температуры (мезора) известно. При этом предпочтительнее использовать стандартную наблюдаемую модель, поскольку в ней первый компонент вектора состояния моделирует текущее значение температуры тела.

Второй метод применим в случае, когда среднесуточный уровень температуры неизвестен. Здесь, в свою очередь, возможны два варианта решения:

1. Расширение вектора состояния модели путем включения в него дополнительного компонента, моделирующего мезор. При этом модель теплового гомеостаза становится четырехмерной. Как следствие, увеличивается объем вычислений в алгоритме Калмана. Здесь также предпочтительнее применять стандартную наблюдаемую модель.

2. Переход к новому классу дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными воздействиями. Ключевой идеей является моделирование мезора

как неизвестного входного воздействия системы. В этом случае алгоритм Калмана применять нельзя. Но для данного класса систем существует алгоритм Гиллийнса-Мура (S. Gillijns, B. De Moor), который позволяет совместно оценивать вектор состояния и неизвестный вектор входного воздействия дискретной линейной стохастической модели суточной термометрии без увеличения размерности задачи.

Таким образом, выполненная модификация математической модели теплового гомеостаза третьего порядка позволяет адекватно воспроизвести циркадный ритм биологического процесса теплового гомеостаза здорового человека, а оценки температуры и мезора могут быть вычислены с помощью алгоритма 2 в реальном времени по текущим данным измерений, полученных с учетом погрешности измерительного устройства.

Полученные результаты могут быть использованы при обработке и анализе данных суточной термометрии.

Источники и литература:

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. // М.: Факториал Пресс, Гл. ред. физ.-мат. лит., 2002. 824 с.
2. Кроливецкая, Ю. М., Петрова Е. С. Построение стохастических моделей теплового гомеостаза человека. // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ. 2014. № 1. С. 140 – 152.
3. Семушин И. В., Цыганова Ю. В. Детерминистские модели динамических систем. Учебное пособие. // Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2006. 77 с.
4. Цыганова Ю. В. Об одной модели суточной термометрии теплового гомеостаза человека. // Первая Международная заочная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования по приоритетным направлениям биоэкологии и биотехнологии», секция «Математическое моделирование в биоэкологии и биотехнологии». Ульяновск: УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2015. С. 167 – 170.
5. Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Столярова И. В. Математическое и компьютерное моделирование суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека. // Теория и практика физической культуры. 2019. № 2. С. 65 – 67.
6. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering: Theory and Practice Using MATLAB. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 401 p.
7. Gillijns S., Moor B. De. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. // Automatica. 2007. Vol. 43. P. 934 – 937.
8. Kelly G. Body Temperature Variability (Part 1): A Review of the History of Body Temperature and its Variability Due to Site Selection, Biological Rhythms, Fitness, and Aging. // Altern. Med. Rev. 2006. Vol. 11. № 4. P. 278 – 293.
9. Redfern P., Minors D., Waterhouse J. Circadian rhythms, jet lag, and chronobiotics: an overview. // Chronobiol. Intern. 1994. № 11. P. 253 – 256.
10. Semushin I. V., Tsyganova J. V., Skovikov A. G. Identification of a simple homeostasis stochastic model based on active principle of adaptation. // Proceedings of International Conference “Applied Stochastic Models and Data Analysis ASDMA 2013 & DEMOGRAPHICS 2013”. Spain: Barcelona, 2013. P. 775 – 783.
11. Semushin I. V., Tsyganova J. V., Kulikova M. V. Identification of human body daily temperature dynamics via minimum state prediction error method. // Proceedings of ECC2016, European Control Conference. Denmark: IEEE, 2016. P. 2429 – 2434.
12. Semushin I. V., Tsyganova J. V. Adaptation in stochastic dynamic systems – Survey and new results IV: Seeking minimum of API in parameters of data. // Int. J. Communications, Network, and System Sciences. 2013. Vol. 6. № 12. P. 513 – 518.