УДК 616-073, 519.21, 519.61
ББК 53.6, 32.811

DOI:10.33065/2307-1052-2020-1-31-127-132

Оценка вычислительной сложности квадратно-корневого ковариационного алгоритма фильтрации для дискретных систем с мультипликативными шумами¹

Куренева Татьяна Николаевна,

старший преподаватель кафедры высшей математики, ORCID ID: 0000-0003-4878-2542, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Россия

Аннотация. В статье рассматривается задача оценки вычислительной сложности квадратно-корневого ковариационного алгоритма оптимальной линейной фильтрации для дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами, который может использоваться в алгоритмах обработки медицинских изображений. Разработанный алгоритм алгебраически эквивалентен стандартному ковариационному фильтру, но обладает лучшими вычислительными свойствами, присущими квадратно-корневым алгоритмам. Приведены результаты оценки его вычислительной сложности по сравнению со стандартным ковариационным алгоритмом фильтрации.

Ключевые слова: медицинская визуализация, мультипликативные шумы, оптимальная дискретная фильтрация, квадратно-корневые алгоритмы.

Estimating Computational Complexity of the Square-Root Covariance Filtering Algorithm for Discrete Systems with Multiplicative Noises

Kureneva Tatiana N.,

0000-0003-4878-2542, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

Abstract. The article considers the task of evaluating the computational complexity of the square-root covariance algorithm of optimal linear filtering for discrete linear stochastic systems with additive and multiplicative noises, which can be used in medical image processing algorithms. The developed algorithm is algebraically equivalent to the standard covariance filter, but has the best computational properties inherent in square-root algorithms. The article presents the results of evaluating its computational complexity in comparison with the standard covariance filtering algorithm.

Keywords: medical imaging, multiplicative noise, optimal discrete filtering, square-root algorithms.

1. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научного проекта № 18-41-730001 п_мк.

Ведение.

В последние десятилетия в современной медицине все более важную роль играет медицинская визуализация – набор методов, применяемых для создания изображений человеческого тела, которые широко используются в клинических целях для диагностики заболеваний. Существуют различные методы медицинской визуализации: магнитно-резонансная томография (МРТ), компьютерная томография (КТ) и др. Для получения 2D- или 3D-изображений из проекций исследуемого объекта используется процесс, называемый восстановлением изображений, целью которого является восстановление утраченной или испорченной информации. Обычно медицинские изображения в процессе получения, обработки и передачи подвергаются воздействию различных шумов, которые приходится фильтровать для получения качественных изображений. Во многих случаях такие шумы зависят от уровня сигнала (яркости зашумленного пиксела), а соответствующие математические модели обработки изображений описываются дискретными линейными стохастическими системами с мультипликативными шумами.

Задачи фильтрации в классе стохастических систем с мультипликативными шумами рассматривались многими авторами. К ранним достижениям в данной области исследований принадлежат результаты работ [McLane 1969:41] для систем в непрерывном времени и [Hampton 1975:195; Pakshin 1978:526] для систем в дискретном времени. Алгоритмы оптимальной линейной фильтрации для таких систем напоминают классические алгоритмы калмановской фильтрации для систем с аддитивными шумами и обладают теми же недостатками, в частности, они являются неустойчивыми к ошибкам машинного округления. Одним из способов решения этой проблемы является использование модификаций классических алгоритмов, основанных на матричных ортогональных преобразованиях, однако такие алгоритмы для класса дискретных линейных стохастических систем с мультипликативными шумами в научной литературе не представлены, хотя для класса стохастических систем с аддитивными шумами соответствующее направление в теории линейного оценивания существует уже давно и постоянно развивается [Kailath, Sayed, Hassibi 2000; Grewal, Andrews 2015; Цыганова, Куликова 2018:5].

Цель данной работы заключается в построении нового квадратно-корневого ковариационного алгоритма дискретной фильтрации в классе дискретных линейных систем с аддитивными и мультипликативными шумами и оценке его вычислительной сложности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему с мультипликативными и аддитивными шумами

$$\begin{cases} x_k = (F_{k-1} + \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1})x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, & (1) \\ z_k = (H_k + \tilde{H}_k\zeta_k)x_k + v_k, & (2) \\ k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $z_k \in \mathbb{R}^m$ – вектор измерений; матрицы $F_k, \tilde{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $H, \tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $G \in \mathbb{R}^{n \times q}$; $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, \Pi_0)$ – начальное состояние; $w_k \in \mathbb{R}^q \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ и $\xi_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ – соответственно аддитивный и мультипликативный шумы в объекте (1); $v_k \in \mathbb{R}^m \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ и $\zeta_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$ – соответственно аддитивный и мультипликативный шумы в измерителе (2); ковариационные матрицы Q_k и R_k шумов w_k и v_k положительно определенные, и все шумы и начальное состояние взаимно независимые.

Преобразуем систему (1), (2) к эквивалентной форме

$$\begin{cases} x_k = F_{k-1}x_{k-1} + \tilde{w}_{k-1}, \\ z_k = H_k x_k + \tilde{v}_k, \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{w}_{k-1} = F_{k-1}\xi_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}$, $\tilde{v}_k = \tilde{H}_k\zeta_k x_k + v_k$, $E\{x_k x_k^T\} = X_k$,
 $E\{\tilde{w}_k\} = 0$, $E\{\tilde{w}_k \tilde{w}_k^T\} = \tilde{Q}_k$, $E\{\tilde{v}_k\} = 0$, $E\{\tilde{v}_k \tilde{v}_k^T\} = \tilde{R}_k$, и

$$\begin{aligned} X_k &= F_{k-1}X_{k-1}F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \\ \tilde{Q}_k &= \sigma_\xi^2 \tilde{F}_k X_k \tilde{F}_k^T + G_k Q_k G_k^T, \\ \tilde{R}_k &= \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k. \end{aligned}$$

Задача заключается в построении алгоритма линейной дискретной фильтрации, который позволяет вычислить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{x}_k$ вектора состояния x_k по доступным измерениям $Z_1^k = \{z_1, \dots, z_k\}$.

2. Алгоритм оптимальной линейной фильтрации. Рассмотрим ковариационный алгоритм фильтрации калмановского типа.

Алгоритм 1. Ковариационный алгоритм фильтрации (CF).

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$. Задать начальные значения $P_0 = \Pi_0$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

Для $k=1, 2, \dots$ выполнить

Этап экстраполяции. Найти априорную ковариационную матрицу ошибок оценивания $P_{k|k-1}$ и априорную оценку состояния $\hat{x}_{k|k-1}$ следующим образом:

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \quad (5)$$

$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1} \quad (6)$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1} \quad (7)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (8)$$

Этап фильтрации. Используя априорные оценки $P_{k|k-1}$ и $\hat{x}_{k|k-1}$, найти их апостериорные значения P_k и $\hat{x}_k$ следующим образом:

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k \quad (9)$$

$$\Sigma_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + \tilde{R}_k \quad (10)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T \Sigma_k^{-1} \quad (11)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (12)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}). \quad (13)$$

Вывод ковариационного алгоритма в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами можно найти, например, в [Wu, Zhang, Shen 2016:483].

Для класса дискретных линейных стохастических систем с аддитивными шумами построены численно эффективные алгоритмы оптимальной линейной дискретной фильтрации, основанные на разложении Холецкого ковариационной матрицы ошибок оценивания и применении матричных ортогональных преобразований [Kailath, Sayed,

Hassibi 2000]. В [Verhaegen, Dooren 1986:907] проведен численный анализ квадратно-корневых алгоритмов фильтрации и доказана их численная устойчивость к ошибкам машинного округления. Следует ожидать, что теми же свойствами будут обладать квадратно-корневые алгоритмы фильтрации для систем с мультипликативными шумами.

В настоящей работе для линейных дискретных стохастических систем с мультипликативными шумами построим новый квадратно-корневой ковариационный алгоритм фильтрации на основе численно устойчивого матричного ортогонального преобразования вида $OA=R$, A – прямоугольная (в общем случае) матрица, O – матрица ортогонального преобразования, R – верхняя треугольная матрица.

3. Квадратно-корневой ковариационный алгоритм оптимальной линейной фильтрации. Ниже будем использовать следующие обозначения: S_A – квадратный корень матрицы A , полученный в результате разложения Холецкого ($A=S_A^T S_A$), где S_A – верхняя треугольная матрица.

Алгоритм 2. Квадратно-корневой ковариационный алгоритм фильтрации (SRCF).

Инициализация. Задать начальные значения $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $P_0 = \Pi_0$. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$. Найти разложения Холецкого $R_0 = S_{R_0}^T S_{R_0}$, $P_0 = S_{P_0}^T S_{P_0}$, $X_0 = S_{X_0}^T S_{X_0}$.

Для $k=1, 2, \dots$ выполнить

Этап экстраполяции. Известны $S_{P_{k-1}}$ и $\hat{x}_{k-1}$. Найти разложение Холецкого $Q_{k-1} = S_{Q_{k-1}}^T S_{Q_{k-1}}$.

Далее вычислить $\hat{x}_{k|k-1}$ и $S_{P_{k|k-1}}$, применяя последовательно три матричных ортогональных преобразования следующим образом:

$$\begin{bmatrix} S_{\tilde{Q}_{k-1}} \\ 0 \end{bmatrix} = O_1^{TU} \begin{bmatrix} \sigma_\xi S_{X_{k-1}} \tilde{F}_{k-1}^T \\ S_{Q_{k-1}} G_{k-1}^T \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $O_1^{TU} - (n+q) \times (n+q)$ матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду левой части выражения (14);

$$\begin{bmatrix} S_{X_k} \\ 0 \end{bmatrix} = O_2^{TU} \begin{bmatrix} S_{X_{k-1}} F_{k-1}^T \\ S_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $O_2^{TU} - (2n) \times (2n)$ матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду левой части выражения (15);

$$\begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}} \\ 0 \end{bmatrix} = O_3^{TU} \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}} F_{k-1}^T \\ S_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $O_3^{TU} - (2n) \times (2n)$ матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду левой части выражения (16).

Оценку $\hat{x}_{k|k-1}$ вычислить по формуле (8).

Этап фильтрации. Известны $\hat{x}_{k|k-1}$ и $S_{P_{k|k-1}}$. Найти разложение Холецкого $R_k = S_{R_k}^T S_{R_k}$.

Далее вычислить S_{P_k} и $\hat{x}_k$, применяя последовательно два матричных ортогональных преобразования следующим образом:

$$\begin{bmatrix} S_{\tilde{R}_k} \\ 0 \end{bmatrix} = O_1^{MU} \begin{bmatrix} \sigma_\zeta S_{X_k} \tilde{H}_k^T \\ S_{R_k} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $O_1^{MU} - (m+n) \times (m+n)$ – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду левой части выражения (17);

$$\begin{bmatrix} S_{\Sigma_k} & \bar{K}_k \\ 0 & S_{P_k} \end{bmatrix} = O_2^{MU} \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}} H_k^T & S_{P_{k|k-1}} \\ S_{\bar{R}_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где $O_2^{MU} - (m+n) \times (m+n)$ – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду левой части выражения (18).

Здесь $\bar{K}_k = S_{\Sigma_k}^{-T} H_k P_{k|k-1}$. Оценку $\hat{x}_k$ вычислить по формуле

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \bar{K}_k^T S_{\Sigma_k}^{-T} (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}). \quad (19)$$

Этапы I и II ортогонального квадратно-корневого ковариационного алгоритма имеют общий вид $OA=R$. Поскольку O – ортогональная матрица, то $O^T O = I$. Следовательно, $A^T O^T O A = A^T A = R^T R$. Используя данное равенство, можно доказать эквивалентность соотношений (5) и (14), (6) и (15), (7) и (16), (9) и (17), (10)-(12) и (18).

4. Оценка вычислительной сложности алгоритмов фильтрации. Для оценки вычислительной сложности стандартного и квадратно-корневого ковариационных алгоритмов определим количество операций с плавающей запятой (флоп) каждого из них [Голуб, Лоун 1999]. Результаты вычислений предложены в таблице.

Ковариационный алгоритм фильтрации (CF)		Квадратно – корневой ковариационный алгоритм фильтрации (SRCF)	
Номер формулы	Количество флопов	Номер формулы	Количество флопов
5	$4n^3 + (2q+2)n^2 + 2q^2n$	14	$\frac{10}{3}n^3 + (2q+1)n^2 + 2q^2n$
6	$4n^3 + n^2$	15	$\frac{16}{3}n^3$
7	$4n^3 + n^2$	16	$\frac{16}{3}n^3$
8	$2n^2$	8	$2n^2$
9	$2mn^2 + 2m^2n + 2m^2$	17	$2mn^2 + (2m^2 + m)n + \frac{4}{3}m^3$
10	$2mn^2 + 2m^2n + m^2$	18	$\frac{14}{3}n^3 + 6mn^2 + 4m^2n + \frac{4}{3}m^3$
11	$2mn^2 + 2m^2n + m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$		
12	$2n^3 + (2m+1)n^2$		

13	$(2m + 2)n^2 + (2m + 2)n$	19	$2mn^2 + (4m^2 + 6m + 1)n + m^2 + m$
всего	$12n^3 + (2q + 10m + 9)n^2 + (2q^2 + 6m^2 + 2m + 2)n + (m^3 + \frac{7}{2}m^2 + \frac{1}{2}m)$	всего	$\frac{46}{3}n^3 + (2q + 12m + 5)n^2 + (2q^2 + 6m^2 + 3m + 1)n + (\frac{8}{3}m^3 + m^2 + m)$

Сравнивая результаты вычислений, делаем вывод, что стандартный алгоритм и квадратно-корневой алгоритм сравнимы по вычислительной сложности. Асимптотическая оценка обоих алгоритмов равна $O(n^3)$.

Примечание. Вычисление квадратных корней в разложении Холецкого не учитывались, поскольку количество операций для них при реализации стандартного и квадратно-корневого алгоритмов одинаково.

Заключение. В работе построен квадратно-корневой ковариационный алгоритм (SRCF) оптимальной линейной фильтрации для дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами и проведен анализ его вычислительной сложности. Подсчитано количество операций с плавающей запятой (флопов) для стандартного ковариационного алгоритма фильтрации и для квадратно-корневого ковариационного алгоритма. Результаты анализа показали, что вычислительная сложность квадратно-корневого алгоритма сравнима с вычислительной сложностью стандартного алгоритма. В дальнейшем предполагается исследовать устойчивость квадратно-корневого алгоритма к ошибкам машинного округления.

Источники и литература:

1. McLane P.J. Optimal linear filtering for linear systems with state-dependent noise. // International Journal of Control. 1969. Vol. 10. № 1. P. 41 – 51.
2. Hampton R. L. T. On unknown state-dependent noise, modeling errors, and Adaptive filtering. // Computers & Electrical Engineering. 1975. Vol. 2. № 2. P. 195 – 201.
3. Pakshin P.V. State estimation and control synthesis for discrete linear systems with additive and multiplicative noise. // Automation and Remote Control. 1978. Vol. 39. № 4. P. 526 – 536.
4. Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B. Linear Estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 856 p.
5. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB. // 4th Edition. John Wiley & Sons, 2015. XVII. 617 p.
6. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализированных алгоритмах Оптимальной дискретной фильтрации. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2018. Т. 11. № 4. С. 5 – 30.
7. Wu Y., Zhang Q., Shen Z. Kalman filtering with multiplicative and additive noises. // Proceedings of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). 2016. June. P. 483 – 487.
8. Verhaegen M., Dooren P. Van. Numerical aspects of different Kalman filter implementations. // IEEE Trans. on Automatic Control. 1986. Vol. AC 31. № 10. P. 907 – 917.
9. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.